

ZBIGNIEW BRZOSKA

STATYKA I STATECZNOŚĆ KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH I CIENKOŚCIENNYCH

WYDANIE DRUGIE
ZMIENIONE



WARSZAWA 1965
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Obwolūtę projektował
Zenon Januszeński

SPIS RZECZY

Z przedmowy do wydania pierwszego

Przedmowa do wydania drugiego

1. Wiadomości wstępne	11
1.1. Przegląd podstawowych twierdzeń	11
1.2. Wyznaczanie przemieszczeń	15
1.3. Równania Maxwella—Mohra	21
1.4. Uwagi o równaniach M—M. Reguła zamiany stanu „0”	24
1.5. Zasada jednoznaczności rozwiązania	29
1.6. Linie wpływowe. Sposób budowy i zastosowania	32
1.7. Zadania	37

C z ę ś ć I

KONSTRUKCJE PRĘTOWE

2. Kratownice statycznie wyznaczalne	41
2.1. Określenia. Statyczny schemat kratownic	41
2.2. Statyka kratownicy trójpętowej	43
2.3. Przestrzenne kratownice proste. Metoda węzłów	46
2.4. Łączenie brył. Metoda przekrojów	49
2.5. Kratownice łączone. Kratownice trójpodłużnicowe	51
2.6. Ogólna teoria kratownic przestrzennych	54
2.7. Przestrzenne kratownice zespołowe. Metoda prętów zastępczych	60
2.8. Niektóre ułatwienia analizy kratownic	61
2.9. Linie wpływowe dla kratownic	67
2.10. Analityczna metoda wyznaczania odkształceń kratownic	71
2.11. Plan Willotta	71
2.12. Zadania	84
3. Kratownice przestrzenne o ścianach płaskich	85
3.1. Uproszczenia schematu statycznego. Kratownice pozornie nieszttywne	86
3.2. Kratownice powłokowe. Rozdział obciążeń	87
3.3. Skręcanie kratownicy powłokowej	94
3.4. Kratownice z 4-lamanymi podłużnicami	94
3.5. Skręcanie kratownic o podłużnicach łamanych przestrzennie	103
3.6. Kratownice nabudowane na podłożu	108
3.7. Zadania	114

4. Kratownice statycznie niewyznaczalne	120
4.1. Definicje. Metoda rozwiązania	120
4.2. Niektóre ułatwienia rozwiązań	129
4.3. Konstrukcje 4-podłużnicowe z przesztywnionymi wręgami	133
4.4. Inne przypadki konstrukcji 4-podłużnicowych	140
4.5. Racjonalny dobór stanu „0”. Przybliżone rozwiązania kratownic	147
4.6. Linie wpływowe kratownic statycznie niewyznaczalnych	151
4.7. Dobór sztywności prętów	153
4.8. Zadania	155

5. Ramy.	158
5.1. Definicje i klasyfikacja	158
5.2. Ramy płaskie statycznie wyznaczalne	159
5.3. Statycznie niewyznaczalne ramy jednoobwodowe ściśle płaskie	160
5.4. Przykłady rozwiązania ram. Niektóre uproszczenia	165
5.5. Symetryczne wieloobwodowe ramy płaskie płasko obciążone	173
5.6. Ramy ściśle płaskie obciążone przestrzennie	180
5.7. Wybrane zagadnienia przestrzennego obciążenia ram	187
5.8. Zadania	193

C z ę ś ć I I

KONSTRUKCJE CIENKOŚCIENNE

Wstęp. Podział zagadnień	197
------------------------------------	-----

6. Statyka cienkościennych prętów	198
6.1. Podstawowe założenia i zależności	198
6.2. Czyste ścinanie płaszcza. Skręcanie rur jednoobwodowych	201
6.3. Swobodne skręcanie profili otwartych	204
6.4. Swobodne skręcanie rur wieloobwodowych	207
6.5. Przeniesienie sił wzdłużnych i momentów gnących	210
6.6. Bezskręceniowe przeniesienie sił tnących w przecie otwartym	214
6.7. Nieswobodne skręcanie prętów o przekroju otwartym	221
6.8. Sposoby wyznaczania momentu J_F i sztywności C_s	226
6.9. Określenie odkształceń i naprężeń przy nieswobodnym skręcaniu	229
6.10. Przeniesienie obciążeń poprzecznych przez rury jednoobwodowe	236
6.11. Przeniesienie obciążeń poprzecznych w rurach wieloobwodowych	243
6.12. Wpływ zbieżności płaszcza	245
6.13. Statyka żeber	249
6.14. Stosowalność modelu pręta do analizy ustrojów	254
6.15. Zadania	257

7. Statyka tarcz i brył cienkościennych	264
7.1. Zastępczy model ustroju	264
7.2. Statyka najprostszyc tarcz	267
7.3. Tarcze statycznie wyznaczalne. Analogia kratownicowa	271
7.4. Wyznaczanie odkształceń	275
7.5. Statycznie wyznaczalne bryły o ściankach płaskich	277
7.6. Konstrukcyjne modyfikacje brył cienkościennych	282

7.7. Niektóre ułatwienia analizy cienkościennych brył	285
7.8. Podstawowe ustroje ze ściankami zakrzywionymi	288
7.9. Statyka 3-pasowego dźwigara rurowego	291
7.10. Inne półskorupowe dźwigary statycznie wyznaczalne	294
7.11. Statycznie wyznaczalne bryły o ściankach zakrzywionych	297
7.12. Jednoobwodowe ramy z prętów o przekroju otwartym	301
7.13. Złożone ustroje statycznie wyznaczalne	304
7.14. Rozwiązywanie zagadnień statycznie niewyznaczalnych	307
7.15. Przybliżona analiza zagadnień bryłowych w prętach	313
7.16. Przybliżona analiza wpływu wykrojów i załomów	317
7.17. Zadania	319

8. Statyka ustrojów wielosegmentowych 322

8.1. Podstawowy i korygujący stan napięć	322
8.2. Zagadnienia redukujące się do analizy tarcz płaskich	325
8.3. Rozwiązanie tarczy 3- i 4-pasowej	329
8.4. Analityczne rozwiązanie tarczy 3- i 4-pasowej	334
8.5. Inne analityczne rozwiązania tarczy 3- i 4-pasowej	339
8.6. Analityczne rozwiązanie symetrycznej tarczy 5- i 6-pasowej	342
8.7. Wpływ wykrojów w tarczach symetrycznie obciążonych	345
8.8. Przestrzenne współdziałanie segmentów. Skrzynkowa konstrukcja 4-pasowa	350
8.9. Inne konstrukcje przestrzenne 4-pasowe	354
8.10. Analiza wyników rozwiązań konstrukcji 4-pasowych	359
8.11. Wpływ wykrojów w konstrukcji 4-pasowej	362
8.12. Zasady obliczania konstrukcji wielopasowych	367
8.13. Wpływ okształcalności wręg w konstrukcji cylindrycznej	371
8.14. Zadania	374

9. Statyka płyt

9.1. Podstawowe założenia teorii płyt cienkich. Siły wewnętrzne	377
9.2. Równanie różniczkowe płyt cienkich	382
9.3. Podstawowe właściwości równań (9.8) i (9.9). Warunki brzegowe	385
9.4. Rozwiązanie płyt metodą rozkładu obciążeń	389
9.5. Energetyczna metoda rozwiązania płyt	393
9.6. Niektóre wyniki rozwiązania płyt. Analiza jakościowa	398
9.7. Płyty gęsto żebrowane	402
9.8. Zadania	406

C z ę ś ć I I I

ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

10. Stateczność konstrukcji prętowych 409

10.1. Wstęp. Podstawowe reguły i metody	409
10.2. Przykłady rozwiązania zagadnień stateczności.	413
10.3. Podział zagadnień stateczności konstrukcji prętowych	419
10.4. Niektóre przypadki giętnego wyboczenia pojedynczego pręta	422
10.5. Wyboczenie skrętne pręta o profilu otwartym	431
10.6. Wyboczenie giętno-skrętne profili otwartych	436
10.7. Nieswobodne wyboczenie giętno-skrętne	441
10.8. Zwichrzenie belek zginanych	447

10.9.	Wyboczenie poza granicami sprężystości	451
10.10.	Wyboczenie ram płaskich	455
10.11.	Wyboczenie kratownic	458
10.12.	Działanie zespołów obciążeń w stanach podkrytycznych	465
10.13.	Zadania	470
11.	Stateczność płyt i powłok	474
11.1.	Obciążenia krytyczne płyt. Metody obliczeń	475
11.2.	Naprężenia krytyczne w płytach. Omówienie wyników	481
11.3.	Wyboczenie płyt powyżej granicy sprężystości	486
11.4.	Wyboczenie lokalne prętów	489
11.5.	Wyboczenie płyty wzmocnionej żebrem	492
11.6.	Wyboczenie płyt gęsto żebrowanych	498
11.7.	Wyboczenie powłoki cylindrycznej przy ściskaniu	504
11.8.	Naprężenia krytyczne w powłokach. Omówienie wyników	508
11.9.	Zadania	511
12.	Praca konstrukcji po utracie stateczności	514
12.1.	Praca ściskanej płyty lub odcinka powłoki po utracie stateczności	515
12.2.	Obciążenia niszczące płyt i powłok żebrowanych. Uwagi ogólne	520
12.3.	Lokalne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych	522
12.4.	Giętne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych	523
12.5.	Skreśne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych	527
12.6.	Giętno-skreśne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych	530
12.7.	Inne postacie zniszczenia konstrukcji żebrowanych	535
12.8.	Praca ścinanej płyty po utracie stateczności	539
12.9.	Niezupełne pole ciągnięć ścinanej płyty	544
12.10.	Wytrzymałość elementów konstrukcji w stanie NPC	548
12.11.	Pole ciągnięć w ścinanej powłocie	552
12.12.	Obciążenia niszczące w złożonym stanie obciążeń	558
12.13.	Uwagi końcowe	562

Z PRZEDMOWY DO WYDANIA PIERWSZEGO

Książka niniejsza stanowi rozszerzony materiał wykładów autora w Politechnice Warszawskiej i obejmuje zagadnienia statyki i stateczności konstrukcji spotykanych w różnych dziedzinach urządzeń mechanicznych. To bardziej jednolite ujęcie uzasadnione jest ogólną tendencją we wszystkich działach budowy maszyn tworzenia konstrukcji lekkich. Postulat lekkości uzasadniony jest przy tym nie tylko oszczędnością materiału, lecz również dążeniem do zwiększenia ekonomiczności konstrukcji wyrażającej się stosunkiem ciężaru użytecznego do ciężaru własnego. Drugim równie ważnym postulatem jest bezpieczeństwo konstrukcji wyrażające się warunkiem, że przy użytkowych obciążeniach rzeczywistych lub umownych nie pojawią się w danej konstrukcji odkształcenia trwałe lub że przy tych obciążeniach ustrój ma wymagany współczynnik bezpieczeństwa.

Te dwa postulaty łącznie z innymi, jak sztywność i racjonalność budowy ustroju, nakładają na konstruktora obowiązek przeprowadzenia analizy wytrzymałościowej w sposób możliwie dokładny, a jednocześnie możliwie prosty. Ten drugi warunek mający w praktyce duże znaczenie spełniono w książce przez operowanie uproszczonymi konstrukcjami zastępczymi z powołaniem się na wyniki doświadczeń.

PRZEDMOWA DO WYDANIA DRUGIEGO

W porównaniu z pierwszym wydaniem treść książki została w niektórych działach dość istotnie zmieniona. Zmiany te dotyczą głównie statyki konstrukcji i polegają na większym niż poprzednio dostosowaniu materiału do zagadnień spotykanych w praktyce. W szczególności w zakresie statyki konstrukcji cienkościennych dokonano innego podziału treści, który zdaniem autora, jest bardziej przejrzysty. Ponadto każdy z rozdziałów uzupełniono podaniem zagadnień, których rozwiązanie przez czytelnika powinno dać lepsze opanowanie materiału.

Autor wyraża głębokie podziękowanie swoim współpracownikom L. Adamcowi, M. Białowskiemu i R. Jędrzejczykowi za szczególnie ofiarną pomoc w pracy redakcyjnej.

1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

1.1. Przegląd podstawowych twierdzeń

Statyka konstrukcji zajmuje się analizą wytrzymałościową ustrojów nośnych w stanie ich równowagi. O istnieniu tej równowagi wnioskujemy ze spełnienia odpowiednich warunków, które jak to wiadomo z Mechaniki Ogólnej, sformułować można w różny sposób.

Jednym z tych sformułowań jest żądanie, aby dla każdego elementu rozpatrywanego ustroju siła wypadkowa i moment wypadkowy wszystkich sił (zewewnętrznych i wewnętrznych) działających na ten element były równe zero. W analizie konstrukcji złożonych szczególnie przydatne jest sformułowanie oparte na zasadzie prac przygotowanych głoszącej, iż warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi jakiegokolwiek układu materialnego jest, żeby suma prac wszystkich sił (zewewnętrznych i wewnętrznych) na dowolnym przesunięciu przygotowanym* była równa zero. W rzeczywistych ustrojach, których elementy są odkształcalne, przy przesunięciach przygotowanych wykonują pracę nie tylko siły zewnętrzne lecz i wewnętrzne, wskutek czego zasada ta wyraża się w postaci

$$\Delta L_z + \Delta L_w = 0, \quad (1.1)$$

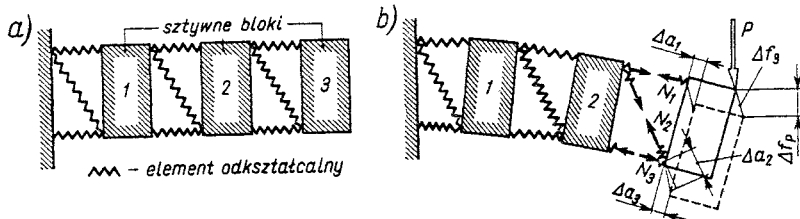
gdzie

ΔL_z — suma prac przygotowanych sił zewnętrznych,

ΔL_w — suma prac przygotowanych sił wewnętrznych.

W konstrukcji (rys. 1.1) zastosowanie równania (1.1) przy przesunięciu przygotowanym Δf_3 bloku 3 (rys. 1.1b) daje

$$(P \Delta f_P) + (-N_1 \Delta a_1 - N_2 \Delta a_2 + N_3 \Delta a_3) = 0. \quad (a)$$



Rys. 1.1. Zastosowanie zasady prac przygotowanych

Δf_3 — przesunięcie przygotowane, Δf_P , Δa_1 , Δa_2 , Δa_3 — rzuty przesunięcia Δf_3 na kierunki sił P , N_1 , N_2 , N_3 .

W równaniu (a), będącym jedynie formalnym stwierdzeniem istnienia równowagi, siły P , N_1 , N_2 , N_3 zachowują wartości i kierunki istniejące przed dokonaniem przesunięcia Δf_3 pomyślanego jako pewne

* To jest zgodne z narzuconymi dla układu więzami.

przemieszczenie fikcyjne. Takich równań można ułożyć tyle, ile jest stopni swobody, a więc w danym przypadku 9, otrzymując dostateczną liczbę równań określających 9 niewiadomych sił $N_1, N_2, \dots, N_9$ w sprężynach.

Równanie (1.1) jest słuszne dla każdej konstrukcji (sprężystej lub plastycznej). W urządzeniach idealnie sprężystych, w których, na zasadzie zachowania energii, praca sił wewnętrznych ΔL_w jest zawsze równa ubytkowi — ΔV energii potencjalnej V zakumulowanej w urządzeniu*, równanie (1.1) przyjmuje zmodyfikowaną postać

$$\Delta L_z - \Delta V = 0. \quad (1.2)$$

Zależność (1.2) wynikająca z najogólniejszej zasady statyki (prac przygotowujących) i zasady zachowania energii słuszna jest zawsze, a więc i wtedy, gdy odkształcenia urządzenia jako całości nie są funkcjami liniowymi obciążeń zewnętrznych. Przy jej stosowaniu należy pamiętać, iż wielkościami poszukiwanymi są siły zapewniające równowagę przy zadanych z góry przesunięciach przygotowanych. Aby więc móc obliczyć zmianę energii odkształcenia ΔV , sama energia V musi być wyrażona jako funkcja takich parametrów geometrycznych $g_1, \dots, g_n$, których nieskończenie małe zmiany $\Delta g_1, \dots, \Delta g_n$ są przesunięciami przygotowanymi. Zakładając takie przesunięcie przygotowane, w którym tylko $\Delta g_i \neq 0$, otrzymujemy według prawideł rachunku różniczkowego $\Delta V = (\partial V / \partial g_i) \Delta g_i$, a po podstawieniu do równania (1.2)

$$(\Delta L_z / \Delta g_i)_{\Delta g_i \rightarrow 0} = (\partial V / \partial g_i). \quad (b)$$

Jeśli parametr g_i jest przemieszczeniem liniowym, to lewa strona równania (b) przedstawia wielkość fizyczną, mającą wymiar siły. Rozszerzając to określenie i na inne parametry, lewą stronę równania (b) nazywamy *siłą uogólnioną* Q_i odpowiadającą *współrędnej* g_i , a równanie (b) otrzymuje postać

$$(\partial V / \partial g_i) = Q_i \quad (1.3)$$

głoszącą, iż w przypadku gdy energia odkształcenia urządzenia wyrażona jest jako funkcja parametrów geometrycznych $g_1, \dots, g_n$, pochodna cząstkowa względem jednego z nich jest równa sile uogólnionej odpowiadającej temu parametrowi (współrędnej).

Odpowiednikiem twierdzenia (1.3) jest *twierdzenie Castigliana* głoszące, iż w urządzeniu, w którym działanie obciążeń zewnętrznych $P_1, P_2, \dots, P_n$ podlega zasadzie superpozycji, pochodna cząstkowa energii odkształcenia względem jednej z sił P_i jest równa współrędnej uogólnionej f_i odpowiadającej tej sile**, to jest

$$(\partial V / \partial P_i) = f_i. \quad (1.4)$$

* Codziennym przykładem tego jest sprężyna zegara, w której w miarę wykonywania pracy przez wewnętrzne siły sprężystości maleje jej energia potencjalna.

** We wzorach (1.3) i (1.4) odmiennosć oznaczeń współrędnych uogólnionych g, f i sił uogólnionych Q, P wyraża różnicę postępowania prowadzącego do tych wzorów. W pierwszym przypadku pojęciem wyjściowym są zadane co do swego charakteru współrędne g , a wtórnym siły Q . W przypadku drugim kolejnosć jest odwrotna. Samo pojęcie sił i współrędnych uogólnionych jest pojęciem podstawowym.

Konsekwencją takiego sformułowania jest, że ustroje, do których można stosować twierdzenie Castigliana, są *układami Clapeurona*, dla których praca sił zewnętrznych L_z jest

$$L_z = 0,5 (P_1 f_1 + \dots + P_n f_n) = 0,5 \sum_1^n P_i f_i, \quad (1.5a)$$

a energia odkształcenia V jest jednorodną kwadratową funkcją sił uogólnionych P_i , bądź współrzędnych uogólnionych f_i :

$$V = 0,5 \sum_1^n \sum_1^n \gamma_{i,k} P_i P_k = 0,5 \sum_1^n \sum_1^n \delta_{i,k} f_i f_k, \quad (1.5b)$$

gdzie $\gamma_{i,k}$, $\delta_{i,k}$ są to stałe współczynniki zależne od kształtu konstrukcji i sposobu przyłożenia sił $P_1, \dots, P_n$.

Twierdzenie Castigliana otrzymuje się z analizy zmian energii V wyrażonej w funkcji sił uogólnionych i zmiany pracy sił zewnętrznych L_z spowodowanych przyrostem jednej z sił uogólnionych, któremu z uwagi na równowagę ustroju towarzyszy odpowiednia zmiana reakcji. Prawidłowe zatem wyniki zastosowania tego twierdzenia otrzymamy tylko wtedy, gdy energia odkształcenia wyrażona jest jako funkcja sił uogólnionych niezależnych od siebie*.

Jednym z wniosków wynikających z twierdzenia Castigliana jest zasada minimum energii odkształcenia głosząca, iż w statycznie niewyznaczalnym sprężystym ustroju podlegającym zasadzie superpozycji, pochodna energii odkształcenia względem wielkości statycznie niewyznaczalnej jest równa zero. Jeśli zatem w rozpatrywanym ustroju siły statycznie niewyznaczalne są $X_1, \dots, X_m$, to energia odkształcenia V będąc ich funkcją spełnia warunki

$$(\partial V / \partial X_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, m). \quad (1.6)$$

Ostatnim podstawowym twierdzeniem, na które bardzo często będziemy się powoływać, jest zasada wzajemności przesunięć głosząca, iż w sprężystym ustroju podlegającym zasadzie superpozycji praca $L_{1,2}$ sił pierwszego układu na przesunięciach ustroju wywołanych przez drugi (inny) układ obciążeń jest równa pracy $L_{2,1}$ sił drugiego układu na przesunięciach tegoż ustroju wywołanych przez pierwszy układ obciążeń, to jest

$$L_{1,2} = L_{2,1}. \quad (1.7)$$

Kończąc przegląd tych twierdzeń, warto przypomnieć, iż energia odkształcenia V dla jednostkowej kostki izotropowej, w najczęściej spotykanym dwuwymiarowym stanie napięcia (rys. 1.2a), wyraża się następująco:

$$V = 0,5 (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau \beta) = [(\sigma_x^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) / 2E] + (\tau^2 / 2G), \quad (1.8)$$

gdzie E , G , ν — odpowiednio moduł Younga, moduł odkształcenia postaciowego i liczba Poissona.

* Warunku tego nie spełniają reakcje podporowe i dlatego przy stosowaniu twierdzenia należy zawsze najprzód zdefiniować, które siły uważamy za obciążenia niezależne, które zaś za reakcje.

Dla zilustrowania stosowalności twierdzeń (1.2), (1.3) i (1.4) rozpatrzmy konstrukcję (rys. 1.3a) złożoną z dwóch prawie poziomych, przegubowo połączonych prętów, każdy o sztywności EA i sprężyny o sztywności K . Przy obciążeniu siłą pionową Q , punkt A przesunie się o g do dołu (rys. 1.3b). Ten parametr geometryczny określa odkształcenia wszystkich elementów konstrukcji a mianowicie skrócenie każdego z prętów o $u = [\sqrt{l^2 + g_0^2} - \sqrt{l^2 + (g_0 - g)^2}]$ i ściśnięcie sprężyny o g . Energia odkształcenia ustroju jest

$$V = 0,5 K g^2 + (E A u^2 / \sqrt{l^2 + g_0^2}) \quad (c)$$

Traktując przyrost Δg jako przesunięcie przygotowane obliczamy $\Delta L_z = Q \Delta g$ i ΔV , a po podstawieniu do (1.2) mamy

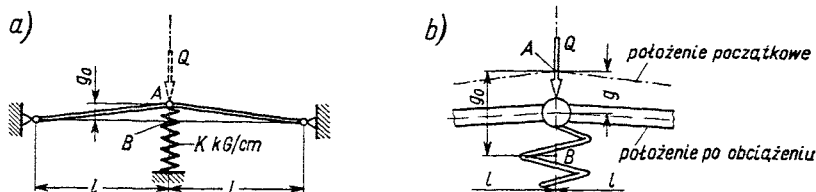
$$Q \Delta g - K g \Delta g - (2 E A u / \sqrt{l^2 + g_0^2}) (du/dg) \Delta g = 0.$$

Rys. 1.2. Oznaczenia dla wzorów (1.8)

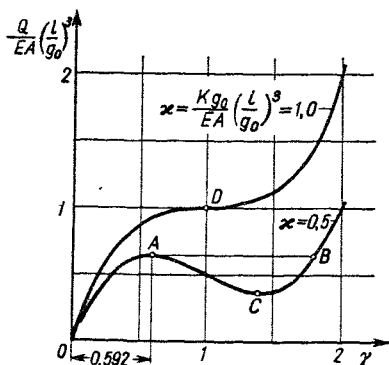
Ponieważ $\Delta g \neq 0$, więc powyższa zależność będzie spełniona, gdy

$$Q = K g + 2 E A (g_0 - g) [\sqrt{l^2 + g_0^2} - \sqrt{l^2 + (g_0 - g)^2}] / \sqrt{(l^2 + g_0^2) [l^2 + (g_0 - g)^2]}, \quad (d)$$

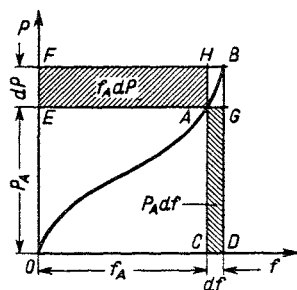
przy czym wstawiono tu pełne wyrażenie (du/dg) . Identyczny wynik otrzymamy różniczkując wyrażenie V względem g (wzór 1.3). Ponieważ (g_0/l) i (g/l) są zgodnie z założeniem ułamekami małymi, więc rozwi-



Rys. 1.3. Przykład konstrukcji o nieliniowej charakterystyce



Rys. 1.4. Wynik obliczeń dla konstrukcji z rys. 1.3



Rys. 1.5

jając w szereg pierwiastki $\sqrt{1 + (g_0/l)^2}$ i $\sqrt{1 + (g_0 - g)^2/l^2}$ mamy z dokładnością do małych czwartego rzędu

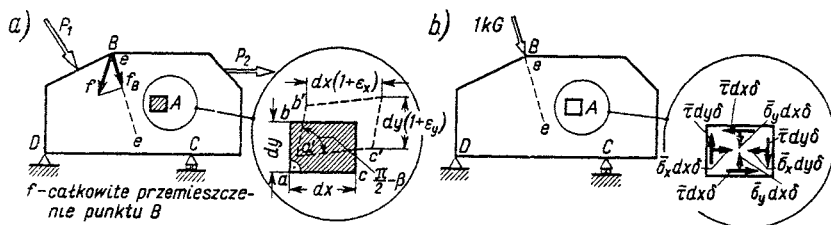
$$Q = K g_0 \gamma + E A (g_0/l)^3 \gamma (1 - \gamma) (2 - \gamma), \quad (e)$$

gdzie $\gamma = g/g_0$ — względna miara przesunięcia punktu A . Podane przykładowo w jednostkach bezwymiarowych wykresy $Q(\gamma)$ (rys. 1.4) wykazują znaczne odchylenie od liniowości spowodowane tym, iż działanie obciążenia zmienia w zasadniczy sposób kształt konstrukcji. Dla tej zatem konstrukcji nie obowiązuje zasada superpozycji obciążeń, aczkolwiek elementy jej są sprężyste. Nie można więc tu stosować ani twierdzenia Castigliana ani zasady wzajemności przesunięć. Przyczyny tego wyjaśnia rys. 1.5 przedstawiający ogólnie charakterystykę nieliniowego ustroju. W stanie równowagi określonym przez punkt A pole OAC przedstawia pracę siły P przy jej quasistatycznym narastaniu od 0 do wartości P_A . Praca ta na zasadzie zachowania energii jest równa energii odkształcenia V . Nadając teraz współrzędnej f_A przyrost df przy jednoczesnym wzroście P_A o dP , mamy z rysunku $dV = P_A df$, skąd wynika twierdzenie wyrażone za pomocą wzoru (1.3). Ten przyrost dV wcale nie jest równy polu $AEFH$, to jest $f_A dP$. Tylko w ustroju o charakterystyce liniowej, a więc podlegającym zasadzie superpozycji, gdy linia OAB jest prosta, $P_A df = f_A dP = dV$ i wtedy otrzymujemy twierdzenie Castigliana wzór (1.4).

1.2. Wyznaczanie przemieszczeń

Ponieważ w wielu zagadnieniach, jak np. zadaniach statycznie niewyznaczalnych, określenie przemieszczeń ustroju jest nieodzowne, potrzebne jest sformułowanie reguły sprowadzającej tę czynność do jednolitego dla wszystkich konstrukcji schematu postępowania.

W tym celu rozpatrzmy na początek płaską tarczę o grubości δ (rys. 1.6a), w której działanie jakichkolwiek przyczyn wywołało znaną nam zmianę wymiarów poszczególnych jej elementów. Element A doznał przy tym deformacji wyrażającej się przyrostami dłu-



Rys. 1.6. Wyznaczenie przemieszczeń na zasadzie prac przygotowanych

a) geometria przemieszczeń wymuszonych przyczynami zewnętrznymi, f — całkowite przemieszczenie punktu B ,
— składowa f na kierunku $e-e$ jest szukanym przemieszczeniem f_B ; b) czynność pomocnicza.

gości dx i dy o $\epsilon_x dx$ i $\epsilon_y dy$ oraz zmianą prostego kąta $\angle bac$ o przyrost β . Stawiając zadanie wyznaczenia przesunięcia f_B , jakiego na skutek tej deformacji doznał obrany punkt B w obranym kierunku $e-e$, wykonajmy czynność pomocniczą, polegającą na obciążeniu tej konstrukcji siłą 1 kG przyłożoną w punkcie B w kierunku $e-e$ (rys. 1.6b). Zakładamy przy tym, iż potrafimy obliczyć stan napieć $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}$ kG/cm^2 , wywołany przez tę siłę.

Jego działanie wewnątrz konstrukcji po usunięciu kostki A przedstawia powiększony fragment rys. 1.6b. Wiedząc z założenia, że układ tych sił jest w równowadze, zastosujemy do niego wzór (1.1), przy czym jako przesunięcia przygotowane weźmy układ przemieszczeń

* Wymiar napieć $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}$ należy rozumieć jako kG/cm^2 na 1 kG obciążenia.

z rys. 1.6a. Praca sił wewnętrznych $\bar{\sigma}_x \, dy \, \delta$, $\bar{\sigma}_y \, dx \, \delta$, $\bar{\tau} \, dx \, \delta$, $\bar{\tau} \, dy \, \delta$ działających w miejscu elementu A , jest

$$-(\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\tau} \beta) \, dx \, dy \, \delta, \quad (a)$$

a całkowita praca ΔL_w we wszystkich elementach składających się na rozpatrywaną tarczę o polu F wynosi

$$\Delta L_w = - \iint_F (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\tau} \beta) \, dx \, dy \, \delta. \quad (b)$$

Ponieważ praca przygotowana sił zewnętrznych ΔL_z jest

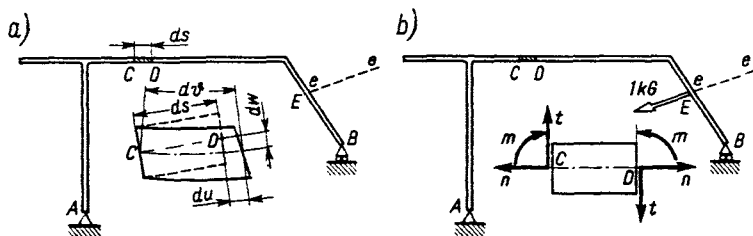
$$\Delta L_z = 1 f_B, \quad (c)$$

więc po podstawieniu do wzoru (1.1) otrzymujemy

$$f_B = \iint_F (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\tau} \beta) \, dx \, dy \, \delta. \quad (1.9)$$

Analogiczny dowód można przeprowadzić dla dowolnego 3-wymiarowego ciała, otrzymując w wyniku regułę, iż *szukane przemieszczenie zdeformowanego z dowolnych przyczyn ustroju jest równe liczbowo pracy sił wewnętrznych wywołanych odpowiednią siłą jednostkową na odkształceniach spowodowanych tymi dowolnymi przyczynami*. Przez odpowiedni dobór siły jednostkowej rozumie się spełnienie kryterium (c), co jest równoznaczne z tym, aby była ona siłą uogólnioną dla poszukiwanego przemieszczenia. Otrzymany wynik (1.9) ma ważne znaczenie dla cienkościennych konstrukcji, których elementy pracują na ogół w 2-wymiarowym stanie napieć (patrz rozdz. 6 i 7).

W przypadku płaskiej konstrukcji prętowej o przekrojach zwartych (rys. 1.7a), w której działanie dowolnych przyczyn zdeformowało pierwotnie proste elementy, na



Rys. 1.7. Wyznaczenie przemieszczeń w płaskiej konstrukcji prętowej

a) geometria przemieszczeń wymuszonych przyczynami zewnętrznymi; b) czynność pomocnicza (obciążenie siłą jednostkową) i układ sił wewnętrznych.

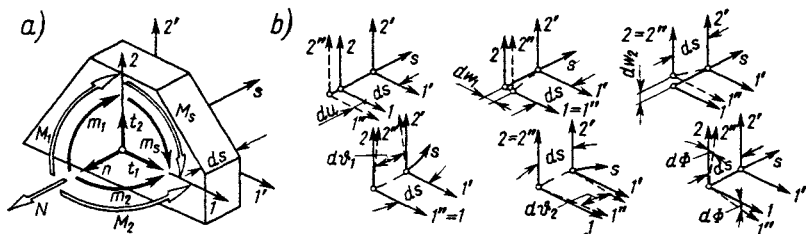
przykład CD pierwszą czynnością dla określenia przemieszczenia f punktu E w zadanym kierunku $e-e$ jest wprowadzenie odpowiedniej siły jednostkowej (rys. 1.7b). Siła ta wywołuje pewien stan naprężeń w prętach ustroju. Obliczenie przemieszczenia według podanej reguły wymagałoby całkowania prac elementarnych w objętości wszystkich prętów traktowanych jako ciała 3-wymiarowe. Zadanie to można jednak uprościć* wprowadzając

* Uproszczenie oparte jest na twierdzeniu Mechaniki Ogólnej głoszącym, iż praca układu sił jest równa pracy wypadkowej siły tego układu. W omawianym przypadku daje to zastąpienie całki potrójnej przez pojedynczą.

wypadkowe siły wewnętrzne n kG/kG, t kG/kG, m kGem/kG, wywołane przez tę siłę jednostkową i obliczając ich pracę na przesunięciach punktów osi pręta. Daje to w wyniku

$$f = \int_{AEB} (n du + kt dw + m d\vartheta), \quad (1.10a)$$

gdzie symbol AEB oznacza całkowanie wzdłuż osi wszystkich prętów, a współczynnik k uwzględnia fakt, iż rozkład naprężeń stycznych o wypadkowej t nie jest na przekroju pręta równomierny, jak również i to że kąty β dla poszczególnych włókien też są na ogół jednakowe.



Rys. 1.8. Układ sił i geometria przemieszczeń w przestrzennej konstrukcji prętowej
a) układ sił wypadkowych wewnętrznych; b) składowe przemieszczenia w elemencie pręta: du — wydłużenie, dw_1 i dw_2 — przesunięcia prostopadłe do osi, $d\vartheta_1$ i $d\vartheta_2$ — zakrzywienie osi, $d\Phi$ — skręcenie.

W przypadku konstrukcji prętowej przestrzennej (rys. 1.8) analogiczne rozumowanie prowadzi do wyniku

$$f = \int (n du + k_1 t_1 dw_1 + k_2 t_2 dw_2 + m_1 d\vartheta_1 + m_2 d\vartheta_2 + m_3 d\Phi), \quad (1.10b)$$

gdzie jak poprzednio całkowanie odnosi się do wszystkich elementów składających się na daną konstrukcję, współczynniki k_1 i k_2 mają to samo znaczenie, co poprzednio współczynnik k .

W dotychczasowych rozważaniach nie interesowaliśmy się przyczynami wywołującymi przemieszczenia. W zagadnieniach statyki konstrukcji przyczynami tymi może być na przykład działanie obciążeń zewnętrznych, odkształcenie cieplne, błędny montaż lub odkształcenia plastyczne. Ograniczając się na razie do analizy skutków działania obciążeń zewnętrznych, gdy konstrukcja jest idealnie sprężysta, a w elemencie CD (rys. 1.7a) działa siła wzdłużna N , siła tnąca T i moment gnący M , mamy następujące zależności znane z Wytrzymałości Materiałów:

dla konstrukcji prętowej płaskiej

$$du = N ds/E A, \quad dw = \beta ds = T ds/G A, \quad d\vartheta = M ds/E J; \quad (d)$$

dla konstrukcji prętowej przestrzennej (rys. 1.8)

$$\left. \begin{aligned} du &= N ds/E A, & dw_1 &= \beta_1 ds = T_1 ds/G A, & dw_2 &= \beta_2 ds = T_2 ds/G A, \\ d\vartheta_1 &= M_1 ds/E J_1, & d\vartheta_2 &= M_2 ds/E J_2, & d\Phi &= M_3 ds/C, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

gdzie

A — pole poprzecznego przekroju pręta,

I_1, I_2 — momenty bezwładności względem głównych centralnych osi 1 i 2,

C — sztywność pręta na skręcanie.

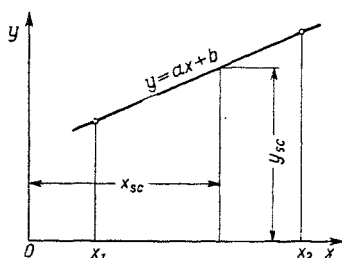
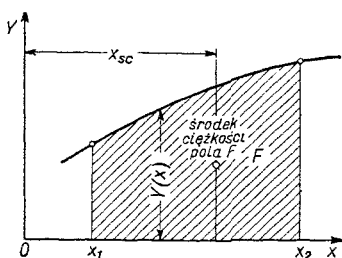
Podstawienie zależności (d) i (e) do wzorów (1.10) daje dla konstrukcji płaskiej

$$f = \int \frac{Nn \, ds}{EA} + \int \frac{Mm \, ds}{EJ} + k \int \frac{Tt \, ds}{GA}, \quad (1.11a)$$

a dla przestrzennej*

$$f = \int \frac{Nn \, ds}{EA} + k_1 \int \frac{Tt \, ds}{GA} + k_2 \int \frac{T_2 t_2 \, ds}{GA} + \int \frac{M_1 m_1 \, ds}{EJ_1} + \\ + \int \frac{M_2 m_2 \, ds}{EJ_2} + \int \frac{M_s m_s \, ds}{C}. \quad (1.11b)$$

Występujące we wzorach (1.11) wyrażenia podcałkowe mają dla konstrukcji o stałych sztywnościach postać iloczynu dwóch funkcji. W wielu zastosowaniach co najmniej jedna



Rys. 1.9. Oznaczenia do wzoru (1.12)

z tych funkcji jest liniowa. W takich przypadkach całkowanie można uprościć stosując znany z matematyki wzór, według którego całka z iloczynu dwóch funkcji, jednej dowolnej $Y(x)$ i drugiej liniowej $y(x) = ax + b$ (rys. 1.9), jest

$$\int_{x_1}^{x_2} Y(x) y(x) \, dx = F(ax_{sc} + b) = Fy_{sc}. \quad (1.12)$$

Szereg typowych wartości $\int Yy \, dx$ podano w tabl. 1.1.

Przykład: Wyznaczyć pionowe przemieszczenie przesuwnej podpory ramy płaskiej (rys. 1.10).

Rozwiązanie rozpoczynamy wyznaczając przebieg sił wewnętrznych (M, T, N) od obciążenia zewnętrznego (rys. 1.10b), a następnie od obciążenia siłą jednostkową P_{od} przyłożoną na podporze B (rys. 1.10c). Zwroty sił wewnętrznych na poszczególnych prętach zaznaczono tak, jak działają one na

* Należy podkreślić tu, iż we wzorach (1.11) osie 1 i 2 są centralnymi głównymi osiami bezwładności przekroju, podczas gdy we wzorach (1.10) są to dwie dowolne prostopadłe osie.

Tablica 1.1

WARTOŚĆ CAŁEK $\int_0^l y \, dx$

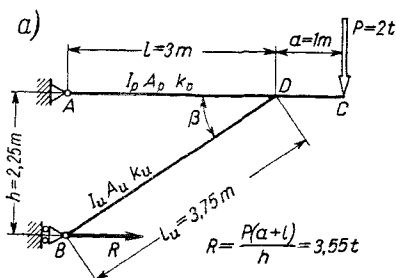
Wykres Y	Wykres y	$x+x'=l$				
			$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{2}acl$		$\frac{1}{2}a(c-d)l$
			$\frac{1}{3}acl$	$\frac{1}{3}acl$		$\frac{1}{6}a(2c-d)l$
			$\frac{1}{6}acl$	$\frac{1}{6}acl$		$\frac{1}{6}a(c-2d)l$
			$\frac{1}{6}acl\left(1+\frac{x'}{l}\right)$	$\frac{1}{6}acl\left(1+\frac{x'}{l}\right)$		$\frac{1}{6}ad\left[c\left(1+\frac{x'}{l}\right)+d\left(1+\frac{x'}{l}\right)\right]$
			$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{2}acl$		$\frac{1}{4}a(c-d)l$
			$\frac{1}{2}(a+b)cl$	$\frac{1}{6}c(2a+b)l$		$\frac{1}{6}[c(2a+b)+d(a+2b)]l$
			$\frac{1}{2}(a-b)cl$	$\frac{1}{6}(2a-b)cl$		$\frac{1}{6}[c(2a-b)+d(2b-a)]l$
			0	$\frac{1}{6}acl$		$\frac{1}{6}a(c-d)l$

wycięty element. Odpowiedź otrzymujemy podstawiając odpowiednie funkcje do wzoru (1.11a). Wyniki całkowania po zastosowaniu wzoru (1.12) lub wartości z tabl. 1.1 są następujące

$$\int \frac{Mm ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_p} \frac{Pl}{2} l \frac{2}{3} l + \frac{1}{EJ_u} \frac{P(l+a)}{2} l_u \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ_p} \left[1 + \frac{J_p l_u}{J_u l} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \right] = 3,55 \text{ cm},$$

$$k \int \frac{Tt ds}{GA} = \frac{k_p}{GA_p} Pl \cdot 1 + \frac{k_u}{GA_u} R \sin \beta l_u \cos \beta = \frac{k_p Pl}{GA_p} \left[1 + \frac{k_u A_p}{k_p A_u} \left(\frac{a+l}{l_u} \right) \right] = 0,0056 \text{ cm},$$

$$\int \frac{Nn ds}{EA} = - \frac{R \cos \beta l_u \sin \beta}{EA_u} = - \frac{Pl(l+a)}{l_u EA_u} = -0,0053 \text{ cm},$$



$$I_u = 7600 \text{ cm}^4$$

$$I_p = 5700 \text{ cm}^4$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

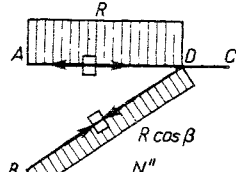
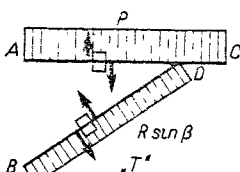
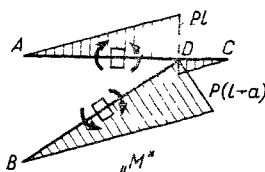
$$A_u = 60 \text{ cm}^2$$

$$A_p = 53 \text{ cm}^2$$

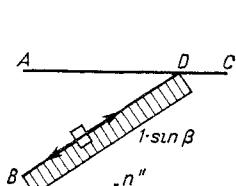
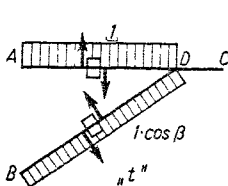
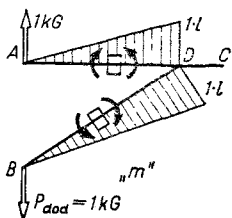
$$k_u = 2,0$$

$$k_p = 2,1$$

b)



c)



Rys. 1.10. Wykresy sił wewnętrznych ramy płaskiej przy obciążeniu zewnętrznym (M , T , N) i jednostkowym siłą $P_{\text{dod}}(m, t, n)$

przy czym znak minus ostatniej całki wynika stąd, że znaki sił wewnętrznych N i n są przeciwnie. W ostatecznym wyniku dodatnia wartość

$$f_B = 3,55 + 0,0056 - 0,0053 \approx 3,55 \text{ cm}$$

oznacza, że przemieszczenie następuje w kierunku założonej siły P_{dod} .

Z analizy powyższych liczb wynika ogólna reguła: *W konstrukcjach prętowych, w których wymiary przekroju poprzecznego są małe w porównaniu z długością prętów i w których poza siłami wzdłużnymi i tnącymi występuje jednocześnie zginanie, odkształcenie konstrukcji można wyznaczyć pomijając całkowicie wpływ sił wzdłużnych i tnących.*

1.3. Równania Maxwella—Mohra

W statyce konstrukcji najczęściej stosowaną metodą rozwiązania zagadnień statycznie niewyznaczalnych jest *metoda sił* dająca odpowiedź w postaci *równań Maxwella—Mohra*. Równania te są bardzo przejrzyste z uwagi na ich sens fizyczny, a wyznaczenie współczynników tych równań sprowadzone jest do jednolitego dla wszystkich konstrukcji schematu postępowania. Punktem wyjścia do sformułowania równań Maxwella—Mohra jest następujące stwierdzenie:

W konstrukcji statycznie niewyznaczalnej, zamienionej myślowo na statycznie wyznaczalną przez wprowadzenie dodatkowych przecięć, wartości niewiadomych sił statycznie niewyznaczalnych są tak dobrane, iż w miejscach dodatkowych przecięć zachodzi ciągłość przemieszczeń.

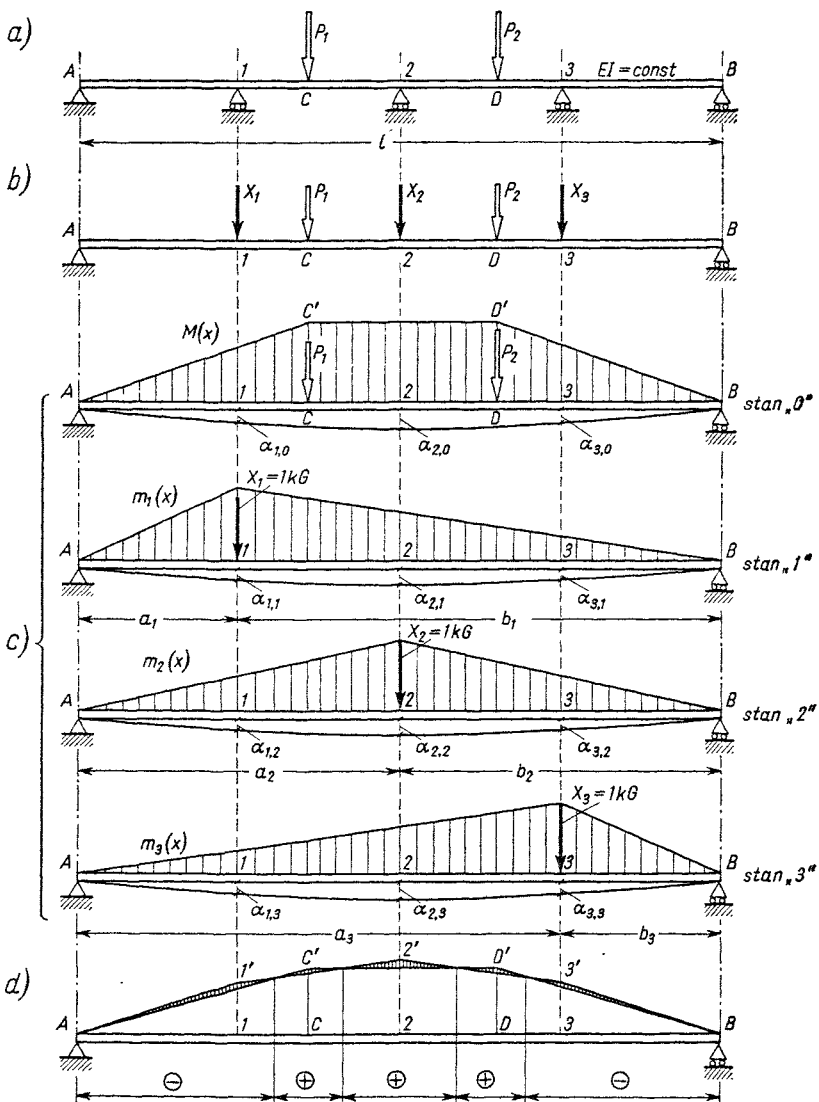
Weźmy jako najprostszy przykład belkę czteroprzęsłową (rys. 1.11). Przez usunięcie więzów łączących belkę z podporami środkowymi zamieniamy ją na konstrukcję statycznie wyznaczalną z nie znanymi na razie wartościami sił X_1 , X_2 , X_3 (rys. 1.11b). W celu sformułowania równań Maxwella—Mohra rozdzielamy ten stan na cztery stany składowe (rys. 1.11c) nazywając stan obciążenia siłami P_1 , P_2 stanem zerowym (stan „0”), a kolejne stany obciążenia siłami jednostkowymi $X_1 = 1$ kG, $X_2 = 1$ kG, $X_3 = 1$ kG odpowiednio stanami 1, 2 i 3. Oznaczając odpowiednie przemieszczenia przez a , rozróżniamy je podając wskaźniki. Wskaźnik pierwszy oznacza, jakiej sile uogólnionej odpowiada dane przemieszczenie jako współrzędna uogólniona. Wskaźnik drugi oznacza obciążenie wywołujące to przemieszczenie.

Tak więc na przykład $a_{1,3}$, $a_{2,2}$, $a_{1,0}$ są współrzędnymi uogólnionymi odpowiadającymi odpowiednio, siłom uogólnionym X_1 , X_2 , X_1 , wywołanymi jednostkowymi obciążeniami uogólnionymi $X_3 = 1$ kG, $X_2 = 1$ kG, i stanem obciążenia „0”.

Przypominając teraz, że zamiast jednostkowych sił uogólnionych X_1 , X_2 , X_3 działają ich wielokrotności oznaczone jako $X_1 \neq 1$ kG, $X_2 \neq 1$ kG, $X_3 \neq 1$ kG, otrzymamy np. w punkcie 1 przemieszczenia $a_{1,1}X_1$, $a_{1,2}X_2$, $a_{1,3}X_3$, $a_{1,0}$ zachodzące w tym samym kierunku. Suma tych przemieszczeń

$$a_1 = a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + a_{1,0}$$

jest według zasady superpozycji wynikowym przemieszczeniem punktu 1 belki względem wierzchołka podpory 1 traktowanej w danym zadaniu jako nieprzesuwnej (całkowicie sztywnej) w kierunku działania X_1 . Przypadek $a_1 > 0$ oznaczałby, że materiał belki przeniknął w materiał podpory, przypadek $a_1 < 0$ oznaczałby powstanie szczeliny między materiałem belki a podporą. W obydwu przypadkach $a_1 \neq 0$ oznacza więc nieciągłość przemieszczeń między dwoma odpowiadającymi sobie punktami konstrukcji. Jeśli siły



Rys. 1.11 Rozwiązanie belki ciągłej równaniami $M-M$
 Linia $AC'D'B$ – wykres momentów gnących od sił P_1, P_2 ; linia $A1'2'3'B$ – wykres momentów gnących od sił X_1, X_2, X_3 otrzymanych z rozwiązania równań $M-M$.

X_1, X_2, X_3 dobrane są prawidłowo, to tej nieciągłości być nie może i a_1 musi być równe zero. Ostatecznie

$$a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + a_{1,0} = 0 \quad (1.13a)$$

jest równaniem warunkującym ciągłość przemieszczeń na podporze 1. Analogiczne rozważania dla punktów 2 i 3 dają dwa dalsze równania w postaci:

$$a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,0} = 0. \quad (1.13b)$$

$$a_{3,1}X_1 + a_{3,2}X_2 + a_{3,3}X_3 + a_{3,0} = 0. \quad (1.13c)$$

W ten sposób sformułowany układ równań tzw. równań Maxwella—Mohra jest biorąc formalnie rozwiązaniem postawionego zadania. Aby jednak miał on wartość praktyczną, musimy określić współczynniki a . To ostatnie zadanie jest powtórzeniem rozważań art. 1.2 i polega na określeniu pracy sił wewnętrznych wywołanych obciążeniem jednostkowym (wskaźnik pierwszy) na odkształceniach spowodowanych obciążeniem jednostkowym (wskaźnik drugi). Zauważmy ponadto, iż zawsze słuszna jest zależność

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad (1.14)$$

wynikająca z zasady wzajemności przesunięć (1.7). Dzięki temu ulega redukcji liczba obliczanych współczynników.

Ponieważ rozważana konstrukcja (rys. 1.11) jest konstrukcją prętową płaską, przeto uwzględniając wnioski z przykładu (art. 1.2) mamy według wzoru (1.11a)

$$a_{i,j} = \int_l \frac{m_i m_j}{EJ} dx, \quad a_{i,i} = \int_l \frac{m_i^2}{EJ} dx, \quad a_{i,0} = \int_l \frac{M m_i}{EJ} dx. \quad (1.15)$$

Tak na przykład

$$\begin{aligned} a_{1,3} = & \int_0^{a_1} \frac{(b_1 x/l)(b_3 x/l)}{EJ} dx + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\left[\frac{b_1}{l} x - (x - a_1) \right] \left(\frac{b_3}{l} x \right)}{EJ} dx + \\ & + \int_{a_2}^l \frac{\left[\frac{b_1}{l} x - (x - a_1) \right] \left[\frac{b_3}{l} x - (x - a_2) \right]}{EJ} dx, \end{aligned}$$

skąd po wykonaniu całkowań

$$a_{1,3} = a_{3,1} = \frac{a_1 b_3 [a_3(l + b_3) - a_1^2]}{6lEJ}.$$

Analogicznie można obliczyć

$$a_{i,i} = \frac{(a_i b_i)^2}{3lEJ}$$

Współczynniki $a_{i,i}$, jako całki z kwadratów funkcji, są zawsze dodatnie, natomiast współczynniki $a_{i,j}$ ($i \neq j$) mogą być ujemne, dodatnie lub równe zero. Należy podkreślić, iż wyznacznik charakterystyczny układu* (1.13) jest zawsze dodatni, a więc układ równań

* Dowód tego Czytelnik może znaleźć w: Biezeno Grammel, *Technische Dynamik*, 1939, Springer Verlag, str. 89.

ma zawsze jedno rozwiązanie. Współczynniki obliczone według wzorów (1.15) mają bardzo małe wartości, co jest w rachunkach niewygodne. Dlatego zazwyczaj mnożymy wszystkie współczynniki i wyrazy wolne przez stałą wartość (np. przez E). Miana współczynników przy niewiadomych są takie, że rezultat, tj. siły X_1 , X_2 , X_3 , otrzymujemy zawsze we właściwych wymiarach. W omawianym przykładzie m_i , m_j mają wymiar kGcm/kG, a zatem mianem $\alpha_{i,j}$ jest cm/kG, podczas gdy $\alpha_{i,0}$ ma wymiar cm, gdyż $M(x)$ jest w kGcm. W rezultacie wymiarem X_1 , X_2 , X_3 jest kG.

Wybrany przez nas przykład układania równań Maxwella—Mohra należy do najprostszych. W przypadkach bardziej złożonych metoda postępowania pozostaje ta sama, a jej etapy są następujące:

1. *Zamiana ustroju na statycznie wyznaczalny z wprowadzeniem wielkości statycznie niewyznaczalnych i określeniem ich liczby* (rys. 1.11b).

2. *Podział obciążenia statycznie wyznaczalnej konstrukcji na stany: zerowy i stany kolejnego obciążenia siłami jednostkowymi* (rys. 1.11c).

3. *Sformułowanie układu równań Maxwella—Mohra z warunku ciągłości przemieszczeń.*

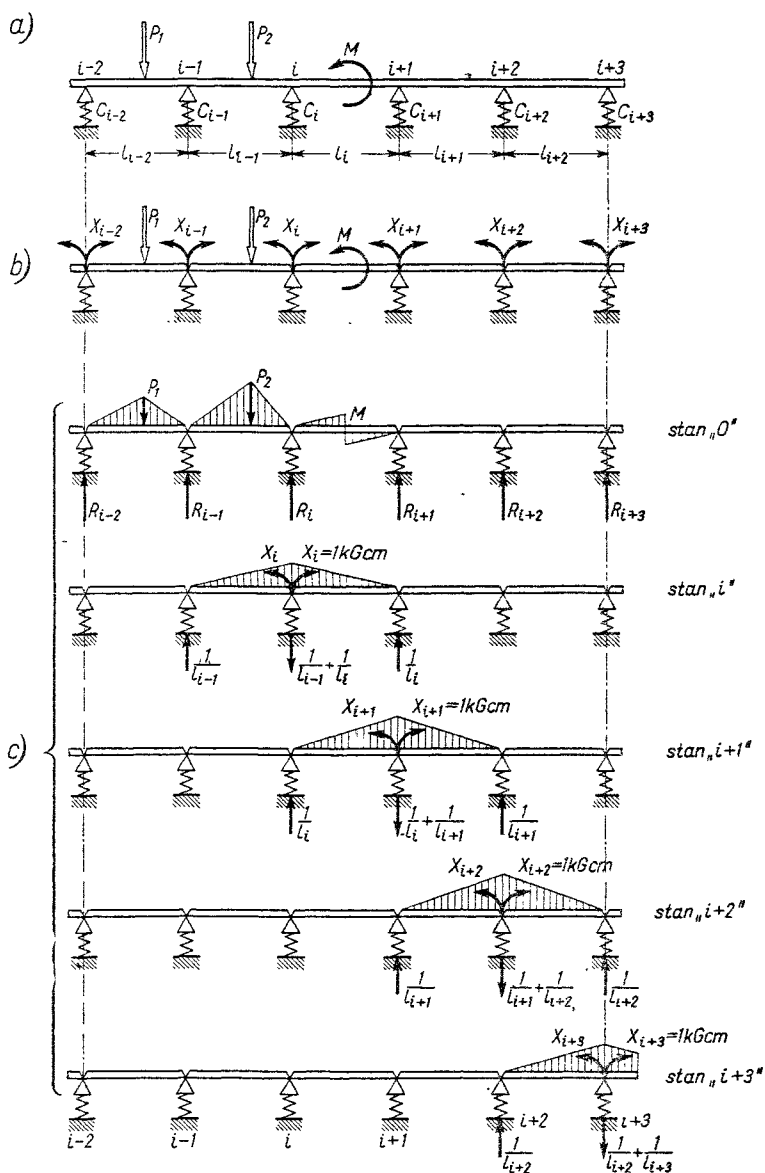
4. *Wyznaczenie współczynników równań według jednolitego schematu i rozwiązania układu.*

Należy podkreślić, że trud sformułowania równań Maxwella—Mohra w postaci (1.13) jest minimalny i polega na zsumowaniu składowych przemieszczeń zachodzących w tym samym punkcie i w tym samym kierunku. Niepotrzebne jest przy tym analizowanie zgodności zwrotów przemieszczeń, gdyż odpowiedź na to daje wzór (1.11), do którego siły wewnętrzne wstawiamy z jednakowymi bądź przeciwnymi znakami. W zależności od tego, czy mają one w danym punkcie osi preta zwroty zgodne czy przeciwnie. Aby przy tym nie popełnić błędu, można te zwroty zaznaczać jak podano w przykładzie (art. 1.2).

1.4. Uwagi o równaniach M—M. Reguła zamiany stanu „0”

Przykład belki ciągłej (rys. 1.11) prowadzący do równań (1.13) jest formalnie biorąc rozwiązany prawidłowo. Z punktu widzenia jednak zastosowania praktycznego rozwiązanie to pozostawia wiele do życzenia. Rozpatrując bowiem wynik końcowy, tj. wypadkowy wykres momentów gnących (rys. 1.11d), widzimy, że jest on różnicą dwóch dużych i bliskich sobie wartości. Aby więc rezultat ten miał znaczenie praktyczne, wszystkie rachunki muszą być prowadzone z dużą dokładnością przy użyciu maszyn. Drugą okolicznością, która wystąpiłaby wyraźniej przy dużej liczbie niewiadomych X jest to, że każde z równań (1.13) zawiera wszystkie niewiadome. Fakt ten nie jest groźny, gdy liczba równań M—M jest dwa lub trzy. Jeśli jednak jest ich kilkadziesiąt, to rozwiązanie zadania staje się problemem rachunkowym nie pozwalającym na szybkie wyciągnięcie wniosków praktycznych. W wyniku mamy więc dwa postulaty, a mianowicie:

1. *Charakter wielkości statycznie niewyznaczalnych należy tak dobierać, aby w każdym z równań M—M występowała możliwie mała liczba niewiadomych.*



2. Dobór układu zerowego musi być taki, aby przebieg sił wewnętrznych tego układu zbliżał się do rzeczywistego ich przebiegu, to jest, aby statycznie niewyznaczalne wielkości były możliwie małe i nosiły charakter tylko małych poprawek.

Zastosowanie pierwszego postulatu omówimy na przykładzie belki ciągłej zakładając dla ogólności, że podpory są sprężyste podatne na przesunięcia pionowe (współczynnik sztywności C [kG/cm]) (rys. 1.12a).

Zamiany tej belki na układ statycznie wyznaczalny dokonujemy rozeinając belkę na podporach i wprowadzając w tych myślowych przecięciach momenty oddziaływania X_{i-1} , X_i , X_{i+1} jednego przekroju belki na drugi. Biorąc pod uwagę wzór (c) z art. 1.2 określamy, iż współrzędną uogólnioną, odpowiadającą sile uogólnionej X , jest względny obrót przekrojów schodzących się na danej podporze albo inaczej kąt załomu linii ugięcia w tym przekroju. Pisząc zatem równanie $M-M$ dla i -tej podpory, wyrażające warunek, aby sumaryczny załom wywołany obciążeniami $P_1, P_2, \dots, M, \dots, X_{i-3}, X_{i-2}, X_i$ itd. był równy zeru, otrzymujemy

$$a_{i,1}X_1 + \dots + a_{i,i-3}X_{i-3} + a_{i,i-2}X_{i-2} + a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + \dots + a_{i,k}X_k + a_{i,0} = 0.$$

W równaniu powyższym uwzględniliśmy wszystkie niewiadome poczynawszy od X_1 , a skończywszy na ostatniej X_k . Łatwo jednak zauważyć (rys. 1.12c), że $a_{i,j} = 0$, gdy $j \geq i+3$. Nie ma bowiem ani jednego elementu konstrukcji statycznie wyznaczalnej, w którym obciążenia $X_i = 1$ kGcm (stan „ i ”) i $X_{i+3} = 1$ kGcm (stan „ $i+3$ ”) wywoływałyby jednocześnie siły wewnętrzne różne od zera. Wobec tego wszystkie wyrażenia podcałkowe we wzorze (1.11) są tożsamościowo równe zeru, to zaś daje $a_{i,i+3} = 0$, jak również $a_{i,j} = 0$, gdy $j > i+3$. Fizycznie oznacza to, że układ X_j ($j > i+3$) nie wpływa na załom na i -tej podporze. To samo stwierdzenie dotyczy niewiadomych X_j na lewo od podpory i , a mianowicie: $a_{i,j} = 0$, jeśli $j \leq i-3$. Wynika stąd, że w równaniu $M-M$ występować będzie tylko pięć kolejnych niewiadomych X_{i-2} , X_{i-1} , X_i , X_{i+1} , X_{i+2} , to jest

$$a_{i,i-2}X_{i-2} + a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,i+2}X_{i+2} + a_{i,0} = 0 \quad (1.16)$$

i dlatego równanie to nosi nazwę równania 5 momentów.

Aby równanie (1.16) miało sens praktyczny, potrzeba podać wyrażenia dla współczynników a . Najłatwiej określić $a_{i,i-2}$ i $a_{i,i+2}$, gdyż jedynymi elementami, w których pojawiają się jednocześnie siły wewnętrzne od $X_i = 1$ kGcm i $X_{i+2} = 1$ kGcm (lub $X_{i-2} = 1$ kGcm) są elementy sprężyste podpory ($i+1$) lub ($i-1$). Przemieszczenie $a_{i,i+2}$ jest według art. 1.2 równe liczbowo pracy siły ściskającej $1/l_i$, wywołanej przez $X_i = 1$ kGcm na skróceniu $1/C_{i+1}l_{i+1}$ wywołanym przez $X_{i+2} = 1$ kGcm.

W wyniku

$$a_{i,i+2} = \frac{1}{C_{i+1}l_i l_{i+1}} \quad 1/\text{kGcm}.$$

Podobnie

$$a_{i,i-2} = \frac{1}{C_{i-1}l_{i-2}l_{i-1}} \quad 1/\text{kGcm}$$

przedstawia kąt załomu na podporze i -tej (w radianach na kGcm) wywołany obciążeniami $X_{i-2} = 1$ kGcm.

Analogicznie obliczamy pozostałe współczynniki otrzymując w wyniku:

$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-2} &= \frac{1}{C_{i-1}l_{i-2}l_{i-1}}, \\ a_{i,i-1} &= \frac{l_{i-1}}{6EJ_{i-1}} - \frac{1}{C_{i-1}l_{i-1}l_i} \left(1 + \frac{l_i}{l_{i-1}}\right) - \frac{1}{C_{i-1}l_{i-2}l_{i-1}} \left(1 + \frac{l_{i-2}}{l_{i-1}}\right), \\ a_{i,i} &= \frac{l_{i-1}}{3EJ_{i-1}} + \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{1}{C_{i-1}l_{i-1}^2} + \frac{1}{C_i l_i^2} \left(1 + \frac{l_i}{l_{i-1}}\right)^2 + \frac{1}{C_{i+1}l_i^2}, \\ a_{i,i+1} &= \frac{l_i}{6EJ_i} - \frac{1}{C_{i+1}l_i l_{i+1}} \left(1 + \frac{l_{i+1}}{l_i}\right) - \frac{1}{C_i l_{i-1}l_i} \left(1 + \frac{l_{i-1}}{l_i}\right); \\ a_{i,i+2} &= \frac{1}{C_{i+1}l_i l_{i+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Wyraz wolny $a_{i,0}$ przedstawia załom na i -tej podporze w stanie „0”. Jeśli więc $\theta_{B,i-1}$ i $\theta_{A,i}$ są kątami ugięcia przęseł l_{i-1} i l_i na podporze i -tej w przypadku podpór absolutnie sztywnych, to po uwzględnieniu podatności podpór mamy

$$a_{i,0} = \theta_{B,i-1} + \theta_{A,i} + \frac{R_{i-1}}{C_{i-1}l_{i-1}} - \frac{R_i}{C_i l_i} \left(1 + \frac{l_i}{l_{i-1}}\right) + \frac{R_{i+1}}{C_{i+1}l_i}, \quad (1.18)$$

gdzie R_{i-1} , R_i , R_{i+1} oznaczają reakcje na odpowiednich podporach w stanie „0”. Jeśliby na przykład siły P_1 , P_2 działały pośrodku przęseł l_{i-1} , l_{i-2} , to

$$R_i = 0,5P_2 + (M/l_i), \quad R_{i+1} = -M/l_i, \quad R_{i-1} = 0,5(P_1 + P_2)$$

W szczególnym przypadku podpór absolutnie sztywnych ($C_1 = C_2 = \dots = \infty$) i stałej sztywności EJ belki, równanie (1.16) przechodzi w powszechnie znane równanie trzech momentów

$$X_{i-1}l_{i-1} + 2X_i(l_{i-1} + l_i) + X_{i+1}l_i = -6EJ(\theta_{B,i-1} + \theta_{A,i}) \quad (1.19)$$

Nie wdając się w dalszą analizę równania ciągłości (1.16) stwierdzamy, że postać układu (rys. 1.13) jest stosunkowo prosta, a sam układ można rozwiązać przy użyciu suwaka logarytmicznego.

Ten pomyślny wynik zawdzięczamy temu, że działanie każdej z niewiadomych X zamyka się w obrębie części konstrukcji (dwa sąsiednie przęsła). Podobny dobór niewiadomych można zastosować w konstrukcjach wykazujących tzw. budowę segmentową (rozdz. 4, 5 i 8). Przedstawiona metoda spełnia w pewnej mierze również drugi postulat, o ile tylko sztywności C podpór nie są zbyt małe. Występuje to szczególnie wyraźnie w przypadku podpór sztywnych (równanie trzech momentów). Przykłady liczbowe wykazują, iż korekta wprowadzona przez momenty X rzadko kiedy przekracza 30% maksymalnej wartości momentu w stanie „0”.

Znaczną redukcję wartości statycznie niewyznaczalnych można otrzymać, jeśli już w stanie „0” wprowadzić „a priori” pewne wartości sił statycznie niewyznaczalnych. Weźmy dla przykładu belkę statycznie niewyznaczalną (rys. 1.14a), której przewidywany kształt linii ugięcia wykazuje istnienie punktu przegięcia na pewno między punktami $\bar{A}$ i C . Obierzmy zupełnie dowolnie ten punkt, na połowie odległości między A i C . Z wa-

a)	niew. równ.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
		I	0	0	0	—	—	—	—
		II	0	0	0	0	—	—	—
		III	0	0	0	0	0	—	—
		IV	—	0	0	0	0	0	—
		V	—	—	0	0	0	0	—
		VI	—	—	—	0	0	0	0
		VII	—	—	—	—	0	0	0
		VIII	—	—	—	—	—	0	0

b)	niew. równ.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
		I	0	0	—	—	—	—	—
		II	0	0	0	—	—	—	—
		III	—	0	0	0	—	—	—
		IV	—	—	0	0	0	—	—
		V	—	—	—	0	0	0	—
		VI	—	—	—	—	0	0	0
		VII	—	—	—	—	—	0	0
		VIII	—	—	—	—	—	—	0

Rys. 1.13. Symboliczne przedstawienie równań 5 i 3 momentów dla belki 9-cio przęsłowej. Kółka oznaczają występowanie danej niewiadomej w równaniu. Równania I, II, VII i VIII mają postać skróconą, gdyż $X_{-1} = X_{-1} = X_0 = X_9 = X_{10} = X_{11} = 0$.

runku, że w punkcie przegięcia $M = 0$, otrzymamy reakcję $R = P/3$. Jeśli więc przyjmiemy, że stan „0” składa się z dwóch sił P i R (rys. 1.14c), to równanie $M-M$ dla siły X przedstawiającej tym razem nie całą reakcję podpory B , lecz tylko korektę założonej „a priori” wartości R ma postać

$$\alpha_{1,1}X + \alpha_{1,0} = 0,$$

gdzie według przykładu (art. 1.2)

$$\alpha_{1,1} \approx \frac{ll}{2} \frac{2}{3} l \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\alpha_{1,0} \approx \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \frac{5}{6} l \frac{1}{EJ} - \frac{Pl}{3} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{EJ} = -\frac{Pl^3}{144EJ}.$$

Obliczona stąd siła $X = P/48$ ma wartość 15-krotnie mniejszą, niż siła $X = 5P/16$, którą otrzymalibyśmy stosując normalny sposób postępowania.

Rys. 1.14. Wprowadzanie „a priori” do stanu „0” wartości sił działających na zbędnej podporze

jakąkolwiek inną wartość R' i obliczyć odpowiednią wartość X' . Analogicznie możemy postąpić w przypadku każdej innej konstrukcji, otrzymując w wyniku tzw. *regulę zamiany stanu* „0” głoszącą, iż w danej konstrukcji statycznie niewyznaczalnej jako stan „0” można

przyjąć każdy dowolny układ sił wewnętrznych spełniający warunki równowagi i statyczne warunki podporowe. Pod tym ostatnim określeniem rozumiemy spełnienie warunków na brzegach (podporach) narzuconych w danym zagadnieniu w postaci sił. Takim warunkiem w zadaniu (rys. 1.14) było na przykład to, iż na końcu B moment gnący jest, a na podporze A może nie być równy zeru. Podana podstawowa reguła jest często stosowana w analizie wszystkich statycznie niewyznaczalnych konstrukcji (patrz rozdz. 4, 5, 8).

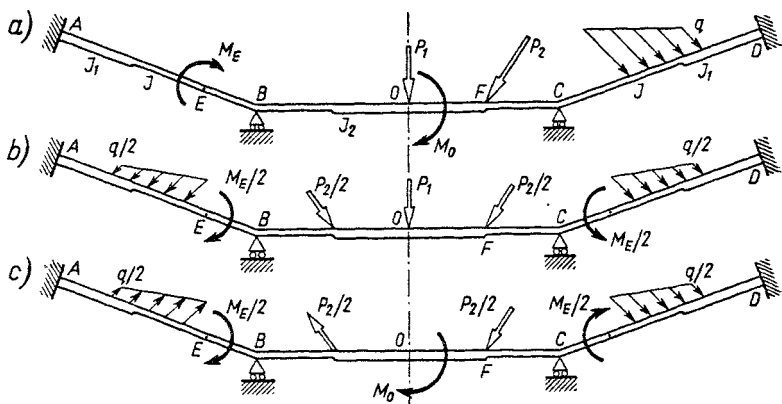
1.5. Zasada jednoznaczności rozwiązania

W wielu zagadnieniach statyki konstrukcji duże uproszczenia można osiągnąć korzystając z zasady jednoznaczności rozwiązania głoszącej, że jeśli dane ciało sprężyste unieruchomione jest w sposób wykluczający jego przemieszczenia jako ciała sztywnego, to dane obciążenie wywołuje w nim jeden i tylko jeden stan napieć i przemieszczeń*. Jeśli więc w ustroju statycznie wyznaczalnym dobrany bez żadnych rachunków (na chybił trafił) układ sił wewnętrznych spełnia wraz z danym obciążeniem wymagane warunki równowagi, to z zasady jednoznaczności wynika, że taki układ jest jednocześnie prawidłowym rozwiązaniem zagadnienia. Jak się okaże (patrz art. 2.8) takie sprawdzenie może być niekiedy wynikiem samego tylko rozumowania bez jakichkolwiek obliczeń, wobec czego powyższy wniosek ma duże znaczenie praktyczne. Ten sam wniosek dotyczy również ustrojów statycznie niewyznaczalnych z tą tylko różnicą, iż sprawdzenie dobrego na chybił trafił układu sił wewnętrznych polegać musi nie tylko na sprawdzeniu równowagi, lecz również na sprawdzeniu ciągłości przemieszczeń między wszystkimi elementami ustroju.

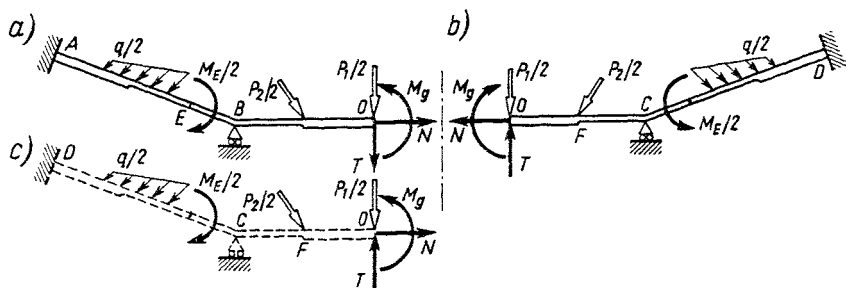
W przypadku, gdy ustrój statycznie niewyznaczalny ma oś lub płaszczyznę symetrii**, zasada jednoznaczności bardzo ułatwia obliczenie sił wewnętrznych. Zauważmy bowiem, iż ustrój taki stanowi zespół dwóch identycznych konstrukcji (połówek) połączonych w płaszczyźnie symetrii. Dzieląc obciążenie takiej konstrukcji na obciążenie symetryczne i antysymetryczne (rys. 1.15), a następnie prowadząc w płaszczyźnie symetrii przekrój i wstawiając w nim wszystkie siły wewnętrzne, jakie w tym przekroju mogą się pojawić (w przypadku płaskiego układu M_g , T , N), stosujemy do każdej z połówek zasadę jednoznaczności rozwiązania. Wykonawszy te czynności (rys. 1.16 i 1.17) widzimy, że dla obciążenia symetrycznego (rys. 1.16) siła T istnieć nie może, w przypadku zaś obciążenia antysymetrycznego (rys. 1.17) nie mogą istnieć ani M_g , ani N . To rozważanie prowadzi do reguły, że w konstrukcji symetrycznej symetrycznie (antysymetrycznie) obciążonej w przekroju na osi symetrii mogą istnieć tylko te oddziaływania, które będąc zgodne z zasadą działania i oddziaływania stanowią (nie stanowią) zwierciadlane odbicie jedne drugich.

* Twierdzenie to określa skutek, jaki wywołuje dane obciążenie, natomiast nie ma tu mowy o całkowitych naprężeniach, które mogą być zmienione przez naprężenia własne, pojawiające się np. na skutek błędów montażowych. Dowód zasady jednoznaczności rozwiązania podany jest u Hubera, *Teoria Sprężystości* cz. I, Warszawa 1954, PWN, str. 110.

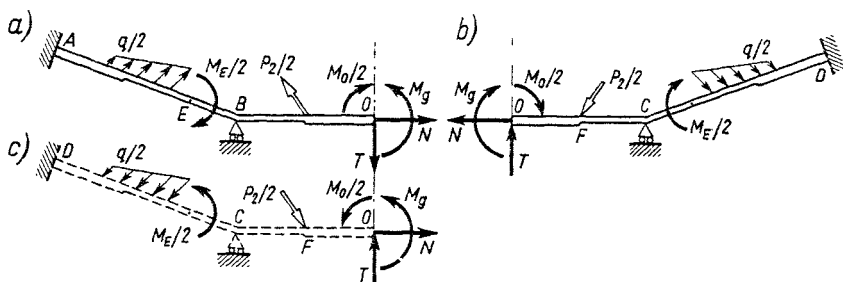
** Konstrukcję uważamy za symetryczną tylko wtedy, gdy nie tylko kształt jej jest symetryczny, lecz gdy oprócz tego elementy symetryczne mają identyczne sztywności.



Rys. 1.15. Przykład rozdziału ogólnego obciążenia konstrukcji symetrycznej na obciążenie symetryczne (b) i antysymetryczne (c)

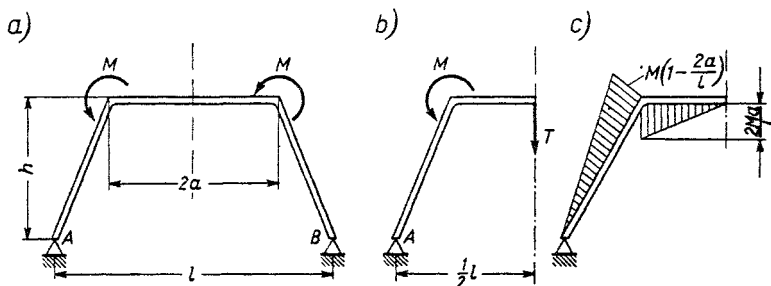


Rys. 1.16. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu symetrycznym
a), b) rozcięte części z rys. 1.15b z wprowadzonymi oddziaływaniami, które mogą, ale nie muszą istnieć; c) konstrukcja z b) odwrócona do pokrycia się z konstrukcją z a). Widać, że jest to taka sama konstrukcja identycznie obciążona, a stąd siły wewnętrzne w płaszczyźnie symetrii muszą być takie same. Stąd $T = -T$ i wreszcie $T = 0$.



Rys. 1.17. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu antysymetrycznym
a) i b) rozcięte części konstrukcji z rys. 1.15c z wprowadzonymi oddziaływaniami, które mogą, ale nie muszą istnieć;
c) konstrukcja z rys. b odwrócona do pokrycia się z konstrukcją z a). Widać, że jest to ta sama konstrukcja, ale odwrotnie obciążona, więc siły wewnętrzne też muszą zmienić znak. Warunek ten spełnia tylko T , stąd wniosek, że $N = 0$, $M_g = 0$, a T może nie równać się zero.

Korzyści, jakie ta reguła daje, widać od razu z rys. 1.16 i 1.17, a mianowicie przy ogólnym obciążeniu (rys. 1.15a) jest pięć wielkości statycznie niewyznaczalnych, natomiast przy obciążeniu symetrycznym tych niewiadomych jest trzy, a przy antysymetrycznym dwie. Prowadzi to do znacznie prostszych układów równań $M-M$. W niektórych przypadkach przy zastosowaniu przytoczonej reguły można rozwiązać zadania

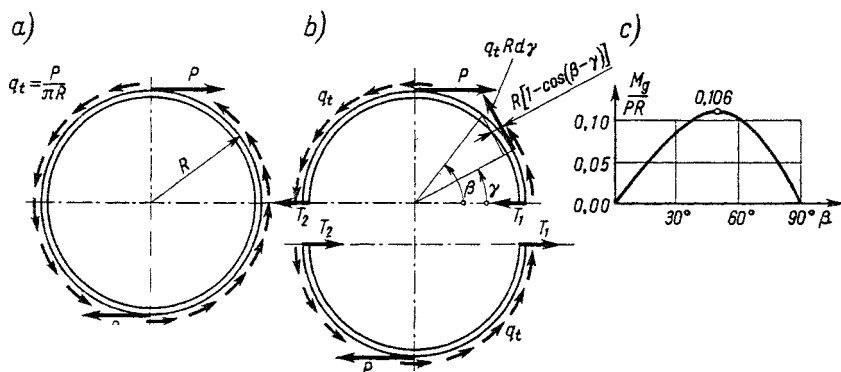


Rys. 1.18. Przykład rozwiązania ramy

statycznie niewyznaczalne posługując się tylko równaniami równowagi. Weźmy na przykład ramę (rys. 1.18), w której siłę T wyznaczymy z warunku równowagi momentów względem punktu A (rys. 1.18b), a mianowicie

$$T = \frac{2M}{l}, \quad (a)$$

skąd już można określić przebieg momentów gnących (rys. 1.18c). Podobnie dla pierścienia kołowego (rys. 1.19) rozcięcie wzdłuż średnicy poziomej i przeprowadzenie rozumowania

Rys. 1.19. Przykład rozwiązania pierścienia. Obciążenie parą sił: $2PR$, zrównoważone obciążeniem równomiernie rozłożonym $q_t = P/\pi R$. Jednostką rzędnych na rys. c jest PR .

identycznego jak na rys. 1.17 daje zależność $T_1 = T_2$. Z równania równowagi rzutów na oś poziomą mamy

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \approx 0,182P. \quad (b)$$

Moment gnący w dowolnym przekroju $\left(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$$M_g = \int_0^\beta q_t R d\gamma R[1 - \cos(\beta - \gamma)] - T_1 R \sin \beta = \frac{PR}{2} \left(\sin \beta - \frac{2}{\pi} \right) \quad (c)$$

ma przebieg podany na rys. 1.19c.

1.6. Linie wpływowe. Sposób budowy i zastosowania

W niektórych ustrojach, zwłaszcza dźwignicach, obciążenie zewnętrzne może zmieniać wartość i położenie na konstrukcji, pociągając za sobą zmianę wartości sił wewnętrznych, odkształceń itp. Przejrzysty obraz zmian interesujących nas wielkości otrzymujemy stosując specjalne wykresy, tzw. *linie wpływowe*.

Sposób budowy linii wpływowych opiszemy na przykładzie belki (rys. 1.20) obciążonej siłą $P = 1$ kG mogącą przesuwac się wzdłuż całej rozpiętości. W obranym przekroju $A-A$ obliczamy wielkości sił wewnętrznych t kG/kG i m_g kGem/kG w funkcji współrzędnej c . Uwzględniając, że dodatnie zwroty tych sił są takie jak na rys. 1.20b, mamy:

$$t = -1 \text{ kG/kG}; \quad m_g = -(a-c) \text{ kGem/kG}, \quad \text{gdy} \quad 0 \leq c \leq a; \quad (a)$$

$$t = 0 \text{ kG/kG}, \quad m_g = 0 \text{ kGem/kG}, \quad \text{gdy} \quad a \leq c \leq l. \quad (b)$$

W celu najprostszego przedstawienia wzorów (a) i (b) odkładamy interesujące nas wielkości (t , m_g) jako rzędne wykresu, w którym odciętą jest wielkość c , czyli współrzędna określająca każdorazowe położenie jednostkowej siły obciążającej. Wykresy te (rys. 1.20c i d) nazywamy liniami wpływowymi odpowiedniej wielkości fizycznej w danym przekroju $A-A$. Pełne więc określenie linii wpływowej zawiera zawsze dwie informacje — pierwszą dotyczącą przedstawionej wielkości fizycznej, drugą określającą przekrój (bądź ogólnie biorąc element) konstrukcji, w którym ta wielkość fizyczna występuje.

Analogiczne linie wpływowe można wykreślić i dla innych przekrojów rozważanej belki (rys. 1.20a). W wyniku otrzymamy szereg linii wpływowych, które można nanieść na jeden rysunek (rys. 1.21).

Jako drugi przykład o dużym praktycznym znaczeniu omówimy wyznaczenie linii wpływowych reakcji podpór sił tnących i momentów gnących dla belki z wysięgnikami (rys. 1.22). Linie wpływowe dla reakcji r_A i r_B

$$r_A = \frac{l-c}{l} \text{ kG/kG}, \quad r_B = \frac{c}{l} \text{ kG/kG}, \quad (-b_A \leq c \leq l+b_B) \quad (c)$$

otrzymujemy jako dwie linie proste (rys. 1.22b) przechodzące przez wskazane punkty charakterystyczne ($c = 0$; $c = l$). Linie wpływową siły tnącej t w przekroju K (rys. 1.22c) otrzymujemy z wzorów (rys. 1.20b):

$$\left. \begin{aligned} t &= r_A, & \text{gdy} & \quad c > a_K; \\ t &= -r_B, & \text{gdy} & \quad c < a_K. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Ta postać linii wpływowej (łamana $C_1K_1K_2D_1$) jest słuszna dopóty, dopóki punkt K znajduje się między podporami A i B . Jeśli punkt K znajduje się na jednym z wysięgników, to postać linii wpływowej podaje dolny rys. 1.22c.

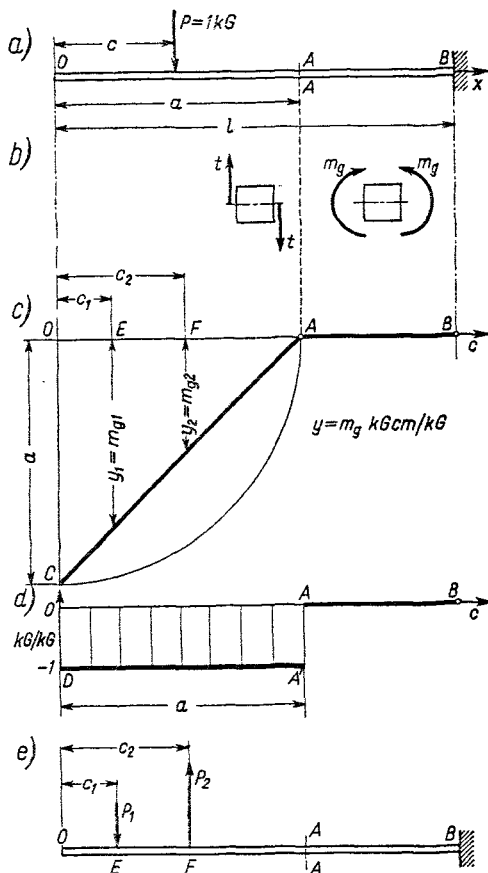
Linie wpływową momentu zginającego m_g w przekroju K wyznaczamy z następujących zależności:

$$\left. \begin{aligned} m_g &= \frac{c(l-a_K)}{l}, & \text{gdy} & \quad c < a_K; \\ m_g &= \frac{(l-c)}{l} a_K, & \text{gdy} & \quad c > a_K. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

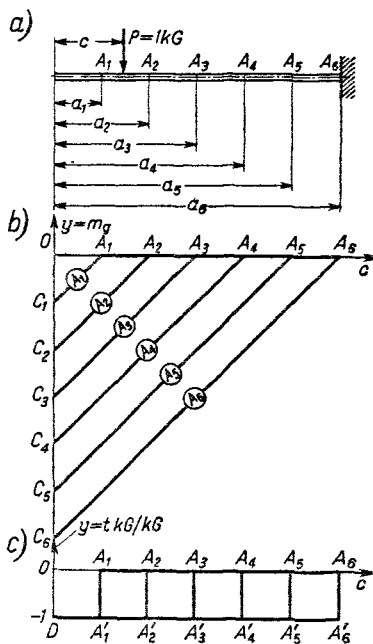
Z obydwu wzorów (e) wynika, że gdy $c = a_K$, to

$$m_g = \frac{a_K(l-a_K)}{l} \text{ kGcm/kG.} \quad (f)$$

Uwzględniając umowę z rys. 1.20b, obraz linii wpływowej otrzymamy prowadząc proste przez punkty określone z wzorów (e) dla $c = 0$ i $c = l$. Stosując następnie ograniczenia podane w tych wzorach,



Rys. 1.20. Przykład budowy linii wpływowych
b) dodatnie zwroty sił wewnętrznych; c) CAB – linia wpływowa momentu gnącego w przekroju $A-A$; d) $DA A'B$ – linia wpływowa siły tnącej w przekroju $A-A$; e) obciążenie złożone.



Rys. 1.21

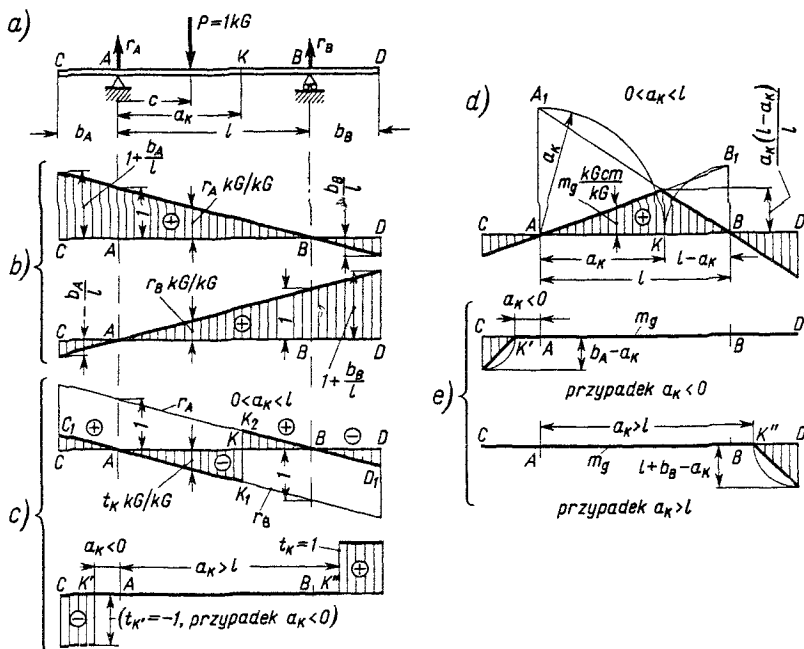
zaznaczamy linię wpływową grubą linią (rys. 1.22d). Podobnie jak w przypadku sił tnących, ta postać linii wpływowej jest słuszną, gdy punkt K znajduje się między podporami. Jeśli punkt K znajduje się poza nimi, to postacie linii wpływowych podaje rys. 1.22e.

W podanych przykładach obrazem linii wpływowych były odcinki prostych lub linie łamane. Istnieją jednak przypadki, gdy obrazem linii wpływowej jest krzywa. Do tych przypadków należą z reguły wpływowe sił wewnętrznych w ustrojach statycznie niewyznaczalnych oraz linie wpływowe odkształceń

w konstrukcjach zarówno statycznie wyznaczalnych jak i niewyznaczalnych. Tak na przykład stawiając zadanie wyznaczenia linii wpływowej ugięcia w końcu O belki wspornikowej (rys. 1.23a) otrzymujemy wynik

$$w = \frac{f}{P} = \frac{(l-c)^3}{3EJ} + \frac{(l-c)^2}{2EJ}c = \frac{(l-c)^2(2l+c)}{6EJ}, \quad (g)$$

podany w bezwymiarowej postaci na rys. 1.23b. Podobnie można określić linie wpływowe ugięć w innych przekrojach (A_1 , A_2 , A_3).



Rys. 1.22. Linie wpływowe reakcji podpór (b, e) sił tnących (c, d), momentów giących (e, f) belki z wysięgnikami

Podsumowując: budowa linii wpływowej polega na sformułowaniu wzorów określających szukaną wielkość w funkcji położenia jednostkowej siły obciążającej i przedstawieniu tych wzorów na wykresie, w którym odcięta jest położenie tej siły jednostkowej.

Pierwszym zastosowaniem linii wpływowych jest wyznaczanie skutku wywołanego działaniem złożonego obciążenia. Jeśli jako przykład ilustrujący to zastosowanie wziąć belkę (rys. 1.20a), to zauważmy przede wszystkim, iż przy działaniu dowolnej siły $P \neq 1 kG$, siły wewnętrzne T , M_g są

$$T = tP \text{ kG}, \quad M = m_g P \text{ kGcm}. \quad (1.20)$$

Jeśli w punktach E i F (rys. 1.20e) działają siły P_1 do dołu i P_2 do góry, to z zasady superpozycji wynika, że całkowity moment w przekroju $A-A$ wynosi

$$P_1 m_{g1} - P_2 m_{g2} = P_1 y_1 - P_2 y_2.$$

W przypadku działania n sił $P_1, P_2, \dots, P_n$ w punktach o odciętych $c_1, c_2, \dots, c_n$ otrzymujemy, że jakąkolwiek wielkość fizyczna Y wyraża się wzorem

$$Y = \sum_{i=1}^n P_i y_i, \quad (1.21)$$

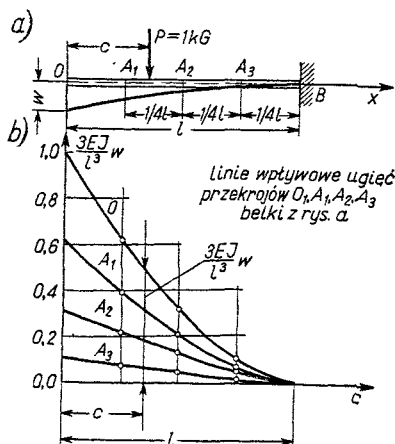
gdzie y_i — rzędna linii wpływowej tej wielkości fizycznej odpowiadająca odciętej c_i . W przypadku działania obciążenia ciągłego $q(c)$ (rys. 1.24a) traktujemy to obciążenie jako jednoczesne działanie nieskończenie wielu sił $q(c) dc$. W rezultacie we wzorach (1.21) zamiast sumy otrzymamy całkę, tj.

$$Y = \int_{c_1}^{c_2} q(c) y(c) dc, \quad (1.22)$$

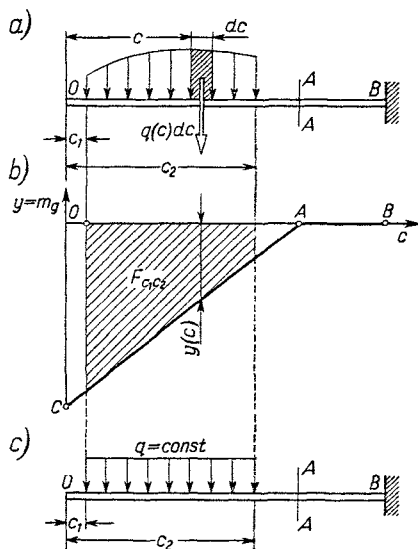
gdzie $y(c)$ — rzędna linii wpływowej odpowiadająca odciętej c . W przypadku gdy obciążenie ciągłe jest stałe (rys. 1.24c), wzór (1.22) przyjmuje postać

$$Y = q \int_{c_1}^{c_2} y(c) dc = qF_{c_1, c_2}, \quad (1.23)$$

gdzie F_{c_1, c_2} — pole zakreskowane na rys. 1.24b.



Rys. 1.23. Linie wpływowe ugięć belki wspornikowej



Rys. 1.24. Zastosowanie linii wpływowej w przypadku obciążenia ciągłego
a) przykład oznaczeń przy dowolnym obciążeniu ciągłym; b) przykład linii wpływowej (w danym przypadku linia wpływowa w przekroju A—A); c) przykład stałego obciążenia ciągłego.

Drugim zastosowaniem linii wpływowych jest określenie *najniebezpieczniejszego położenia obciążeń prostych lub złożonych*, przy którym szukana wielkość określona daną linią wpływową osiąga ekstremalną wartość. Jeśli na przykład badaną wielkością jest siła tnąca w przekroju K (rys. 1.22), to z rys. 1.22c widać od razu, że najniebezpieczniejsze położenie pojedynczej siły obciążającej (rzędna KK_1) odpowiada umieszczeniu tej siły tuż z lewej strony przekroju K . Nieco bardziej złożone jest zadanie, gdy obciążenie stanowi grupa sił, między którymi odstęp jest stały (przejazd wózka lub lokomotywy).

Poszukajmy na przykład takiego położenia grupy sił $P_1, \dots, P_s$, (rys. 1.25a), które da największy moment zginający w przekroju K .

W dowolnym położeniu tej grupy sił moment zginający jest

$$M_g = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_s y_s.$$

Jeśli całą grupę sił przesunąć w prawo o Δc , to przyrost momentu ΔM_g jest równy

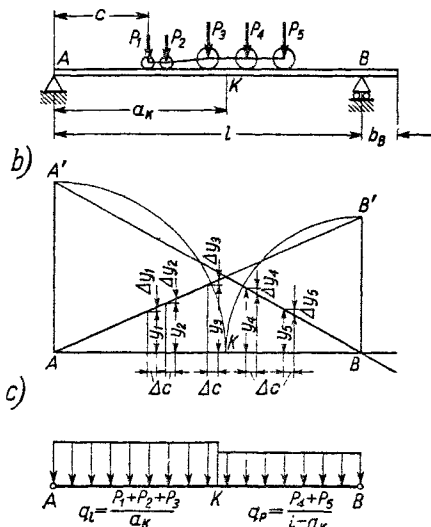
$$\Delta M_g = P_1 \Delta y_1 + P_2 \Delta y_2 + P_3 \Delta y_3 - P_4 \Delta y_4 - P_5 \Delta y_5.$$

Biorąc pod uwagę (rys. 1.25b), że

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \frac{l - a_K}{l} \Delta c, \quad \Delta y_4 = \Delta y_5 = \frac{a_K}{l} \Delta c,$$

po przekształceniach otrzymujemy

$$\Delta M_g = \frac{a_K(l - a_K)}{l} \left(\frac{P_1 + P_2 + P_3}{a_K} - \frac{P_4 + P_5}{l - a_K} \right) \Delta c. \quad (h)$$



Rys. 1.25. Wyznaczenie najniebezpieczniejszego położenia obciążenia grupowego

Jeśli wyrażenie w drugim nawiasie jest dodatnie, to przesunięcie obciążeń w prawo powiększa moment zginający. Ten przyrost trwa tak długo, dopóki siła P_3 nie przekroczy punktu K . Z tą chwilą ΔM_g wyraża się za pomocą wzoru

$$\Delta M_g = \frac{a_K(l - a_K)}{l} \left(\frac{P_1 + P_2}{a_K} - \frac{P_3 + P_4 + P_5}{l - a_K} \right) \Delta c. \quad (i)$$

Jeśli ΔM_g jest nadal dodatni, to dla otrzymania maksymalnego momentu należy jeszcze dalej przesunąć grupę obciążeń w prawo. Jeśli natomiast wyrażenie (i) staje się ujemne, to maksymalna wartość momentu odpowiada położeniu siły P_3 nad przekrojem badanym. Odwrotne rozumowanie należy przeprowadzić, gdy wyrażenie (h) jest ujemne, wtedy dla wyznaczenia najniebezpieczniejszego położenia należałoby grupę obciążeń przesunąć w lewo.

Wzór (h) można przekształcić wprowadzając zastępcze obciążenia ciągłe (rys. 1.25c), w rezultacie czego

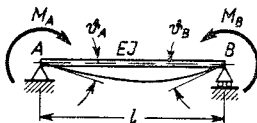
$$\Delta M_g = \frac{a_K(l - a_K)}{l} (q_l - q_p) \Delta c. \quad (k)$$

Tak więc najniebezpieczniejsze położenie grupy obciążeń zachodzi wtedy, gdy różnica zastępczych obciążeń ciągłych zmienia znak.

1.7. Zadania

1. Wyznaczyć energię odkształcenia wspornikowej belki (rys. 1.23a) obciążonej w O siłą P , jako funkcję ugięcia w tegoż punktu O . Sprawdzić słuszność wzoru (1.3).

2. Wyznaczyć energię odkształcenia belki (rys. 1.26) obciążonej niezależnymi od siebie momentami M_A i M_B , jako funkcję kątów ugięcia ϑ_A i ϑ_B na podporach. Sprawdzić słuszność wzoru (1.3).

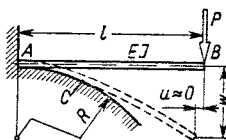


Rys. 1.26.

3. Wyznaczyć energię odkształcenia belki z zad. 2 jako funkcję momentów M_A i M_B . Wykazać słuszność twierdzenia Castigliana.

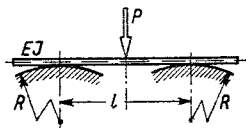
4. Traktując obciążenie momentem M_A belki z zad. 2 jako pierwszy układ sił, a M_B jako drugi układ sił sprawdzić słuszność zasady wzajemności przesunięć.

5*. Wspornikowa belka w miarę wzrostu obciążenia pionową siłą P (rys. 1.27) przylega stopniowo do podłoża o promieniu $R > (EJ/Pl)$. Wyznaczyć charakterystykę ustroju $P = f(w)$ zakładając, iż odkształcenia konstrukcji są małe.



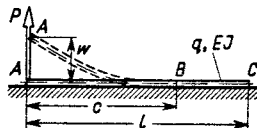
Rys. 1.27.

6*. Belka oparta na dwóch walcowych podporach (rys. 1.28) obciążona jest po środku siłą P . Wyznaczyć zależność siły P od ugięcia w środku belki $P = f(w)$ i sprawdzić stosowność wzorów (1.3) i (1.4).



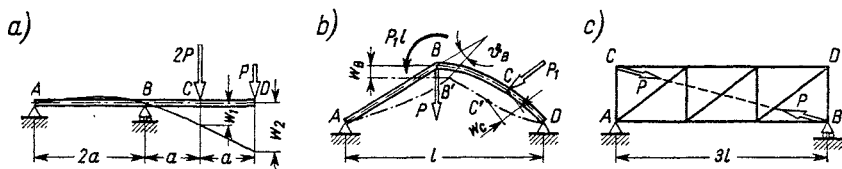
Rys. 1.28.

7*. Na lewy koniec stalowej szyny o ciężarze jednostkowym q , leżącej na sztywnym podłożu (rys. 1.29) działa skierowana pionowo do góry siła $P < 0,5 ql$ tak, iż oderwana od podłoża jest tylko część AB szyny. Określić zależność $P = f(w)$.



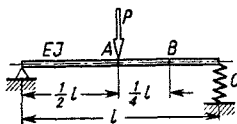
Rys. 1.29.

8. Określić liczbę sił uogólnionych i odpowiadające każdej z nich współrzędne uogólnione w podanych konstrukcjach (rys. 1.30).



Rys. 1.30.

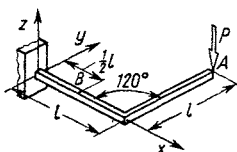
9. Obliczyć pionowe przemieszczenia punktów A i B podanej belki (rys. 1.31), jeśli $l = 4$ m, $EJ = 5 \cdot 10^9$ kGcm², $C = 200$ kG/cm, $P = 1$ t.



Rys. 1.31.

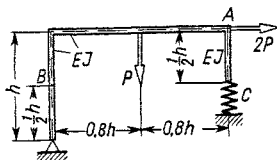
10. Wyznaczyć kąt obrotu przekroju A względem przekroju B dla belki z zad. 9.

11*. Wyznaczyć względny obrót w płaszczyźnie z przekrojów A i B konstrukcji (rys. 1.32), której ramiona mają sztywność na skręcanie $C = 8 \cdot 10^9$ kGcm², a na zginanie w kierunku prostopadłym do $xy - EJ = 4 \cdot 10^9$ kGcm². Siła $P = 1$ t, $l = 2$ m.



Rys. 1.32.

12. Wyznaczyć zmianę odległości punktów A i B podanej konstrukcji (rys. 1.33), jeśli $P = 2$ t, $h = 5$ m, $EJ = 5 \cdot 10^9$ kGcm², $C = 500$ kG/cm.

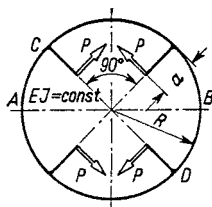


Rys. 1.33.

13. Na skutek niedokładności wykonania belka AD ramy (rys. 1.10) ma wstępną krzywiznę (promień $\rho = 20$ m) zwróconą wypukłością do dołu. Jaka wskutek tego będzie rzeczywista odległość AB w porównaniu z idealnie wykonaną konstrukcją.

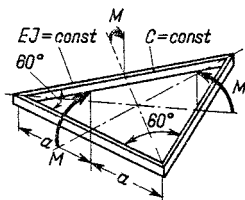
14. W belce (rys. 1.22) część AB na skutek błędnego wykonania ma wstępną krzywiznę zwróconą wklęsłością do góry. Jakie wskutek tego będzie położenie punktów K i D względem prostej AB. Dane liczbowe $l = 5$ m, $\rho = 50$ m, $a_K = 3$ m, $b_B = 2$ m.

15. Korzystając z zasady jednoznaczności rozwiązania obliczyć siły wewnętrzne w podanej konstrukcji płaskiej (rys. 1.34).



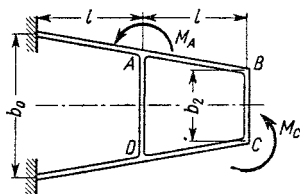
Rys. 1.34.

16. Korzystając z zasady jednoznaczności rozwiązania obliczyć siły wewnętrzne w podanej konstrukcji przestrzennej (rys. 1.35).



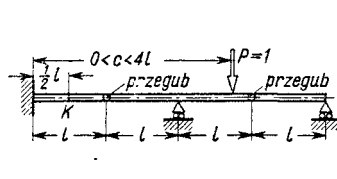
Rys. 1.35.

17. Wykorzystując symetrię budowy konstrukcji (rys. 1.36) rozdzielić zadanie wyznaczenia sił wewnętrznych na prostsze i określić w każdym z tych składowych zadań stopień statycznej niewyznaczalności.

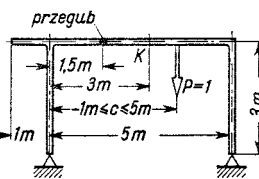


Rys. 1.36.

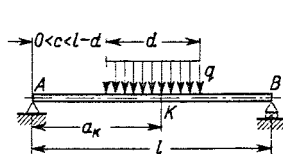
18. W podanej belce (tzw. belce Gerbera) (rys. 1.37), w przekroju K wyznaczyć linie wpływowe siły tnącej i momentu gnącego.



Rys. 1.37.



Rys. 1.38.



Rys. 1.39.

19. W oparciu o wiadomości z Wytrzymałości Materiałów wyznaczyć linie wpływowe ugięcia przekrojów K i D (rys. 1.22), jeśli $EJ = 4 \cdot 10^8 \text{ kGcm}^2$, $l = 5 \text{ m}$, $a_K = 3 \text{ m}$, $b_B = 2 \text{ m}$, $b_A = 0$.

20. Wyznaczyć najbardziej niebezpieczne, z uwagi na wartość momentu gnącego przekroju K , położenie 4-osiowego wózka (rys. 1.25), jeśli $P_1 = P_3 = 10 \text{ t}$, $P_2 = 15 \text{ t}$, $P_4 = 5 \text{ t}$, $P_5 = 0$, $l = 25 \text{ m}$, $a_K = 10 \text{ m}$, a odległość między siłami P_1 i P_2 jest 1 m , P_2 i $P_3 - 2 \text{ m}$, P_3 i $P_4 - 1 \text{ m}$.

21*. W podanej konstrukcji 3-przegubowej (rys. 1.38) wyznaczyć linie wpływowe siły tnącej i momentu gnącego w przekroju K .

22. Przy jakim położeniu c przesuwnego stałego obciążenia q (rys. 1.39) w przekroju K wystąpi ekstremalna siła tnąca, przy jakim zaś ekstremalna wartość momentu gnącego.

CZĘŚĆ PIERWSZA

KONSTRUKCJE PRĘTOWE

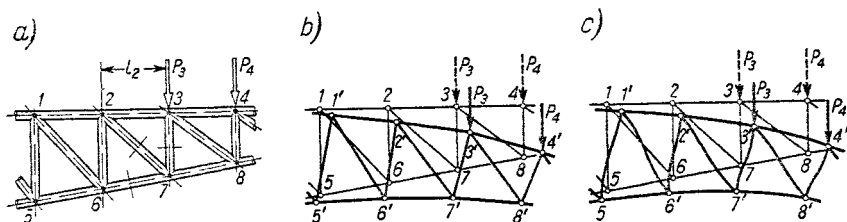
2. KRATOWNICE STATYCZNIE WYZNACZALNE

2.1. Określenia. Statyczny schemat kratownicy

Kratownice są jedną z najbardziej popularnych form rozwiązań konstrukcyjnych. Ogólnie biorąc kratownica jest konstrukcją złożoną z prętów, połączonych na swych końcach tak, że otrzymany zespół jest geometrycznie niezmienny*, nawet jeśli te połączenia prętów są przegubowe.

Układ sił zewnętrznych czynnych i biernych (reakcji) działających na kratownicę jest zazwyczaj przestrzenny, wobec czego dla otrzymania konstrukcji lekkiej i sztywnej pręty kratownicy nie powinny leżeć w jednej płaszczyźnie**. Kratownicę taką nazywamy *przestrzenną*, w odróżnieniu od kratownicy *płaskiej*, stosowanej najczęściej jako podzespół kratownicy lub ustroju przestrzennego.

Analiza wytrzymałościowa kratownicy polega na określeniu sił wewnętrznych w prętach kratownicy i określeniu jej odkształceń.



Rys. 2.1. Konstrukcja zastępcza kratownicy płaskiej

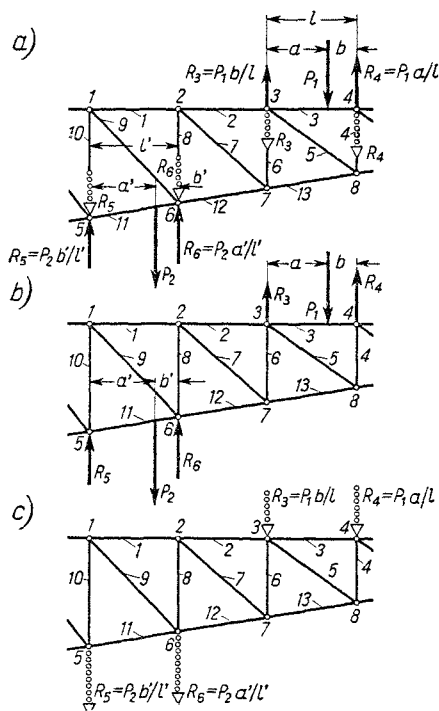
a) rzeczywiste rozwiązanie; b) konstrukcja zastępcza; c) kratownica z węzłami sztywnymi. Na rysunkach b i c linie cienkie odpowiadają kratownicy nieodkształconej, linie grube — obrazowi kratownicy po odkształceniu.

Podstawowe założenie, upraszczające analizę, polega na przyjęciu, że pręty kratownic łączą się ze sobą za pomocą idealnych przegubów. W kratownicy płaskiej przeguby te są płaskie (rys. 2.1), w kratownicy przestrzennej są to przeguby kulowe. Przy takim połączeniu i obciążeniu przyłożonym w węzłach, każdy pręt przenosi jedynie siły N

* O ile zaniedbamy odkształcenia prętów.

** Gdyby przy przestrzennym obciążeniu zachować rozwiązanie w postaci kratownicy płaskiej, to konstrukcja taka byłaby bardzo wiotka na działanie sił prostopadłych do płaszczyzny kratownicy.

działające wzdłuż linii łączącej przegubę pręta. Zazwyczaj oś pręta pokrywa się z tą linią i wtedy siła N powoduje tylko rozciąganie lub ściskanie, a naprężenia normalne $\sigma = N/A$ noszą nazwę *naprężeń zasadniczych* lub *podstawowych*. Naprężenia te zmieniają długości prętów, powodując odkształcenia kratownicy, przejawiające się nie tylko w przemieszczeniu poszczególnych węzłów, lecz również w zmianie kątów między prętami, schodzącymi się w poszczególnych węzłach. Gdyby pręty były połączone za pomocą



Rys. 2.2. Rozdział obciążenia na lokalne i ogólne

a) wprowadzenie układów zerowych; siły obciążające P_1 i P_2 ; układy zerowe: R_1, R_2, R_3, R_4 i $-R_1, -R_2, -R_3, -R_4$; b) obciążenie lokalne kratownicy układami sił równoważącymi się w obrębie poszczególnych prętów i wywołującymi ich zginanie; c) obciążenie ogólne kratownicy siłami przyłożonymi jedynie w węzłach.

tak, aby jedne z nich równoważyły siłę P_1 w obrębie pręta 3, otrzymuje się po rozdzieleniu (rys. 2.2b, c) dwa obciążenia. Obciążenie pierwsze (rys. 2.2b) powoduje zginanie prętów 3 i 11 jako belek podpartych przegubowo na swych końcach, natomiast siły wewnętrzne we wszystkich pozostałych prętach są równe zero. Obciążenie to nazywa się *obciążeniem lokalnym*, podczas gdy drugie (rys. 2.2c) powoduje powstanie sił ścisających lub rozciągających na ogół we wszystkich prętach kratownicy i dlatego nazywa się *obciążeniem ogólnym*.

idealnych przegubów, wówczas ta zmiana kątów nie spowodowałaby żadnych zmian naprężeń i naprężenia zasadnicze byłyby jednocześnie *naprężeniami całkowitymi*. Zazwyczaj jednak węzły wykonane są tak, że swobodna zmiana kątów zajść nie może i węzeł przemieszcza się lub obraca jako w przybliżeniu nieodkształcalny zespół. Fakt ten powoduje, że pierwotnie proste osie prętów ulegają zakrzywieniu (rys. 2.1c), wskutek czego pojawiają się dodatkowe naprężenia od zginania, nazywane *naprężeniami wtórnymi*. Jeśli jednak w każdym węźle osie prętów przecinają się w jednym punkcie, to *nieodkształcalność węzłów wpływa nieznacznie na wielkość naprężeń zasadniczych*, usprawiedliwiając tym samym słuszność zamiany rzeczywistych węzłów przez przeguby idealne przynajmniej przy określaniu naprężeń zasadniczych.

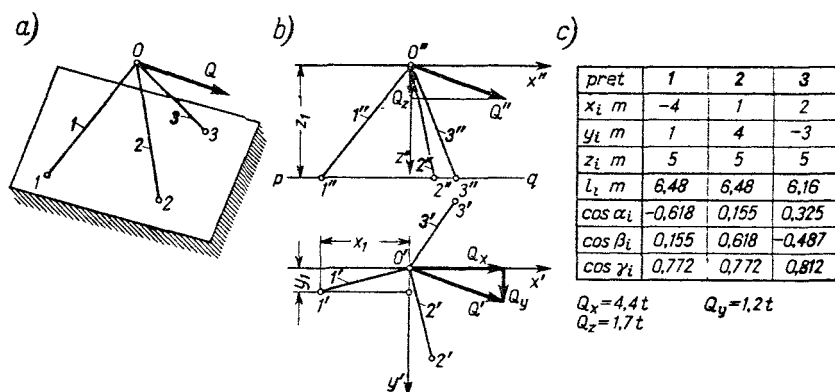
Naprężenia wtórne zależą od smukłości prętów λ i mogą niekiedy przybierać wartości dochodzące do 30% wartości naprężeń zasadniczych.

Obciążenia działające na kratownicę nie zawsze przyłożone są w węzłach (rys. 2.2). W przypadku takim wyznaczenie sił wewnętrznych rozdziela się na dwa etapy. Wprowadzając mianowicie układy sił zerowych, np. $R_3, -R_3, R_4, -R_4$ (rys. 2.2a), dobranych

Przedmiotem głównego zainteresowania w rozdz. 2 ÷ 5 będzie działanie obciążenia ogólnego*, podczas gdy skutki działania obciążeń lokalnych będą rozpatrywane tylko w nielicznych przypadkach.

2.2. Statyka kratownicy trójpętowej

Najprostszą kratownicą przestrzenną jest kratownica złożona z trzech prętów nie leżących w jednej płaszczyźnie. Pod działaniem obciążenia Q (rys. 2.3a) powstaną w prętach siły wewnętrzne skierowane wzdłuż osi tych prętów. Obliczenia tych sił można dokonać w różny sposób.



Rys. 2.3. Dane wyjściowe do metody analitycznej

a) kratownica trójpętowa; b) układ osi i wyznaczenie rzutów; c) układ tablicy do metody analitycznej.

Rozwiązanie analityczne otrzymujemy z równań równowagi. Biorąc za podstawę rysunek kratownicy w dwóch rzutach (rys. 2.3b):

a) ustalamy położenie prostokątnego układu współrzędnych (x, y, z) obierając punkt O jako początek.

b) Wyznaczamy z rysunku długości rzutów poszczególnych prętów 1, 2 i 3 na osie x, y, z . Otrzymane wartości x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) grupujemy (rys. 2.3c) w tablicę wyznaczając ponadto długości prętów ze wzorów

$$l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \quad (a)$$

oraz cosinusy kierunkowe prętów według wzorów

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= x_i / l_i, & \cos \beta_i &= y_i / l_i, \\ \cos \gamma_i &= z_i / l_i. \end{aligned} \quad (b)$$

* Ponieważ kratownice płaskie są szeroko omawiane w kursach Mechaniki Ogólnej, w podręczniku tym analiza ograniczona jest głównie do kratownic przestrzennych.

c) Zakładając, że siły N_1 , N_2 , N_3 są rozciągające i wobec tego przy rozpatrywaniu równowagi węzła działają od węzła O , układamy warunki równowagi rzutów, przy czym rzuty dowolnej siły, np. N_1 , są

$$N_{1x} = N_1 \cos \alpha_1, \quad N_{1y} = N_1 \cos \beta_1, \quad N_{1z} = N_1 \cos \gamma_1. \quad (c)$$

Rozwiązanie otrzymanego układu równań

$$\left. \begin{aligned} N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 + Q_x &= 0, \\ N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos \beta_2 + N_3 \cos \beta_3 + Q_y &= 0, \\ N_1 \cos \gamma_1 + N_2 \cos \gamma_2 + N_3 \cos \gamma_3 + Q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

daje siły N_1 , N_2 , N_3 . Należy podkreślić, że cosinusy kierunkowe są wielkościami algebraicznymi, tzn. mogą mieć one zarówno wartość dodatnią, jak i ujemną. Tak na przykład na rys. 2.3b $x_1 < 0$, $y_1 > 0$, $z_1 > 0$ itd.

W przypadku gdy w wyniku rozwiązania równań (2.3) otrzymamy ujemną wartość którejś z sił, oznacza to, że siła ta jest ściskająca*.

Rozwiązanie układu równań (2.3) daje zawsze jednoznaczną odpowiedź wtedy, gdy wyznacznik charakterystyczny D

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

nie jest równy zero, co jest zawsze spełnione, gdy pręty 1, 2, 3 zgodne z założeniem wstępnym nie leżą w jednej płaszczyźnie. Rozważenie przypadku szczególnego, gdy $D = 0$, podane jest w ogólnej teorii kratownic przestrzennych (art. 2.6).

Rozwiązanie analityczno-wykresne jest podobne do metody Rittera przy rozwiązywaniu kratownic płaskich. Biorąc rysunek kratownicy w dwóch rzutach (rys. 2.4) układamy dla węzła O równania równowagi momentów względem takich prostych, aby w każdej z równań wchodziła jedna z niewiadomych sił N_1 , N_2 lub N_3 . Tak na przykład chcąc wyznaczyć siłę N_1 piszemy równanie równowagi momentów względem prostej (2, 3), przy czym siłę Q przesuwamy wzdłuż linii jej działania

Rys. 2.4. Dane wyjściowe do metody wykreślnie-analitycznej

dla węzła O równania równowagi momentów względem takich prostych, aby w każdej z równań wchodziła jedna z niewiadomych sił N_1 , N_2 lub N_3 . Tak na przykład chcąc wyznaczyć siłę N_1 piszemy równanie równowagi momentów względem prostej (2, 3), przy czym siłę Q przesuwamy wzdłuż linii jej działania

* Tak na przykład dla konstrukcji (rys. 2.3b) układ równań (2.1) ma postać:

$$\begin{aligned} -0,618N_1 + 0,155N_2 + 0,325N_3 + 4,40 &= 0, \\ 0,155N_1 + 0,618N_2 - 0,487N_3 + 1,20 &= 0, \\ 0,772N_1 + 0,772N_2 + 0,812N_3 + 1,70 &= 0, \end{aligned}$$

a jego rozwiązanie daje

$$N_1 = 4,79 \text{ t}, \quad N_2 = -4,83 \text{ t}, \quad N_3 = -2,05 \text{ t},$$

a więc pręty 2 i 3 są ściskane, a pręt 1 rozciągany.

aż do punktu (A', A'') . Rozkładając następnie siłę N_1 na składowe poziomą H_1 i pionową P_1 oraz analogicznie siłę Q na składowe H i P otrzymujemy z równania momentów

$$Pa_1 - P_1 b_1 = 0. \quad (d)$$

Całkowitą wartość siły N_1 można wyznaczyć uwzględniając, że

$$P_1 = N_1 h / l_1, \quad P = Q h / l, \quad (e)$$

gdzie $l_1 = O'I$, $l = O'A$ są rzeczywistymi długościami* pręta **1** i odcinka OA .

Podstawiając powyższe wartości do (d) w rezultacie

$$N_1 = Q a_1 l_1 / b_1 l. \quad (2.3a)$$

Podobnie można wyznaczyć siły w pozostałych prętach. Tak na przykład w pręcie **2** siła

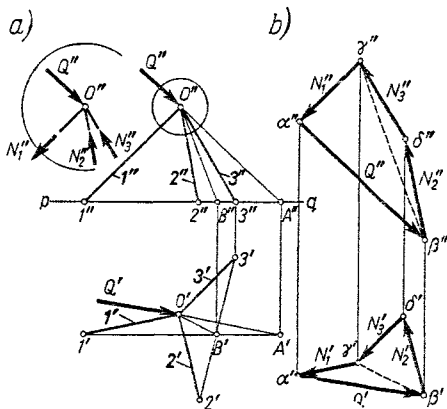
$$N_2 = -Q a_2 l_2 / b_2 l, \quad (2.3b)$$

gdzie l_2 — długość pręta **2**, a znak minus bierze się stąd, że zarówno składowa pionowa siły Q , tj. P , jak i składowa pionowa siły N_2 działają po tej samej stronie prostej $I'3'$.

Rozwiązanie wykreślne. Według tego sposobu zamiast rozpatrywać równowagę węzła pod działaniem wszystkich czterech sił, tj. Q , N_1 , N_2 , N_3 , zgrupujemy je po dwie tworząc wypadkową W_1 z siły Q i siły N_1 oraz wypadkową W_2 z dwóch pozostałych sił N_2 i N_3 . Niezależnie od tego, jakie wartości przyjmą siły N_1 , N_2 , N_3 , wypadkowa W_1 działa na pewno w płaszczyźnie wyznaczonej przez pręt **1** i siłę Q (rys. 2.5a), wypadkowa zaś W_2 leży na pewno w płaszczyźnie wyznaczonej przez pręty **2** i **3**. Aby węzeł O pod działaniem W_1 i W_2 był w równowadze, muszą one być równe, przeciwnie skierowane i muszą działać wzdłuż jednej prostej. Prosta ta musi być więc krawędzią przecięcia wyżej wspomnianych płaszczyzn, których śladami są linie $I'A'$ i $2'3'$. Poziomy rzut tej krawędzi otrzymujemy łącząc punkt O' z punktem B' , pionowy zaś rzut — łącząc punkt O'' z pionowym rzutem punktu B , tj. B'' .

Ustaliwszy w ten sposób linię działania wypadkowych W_1 i W_2 , przejdźmy obecnie do wyznaczenia sił N_1 , N_2 i N_3 . Trójkąt sił złożony z Q , N_1 i W_1 leży w przestrzeni w ten sposób, że jego boki są odpowiednio równoległe do prostych OA , OI i OB , wobec czego rzuty prostokątne tego trójkąta są odpowiednio równoległe do rzutów tychże prostych. Rysując zatem oddzielne rzuty siły Q w obranej skali (rys. 2.5b) i prowadząc z jej końców równoległe do prostych OI i OB otrzymujemy pierwszy trójkąt sił, w którym bok $\alpha\gamma$ przedstawia siłę N_1 , bok zaś $\beta\gamma$ wypadkową W_1 . Ponieważ W_1 ma być wypadkową sił N_1 i Q , przeto jej zwrot musi być od γ do β , zwrot zaś siły N_1 od γ do α . Zgodnie z tym co podano powyżej, siła W_2 musi być identyczna z W_1 z tym tylko, że jej zwrot jest przeciwny, tj. od β do γ .

Rozkład siły W_2 na siłę N_2 i N_3 przeprowadzamy zauważając, że tworzą one znowu trójkąt o bokach równoległych do prostych OB , $O2$ i $O3$. Prowadząc więc z punktów β i γ równoległe do $O2$ i $O3$ otrzymu-



Rys. 2.5. Wykreślne rozwiązanie kratownicy trójpřętowej

a) geometria kratownicy; b) rzuty przestrzennego wieloboku sił.

* Na rysunku 2.4 długości te wyznaczono przez obrót rzutów pionowych do położeń $O''I'''$ i $O''A'''$ i odpowiednie przerzutowanie na poziomą płaszczyznę.

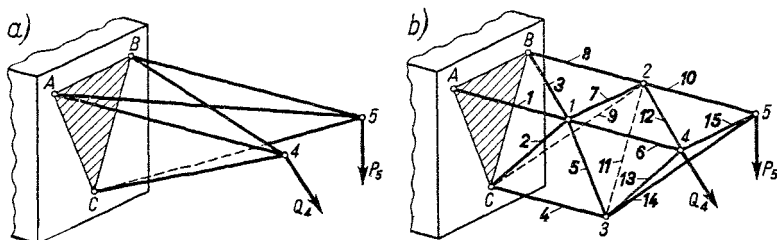
jemy rysunek drugiego trójkąta sił w rzutach jako $\Delta\beta\gamma\delta$. Zwroty sił N_2 i N_3 określamy pamiętając, że W_2 jest wypadkową tych sił, wobec czego obieg wzdłuż linii łamanej $\beta\delta\gamma$ musi być od punktu β do γ . Określenie znaku sił N_1 , N_2 , N_3 przeprowadzamy jak w kratownicach płaskich, a mianowicie siła jest rozciągająca, gdy przeniesiona do węzła ma zwrot od tego węzła. Tak na przykład na rys. 2.5. siła N_1 jest rozciągająca, podczas gdy N_2 i N_3 są siłami ściskającymi.

Całkowitą wartość sił wyznacza się stosując konstrukcję kładu i przeliczenie długości według przyjętej skali.

2.3. Przestrzenne kratownice proste. Metoda węzłów

Biorąc kratownicę trójprętową jako podzespół, można przejść do budowania bardziej złożonych układów kratowych. Zasadniczym celem jest przy tym unieruchomienie* bądź względem podłoża, bądź względem siebie szeregu punktów lub elementów niezbędnych dla prawidłowego działania ustroju. W zależności więc od podstawy wyjściowej, rozróżnia się konstrukcje *nabudowane na podłożu* oraz konstrukcje *szttywne same w sobie*.

Unieruchomienia szeregu punktów względem podłoża można dokonać łącząc bezpośrednio z podłożem każdy z punktów, do czego za każdym razem trzeba zużyć trzy pręty nie leżące w jednej płaszczyźnie. Bardziej celowe jest łączenie stopniowe, tj. nabudowa nad istniejącym podłożem pośrednich węzłów. Tak na przykład unieruchomienia punktów 4 i 5 względem podłoża można dokonać bezpośrednio (rys. 2.6a), można jednakże nabudować naprzód węzeł 1, łącząc go trzema prętami z punktami podłoża A, B, C



Rys. 2.6. Kratownice nabudowane na sztywnym podłożu

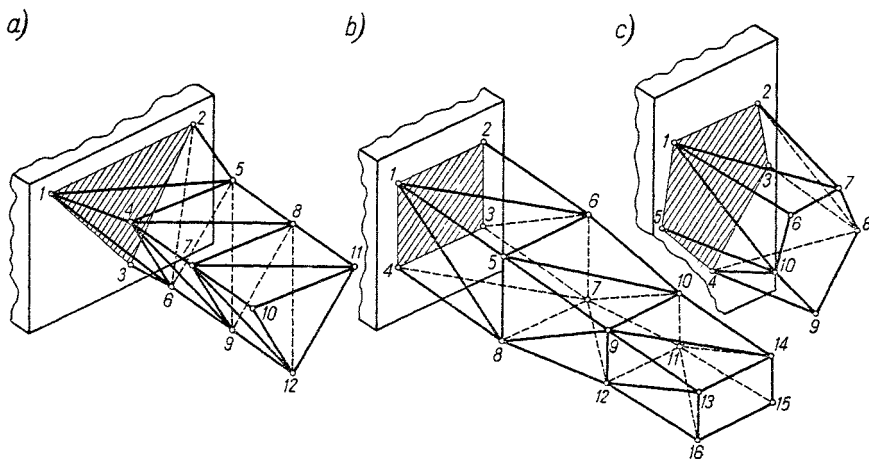
a) kratownica nabudowana bezpośrednio; b) kratownica z trzema węzłami pośrednimi.

(rys. 2.6b). Węzeł 2 unieruchamiamy, wykorzystując już uprzednio nabudowany węzeł 1, stanowiący jak gdyby przedłużenie podłoża. Analogicznie unieruchamiamy węzeł 3. Otrzymana w ten sposób platforma z węzłów 1, 2, 3 jest podstawą, do której podłącza się kolejno węzły 4 i 5. Konstrukcja z węzłami pośrednimi (rys. 2.6b) składa się z większej liczby prętów niż konstrukcja nabudowana bezpośrednio (rys. 2.6a), jednakże same pręty są krótsze. Dzięki temu konstrukcja taka może być wykonana znacznie łatwiej głównie z uwagi na niebezpieczeństwo wybooczenia prętów.

Kilka przykładów kratownic nabudowanych na sztywnym podłożu podaje rys. 2.7, przy czym za każdym razem kolejny węzeł podłączony jest do podłoża lub do poprzednio

* Unieruchomienie to jest idealne, jeśli nie brać pod uwagę odkształcalności prętów.

nabudowanych węzłów za pomocą trzech prętów nie leżących w jednej płaszczyźnie. Kratownice zbudowane według tej reguły noszą nazwę *kratownic prostych*. Z reguły kratownice te sztywne są dopóty, dopóki są one połączone ze sztywnym podłożem. Po odłączeniu od podłoża stają się one na ogół mechanizmami, jak na przykład kratownice z rysunków 2.7b, c.



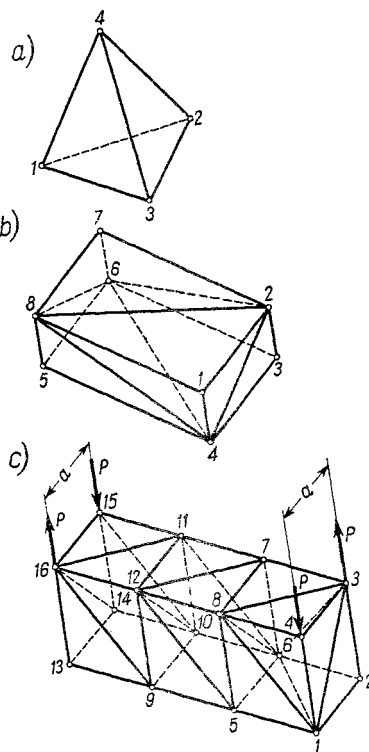
Rys. 2.7. Przykłady kratownic prostych nabudowanych na sztywnym podłożu

a) kolejność nabudowania: 5, 6, 4, 9, 8, 7, 12, 11, 10; b) kolejność nabudowania: 6, 7, 8, 5, 10, 9, 12, 11, 14, 13, 16, 15; c) kolejność nabudowania: 10, 8, 9, 7, 6.

Najprostszą kratownicą sztywną samą w sobie jest kratownica (rys. 2.8a) otrzymana przez przyłączenie węzła 4 do trójkąta podstawowego 1-2-3 za pomocą trzech prętów nie leżących w jednej płaszczyźnie. Dobudowując do tej konstrukcji następne węzły przez łączenie każdego z nich za pomocą trzech prętów otrzymujemy bardziej skomplikowane konstrukcje, będące nadal kratownicami prostymi. Przykłady takich kratownic podano na rys. 2.8b, c. Przy odpowiednim rozstawieniu węzłów 1, ..., 8 ściany kratownicy (rys. 2.8b) zamykają prostopadłościan, który może stanowić podłoże do nabudowania na nim dalszej konstrukcji. Tak na przykład jeśli rozstawienie węzłów 1, 2, 3, 4 (rys. 2.8b) pokrywa się z rozstawieniem węzłów 1, 2, 3, 4 (rys. 2.7b), to obydwa zespoły można w tych węzłach ze sobą połączyć usuwając zbędne już podłoże. Ta sama uwaga dotyczy możliwości połączenia kratownic z rys. 2.7a i 2.8a. Kratownice według rys. 2.8c w nieco zmienionej postaci znajdują zastosowanie w budowie wysięgników żurawi z jazdą dolną wózka, przy czym liczbę segmentów, tj. podobnych podzespołów konstrukcji, można dowolnie zwielokrotnić. Ponieważ taką segmentową budowę spotyka się często, celowe jest wprowadzenie skróconej terminologii dla oznaczenia niektórych podzespołów. I tak poprzeczne kratownice płaskie ograniczone węzłami (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (13, 14, 15, 16) (rys. 2.8c) nazywane *węgami*, zespół prętów poboczniczy (5, 9), (8, 12), (7, 11), (6, 10),

(5, 12), (7, 12), (6, 11) między dwiema kolejnymi wręgami nazywa się *grodzką*. W niektórych konstrukcjach wręgi same w sobie nie są sztywne, jak np. (13, 14, 15, 16), ..., (5, 6, 7, 8) (rys. 2.7b) i mówimy wtedy o *wręgach niesztynwych* w odróżnieniu od poprzednich, które nazywamy *wręgami sztywnymi*. Zespół prętów wzdłużnych należących do jednej krawędzi (4, 8), (8, 12), (12, 16) (rys. 2.8c) nazywamy *podłużnicą*, przy czym podłużnice te mogą być *proste* (rys. 2.8c) lub *łamane* (rys. 2.7b).

Rozwiązania kratownic prostych dokonuje się metodą kolejnego rozpatrywania równowagi węzłów lub w skrócie *metodą węzłów*. Kolejność tę należy tak ustalić, aby za każdym



Rys. 2.8. Przykłady kratownic prostych sztywnych samych w sobie
a) najprostsza kratownica przestrzenna; b) czworoscian podstawowy 2, 4, 6, 8; węzły nabudowane 1, 3, 5, 7; c) czworoscian podstawowy 1, 3, 8, 6; kolejność nabudowania węzłów: 4, 2, 5, 7, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13.

razem mieć tylko trzy niewiadome siły w danym węźle. Wskutek tego zadanie sprowadza się do wielokrotnego powtórzenia zadania podstawowego (art. 2.2). W konstrukcji, dla której znana jest kolejność jej budowania, kolejność rozwiązania jest odwrotna od kolejności jej tworzenia. Tak na przykład w kratownicy z rys. 2.6b obliczamy naprężenia siły w prętach węzła 5, tj. N_{10} , N_{14} , N_{15} , następnie przechodzimy do węzła 4, gdzie niewiadomymi są N_{12} , N_6 , N_{13} , a obciążenie stanowi wypadkowa z Q_4 i N_{15} , która obliczona została poprzednio. Postępując podobnie wyznaczamy siły N_4 , N_5 , N_{11} węzła 3, dla którego obciążeniem są znane już N_{13} , N_{14} , a następnie obliczamy siły w prętach węzłów 2 i 1. W rezultacie wszystkie siły wewnętrzne wyznaczamy z równań statyki, a więc kratownice proste są *statycznie wyznaczalne*.

W przypadkach gdy kolejność budowania kratownicy nie jest znana, ustalenie kolejności rozpatrywania węzłów jest pierwszym etapem rozwiązania. Samo wyznaczanie sił w poszczególnych prętach przeprowadza się metodą wykreślną-analityczną lub wykreślną, przy czym dla każdego z węzłów należy wykonać oddzielny rysunek analogiczny do rys. 2.4 lub 2.5. Dokładność takiej metody pogarsza się ze wzrostem liczby węzłów i dlatego dla ustrojów złożonych stosuje się, o ile możliwości, inne metody.

Jak wykazują rozwiązania konkretnych konstrukcji, względny błąd wartości siły w prętach n -tego kolejnego węzła wyrazić można wzorem

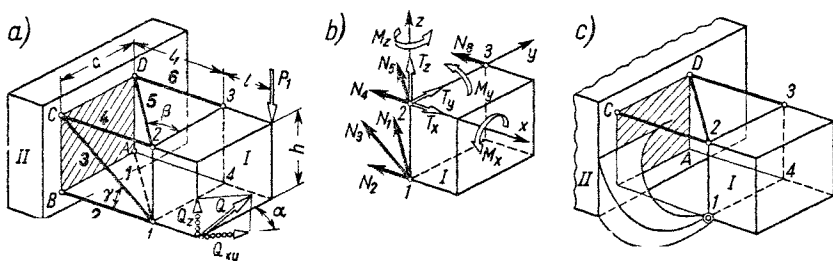
$$(1 \pm \xi)^n - 1 \approx \pm n\xi, \quad (2.4)$$

gdzie $\xi \approx 0,01 + 0,02$ zależy od dokładności wykonania wykreślonych konstrukcji według rys. 2.4 lub 2.5. Tak więc przy rozwiązywaniu konstrukcji o 20 węzłach przy średnim wykonaniu ($\xi = 0,015$) należy się liczyć z tym, że siły w prętach ostatniego dwudziestego węzła określone będą z dokładnością $\pm 30\%$, a więc stanowią niewystarczającą.

2.4. Łączenie brył. Metoda przekrojów

W wielu zagadnieniach zadaniem konstruktora jest połączyć w sztywną całość dwa zespoły (konstrukcje), z których każdy sam w sobie stanowi sztywny ustrój. Połączenie takie wymaga zlikwidowania 6 stopni swobody, tj. trzech względnych przemieszczeń i trzech względnych obrotów. Jeśli połączenia tych dwóch brył będziemy realizować za pomocą prętów, to liczba ich musi wynosić co najmniej sześć. Każdy pręt bowiem, usuwając możliwość wzajemnej zmiany odległości dwóch punktów, likwiduje jeden stopień swobody.

Klasycznym połączeniem tego rodzaju jest połączenie (rys. 2.9a), w którym węzeł I bryły I unieruchomiamy względem bryły II za pomocą trzech prętów. Dzięki temu,



Rys. 2.9. Klasyczny układ sztywnego łączenia dwóch brył

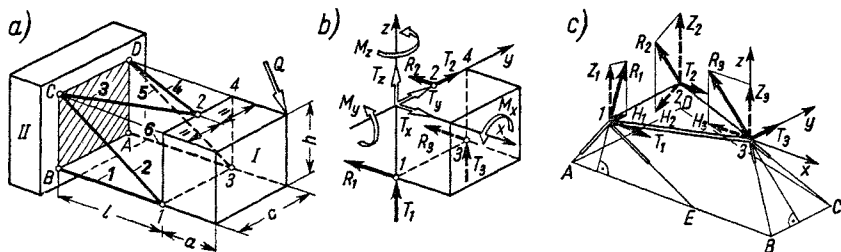
a) szkice konstrukcji; b) określenie sił w prętach; $T_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z$, obciążenie bryły I zredukowane do układu osi z, y, z ; c) inna wersja połączenia z rys. a.

traktując bryłę II jako nieruchomą, pozostawiamy swobodę ruchu kulistego bryły I ze środkiem w punkcie I. Dodanie dwóch następnych prętów, schodzących się w węźle 2, pozostawia jedynie swobodę obrotu względem osi 1-2 i wreszcie dodanie szóstego pręta 6 unieruchamia całkowicie jedną bryłę (kratownicę) względem drugiej. Jest oczywiste, że pręt 6 musi być skośny względem linii 1-2, gdyż tylko wtedy usuwa on możliwość obrotu względem tejże prostej. Wynika stąd podstawowy warunek sztywnego połączenia dwóch brył, a mianowicie: *sześć prętów realizujących połączenie nie może przecinać się z jedną prostą**.

Podany sposób połączenia dwóch brył nie jest jedynym możliwym. Szeroko rozpowszechniony jest układ (rys. 2.10a) składający się z trzech par prętów biegnących w trzech różnych płaszczyznach. Ogólnie biorąc, każdy układ łączący złożony z sześciu prętów i spełniający warunek podstawowy jest tak samo prawidłowy. Często zamiast poszczególnych prętów, lub ich grup, stosuje się przeguby osadzone bezpośrednio w konstrukcjach łączonych. Tak na przykład przedłużając w dowolny sposób konstrukcję bryły II (rys. 2.9c) aż do węzła I i umieszczając w tym węźle przegub kulowy, realizujemy konstrukcję równoważną konstrukcji prętowej, złożoną jednak tylko z trzech prętów i jednego przegubu kulowego.

* Istnieją przypadki, gdy warunek ten jest niewystarczający. Jest to związane z tzw. krytyczną postacią kratownicy (art. 2.6).

Wyznaczenie sił w prętach lub elementach łączących obydwie bryły, przeprowadzamy *metodą przekrojów*. Polega ona na oddzieleniu jednej bryły od drugiej myślowym przekrojem przecinającym wszystkie pręty lub elementy łączące. Zastępując w tym przekroju



Rys. 2.10. Typowy układ łączenia 2 brył

a) szkic konstrukcji; b) analiza równowagi bryły I; obciążenie $T_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z$ zredukowane do układu osi x, y, z .

oddziaływanie jednej części na drugą odpowiednimi sześcioma siłami N_i , piszemy następnie sześć równań równowagi jednej z brył. Ich klasyczna postać (rys. 2.9b)

$$\left. \begin{aligned} T_x + \sum N_i \cos \alpha_i &= 0, & T_y + \sum N_i \cos \beta_i &= 0, & T_z + \sum N_i \cos \gamma_i &= 0, \\ M_x + \sum M_{ix} &= 0, & M_y + \sum M_{iy} &= 0, & M_z + \sum M_{iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

wyraża warunki równowagi rzutów sił N_i na osie x, y, z (patrz wzory b art. 2.2) i równowagi momentów tych sił M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} ($i = 1, \dots, 6$) względem odpowiednich osi.

Postać równań równowagi (2.5) nie jest jedyna i może być zastąpiona inną, wygodniejszą do rachunków. W szczególności zaleca się zastępować równania rzutów przez równania momentów względem takich osi, aby w równanie to wchodziło mało niewiadomych. Tak na przykład z równań równowagi momentów względem osi z , (I, B) i osi (I, 4) (rys. 2.9) otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} N_6 &= -M_z/c, & N_5 &= [(M_x/h) - T_y] \sec \beta, \\ N_4 &= -(N_6 + N_5 \sin \beta) + T_x - (M_y/h). \end{aligned}$$

Z warunku równowagi momentów względem osi x , rzutów na oś z i momentów względem osi y mamy następujnie

$$N_1 = -(M_x/h) \sec \beta, \quad N_3 = -T_z \operatorname{cosec} \gamma, \quad N_2 = (M_y/h) - N_3 \cos \gamma - N_1 \sin \beta.$$

W rezultacie dzięki odpowiedniemu formułowaniu równań mamy według podanej kolejności za każdym razem równanie z jedną niewiadomą.

Obliczenie sił w połączeniu (rys. 2.10) dzielimy na 2 etapy. W etapie pierwszym wyznaczamy składowe R i T (rys. 2.10b) wypadkowej siły każdej pary prętów schodzących się w węzłach 1, 2, 3. Z równań równowagi momentów bryły I względem osi (1, 3), z i rzutów na oś x mamy kolejno

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= T_x - (M_y/h), & R_3 &= -(M_z/c) - (R_2/2), \\ R_1 &= T_x - R_2 - R_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

a z równań równowagi momentów względem osi x , (4, D) i rzutów na oś y

$$T_3 = -(M_x/c), \quad T_1 = (M_x/c) - T_x, \quad T_2 = -T_y. \quad (2.7)$$

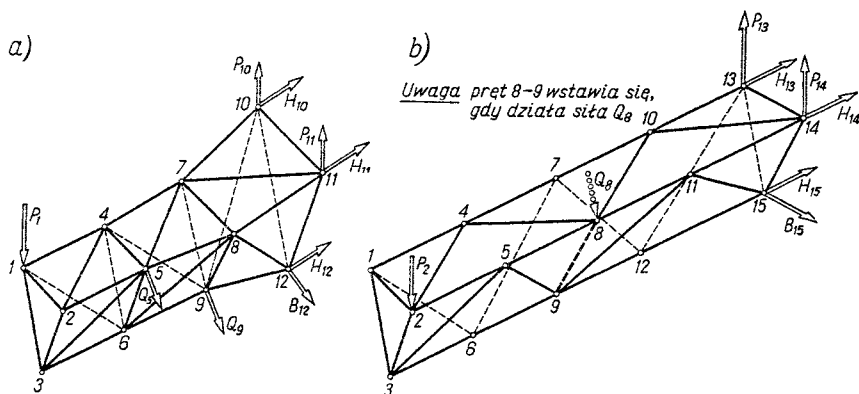
W etapie drugim każdą z wypadkowych rozkładamy na siły działające w poszczególnych prętach. I tak mając wyznaczone R_3 i T_3 rozkładamy wypadkową z nich na kierunki prętów 5 i 6, otrzymując

w ten sposób siły N_5 i N_6 . Tak proste wyrażenia sił R i T otrzymuje się tylko dzięki szczególnie prostemu układowi prętów. Metodę postępowania można jednak zastosować i do ustroju (rys. 2.10c), gdy pary prętów $(1, A)$, $(1, E)$, $(3, B)$ itd. są usytuowane dowolnie. Różnica polega na tym, iż z równań równowagi momentów względem osi x , y i rzutów na oś z wyznaczamy nie całe siły R , lecz ich składowe pionowe Z . Dzięki temu w trzech następnych równaniach poziome składowe sił R , tj. H , są już znane i wtedy łatwo można wyznaczyć siły T_1 , T_2 i T_3 .

2.5. Kratownice łączone. Kratownice trójpodłużnicowe

Jeśli termin „bryła” użyty w art. 2.4 zastąpimy określeniem „kratownica prosta” sztywna sama w sobie, to dochodzimy do pojęcia *kratownice łączonych* jako konstrukcji zbudowanych w ten sposób, że dwie lub więcej kratownice prostych połączonych ze sobą w sposób statycznie wyznaczalny, tworząc sztywny zespół.

Z uwagi na ich sposób budowy *kratownice łączone nie mogą być rozwiązywane metodą węzłów, lecz trzeba zastosować metodę przekrojów*. Biorąc na przykład kratownicę trójpodłużnicową (rys. 2.11a) widzimy, iż przedstawia ona połączenie kilku najprostszych



Rys. 2.11. Techniczne ważne przypadki kratownic łączonych

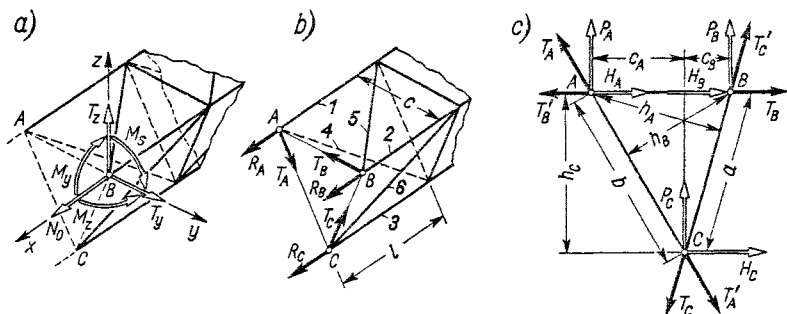
a) kratownica trójpodłużnicowa klasyczna; b) kratownica trójpodłużnicowa pryzmatyczna z usuniętymi prętami zerowymi.

sztywnych kratownic (trójkątnych wręg) za pomocą trzech podłużnic i trzech wykrzywowań idących jednym obiegem. W ogólnym przypadku, gdy podłużnice są łamane, kratownicy takiej nie można rozwiązać metodą węzłów, gdyż rozpoczynając od wręgi 123 w każdym z węzłów mamy po cztery niewiadome siły. Można natomiast wyznaczyć siły w prętach grodzi prowadząc przekrój przez sześć prętów łączących dwie sąsiednie wręgi, otrzymując w ten sposób zagadnienie identyczne jak w przypadku łączenia brył (rys. 2.10b).

Wyznaczywszy siły w prętach dwóch kolejnych grodzi, można przejść do rozpatrywania wręgi oddzielającej te grodzie i wyznaczyć siły w prętach wręgi. Formalnie zadanie jest więc rozwiązane, jednakże analityczne wyznaczenie sił jest żmudne. Tylko w przy-

padku, gdy kratownica trójpodłużnicowa jest pryzmatyczna i płaszczyzny wręg są prostopadłe do podłużnic lub gdy wręgi są równoramienne i ustawione w ten sposób, że ich osie symetrii leżą w jednej płaszczyźnie, wtedy wzory na siły w prętach są względnie proste.

W kratownicy pryzmatycznej (rys. 2.12a) po dokonaniu przekroju siły zewnętrzne działające na odrzuconą (lewą) część konstrukcji redukujemy do punktu pokrywającego się z jedną z-podłużnic,



Rys. 2.12. Statyka trójpodłużnicowej kratownicy łączonej

a) i b) układ obciążeń i sił wewnętrznych; c) statyka wręg $\triangle ABC$.

otrzymując w wyniku siły N_0 , T_y , T_z i momenty M_y , M_z , M_x . Rozkładając* to wypadkowe obciążenie na składowe R_A i T_A , R_B i T_B , R_C i T_C (analogia do rys. 2.10b) mamy w rezultacie

$$R_A = (M_x - R_C c_B)/c, \quad R_B = N_0 - (M_x/c) - (R_C c_A/c), \quad R_C = M_y/h_C; \quad (2.8)$$

$$T_A = -M_s/h_B, \quad T_B = [(-M_s + T_z c_B)/h_C] - T_y, \quad T_C = (-M_s + T_z c)/h_A. \quad (2.9)$$

Mając obliczone siły R i T , wyznaczamy siły w prętach

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= R_A + T_A \frac{l}{b}, & N_2 &= R_B + T_B \frac{l}{c}, & N_3 &= R_C + T_C \frac{l}{a}, \\ N_4 &= -T_A \frac{l_4}{b}, & N_5 &= -T_B \frac{l_5}{c}, & N_6 &= -T_C \frac{l_6}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

gdzie l_4 , l_5 , l_6 — długości prętów 4, 5, 6.

Podane wzory są o tyle wygodne, że pozwalają rozpatrywać kratownicę jak belkę. Obierając mianowicie oś odniesienia, wyznaczamy dla danych warunków podparcia przebieg momentów gnących i sił tnących w dwóch płaszczyznach oraz przebieg sił wzdłużnych i momentów skręcających. Po zastosowaniu kolejno wzorów (2.8), (2.9) i (2.10) otrzymujemy siły w prętach. Znajomość sił w prętach dwóch sąsiednich grodzi pozwala obliczyć siły w prętach wręgi. Izolując wręgę dwoma przekrojami otrzymujemy obraz oddziaływań na wręgę pod postacią sił T_A , T_B , T_C pochodzących od prętów grodzi leżącej z prawej strony i sił T'_A , T'_B , T'_C od działania prętów grodzi leżącej ze strony lewej (rys. 2.12c). Siły te łącznie z siłami zewnętrznymi przyłożonymi bezpośrednio do węzłów wręgi, tj. P_A , P_B , P_C i H_A , H_B , H_C muszą tworzyć układ sił w równowadze. Samo wyznaczanie sił przeprowadza się jak dla normalnej

* Zwraca się uwagę na różnicę między rys. 2.10b a rys. 2.12a. Na rysunku 2.10b T_x , ..., M_x są obciążeniami działającymi na część rozpatrywaną i dlatego siły R i T wyznaczano z równań równowagi. Na rysunku 2.12a N_0 , ..., M_s są oddziaływaniami części odrzuconej i dlatego siły R i T wyznacza się rozkładając obciążenie na siły składowe.

kratownicy płaskiej. Jeśli wřęga nie jest obciążona siłami zewnętrznymi, to siły wewnętrzne w prętach jej są równe bezpośrednio T_A , T_B , T_C , przy czym

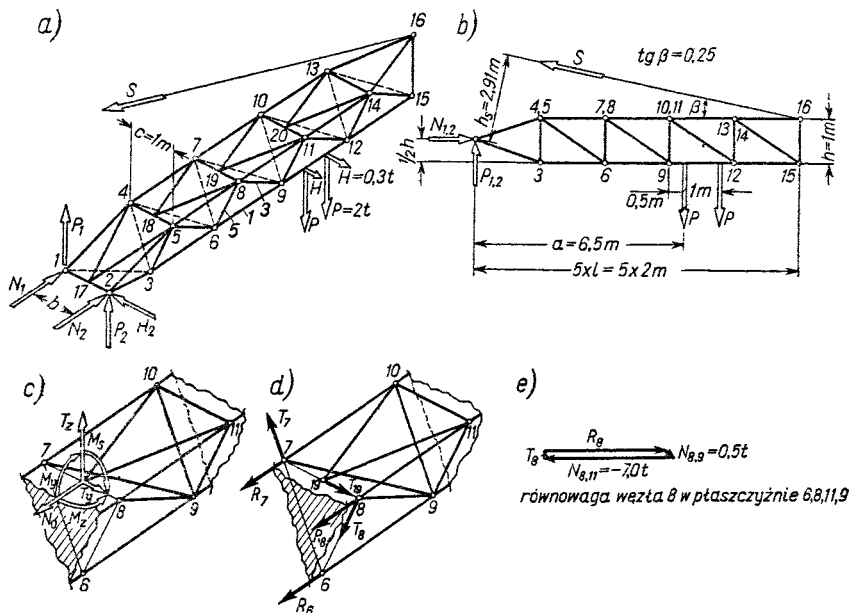
$$T'_A = T_A, \quad T'_B = T_B, \quad T'_C = T_C. \quad (2.11)$$

Wzory (2.8) ÷ (2.11) obowiązują tylko przy podanym (rys. 2.12) układzie wykrzyżowań. Jeśli układ się zmieni i będzie taki jak na rys. 2.7a, to metoda rozwiązywania zostaje identyczna, jednakże wzory ulegną zmianom. Przeprowadzenie analizy w takim przypadku, jak również w drugim, gdy wřęgi są symetryczne, ale podłużnice nie są równoległe, zostawia się czytelnikowi.

Z punktu widzenia dokładności rachunków, metoda przekrojów jest znacznie lepsza niż metoda węzłów, gdyż obliczenie sił w prętach każdej grodzi jest operacją niezależną od wszystkich poprzednich obliczeń. Jeśli więc kratownica może być obliczona metodą węzłów lub przekrojów, jak np. kratownica z rys. 2.7a, to pierwszeństwo należy przyznać metodzie przekrojów.

W niektórych przypadkach kratownica trójpodłużnicowa przyzmatyczna może być uproszczona przez usunięcie wřęg pośrednich i pozostawienie tylko obydwu wřęg skrajnych, (rys. 2.11b). Jeśli mianowicie kratownica obciążona jest tylko we wřęgach skrajnych, a obieg wykrzyżowań zmienia się co każdą grodz, to wszystkie pręty wřęg pośrednich mogą być usunięte, gdyż wszystkie one są prętami zerowymi*. Bardziej szczegółowe uwagi podane są w art. 2.8.

Przykład. Wyznaczyć siły w prętach 1, 3, 5 wysięgnika (rys. 2.13a), zawieszonego na linie oraz podpartego przegubowo na węzłach 1, 2, przy obciążeniu siłami P i H .



Rys. 2.13. Przykład liczbowy

* Weźmy na przykład węzeł 4. Gdyby istniał pręt 4-6, to z warunku równowagi rzutów sił schodzących się w tym węźle na prostą prostopadłą do ściany 1-2-14-13 wynika $N_{4,6} = 0$ c.b.d.d.

Rozwiązanie. Z warunków równowagi momentów względem prostej 1-2 otrzymujemy siłę w linie:

$$S = P(2a+c)/h_s = 9,62 \text{ t},$$

gdzie $h_s = 2,91 \text{ m}$ — długości odcinka prostopadłej (rys. 2.13b). Prowadząc obecnie przekrój tuż za węzłą 6-7-8 mamy do wyznaczenia siedem sił w prętach poboczniczy (trzy podłużnicze i cztery wykrzywowania, rys. 2.13d), tj. więcej niż sześć równań równowagi. Ponieważ jednak wypadkowa sił w prętach (19, 10) i (19, 11) musi mieć kierunek 7-8, gdyż inaczej nie mogłaby istnieć równowaga węzła 19, więc stąd wynika zależność

$$N_{19,10} = -N_{19,11},$$

a więc w rezultacie mamy sześć niewiadomych. Podobnie jak na rys. 2.12a, tak i tu wyznaczamy naprężd siły $R_6, R_7, R_8, T_7, T_8, T_{19}$ równoważne układowi sił $T_y, T_z, N_0, M_y, M_z, M_s$ (rys. 2.13c). Zgodnie z rys. 2.12a

$$T_z = 2P - S \sin \beta = 1,66 \text{ t}, \quad T_y = -2H = -0,6 \text{ t},$$

$$N_0 = -S \cos \beta = -9,33 \text{ t},$$

$$M_y = 2,03 \text{ tm}, \quad M_z = 1,8 \text{ tm}, \quad M_s = 0,6 \text{ tm}.$$

Układając równania równowagi mamy:

$$R_6 = \frac{M_y}{h} = 2,03 \text{ t}, \quad R_7 = \frac{N_0}{2} + \frac{M_z}{c} - \frac{M_y}{2h} = -3,88 \text{ t},$$

$$R_8 = \frac{N_0}{2} - \frac{M_z}{c} - \frac{M_y}{2h} = -7,48 \text{ t}, \quad T_{19} = \frac{1}{h}(M_s + T_y h) = 0,$$

$$T_7 = \left(\frac{T_z}{2} + \frac{M_s}{c} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2h} \right)^2} = 1,60 \text{ t},$$

$$T_8 = \left(\frac{M_s}{c} - \frac{T_z}{2} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2h} \right)^2} = -0,26 \text{ t}.$$

Rozkładając w płaszczyznach odpowiednich krat wypadkowe z sił R_8 i T_8 otrzymujemy (rys. 2.13e) $N_{8,9}$, ze wzoru (2.11) $N_8 = T_8$ oraz $N_1 = R_8$ i w wyniku

$$N_1 = N_{8,9} = 2,03 \text{ t}, \quad N_3 = N_{8,9} = 0,5 \text{ t}, \quad N_5 = N_{6,8} = -0,26 \text{ t}.$$

2.6. Ogólna teoria kratownic przestrzennych

Rozważania artykułów 2.4 i 2.5 pozwalają rozwiązać tylko nieliczne zagadnienia statyki kratownic. W urządzeniach najczęściej spotykanych obliczenie sił wewnętrznych jest bardziej złożone i dlatego konieczne jest zaznajomienie się z ogólną teorią kratownic przestrzennych.

Punktem wyjścia tej teorii jest *liczbowe kryterium sztywności*, to jest ustalenie minimalnej niezbędnej liczby prętów p potrzebnej do zbudowania sztywnej kratownicy o w węzłach.

W kratownicy przestrzennej nabudowanej na sztywnym podłożu do unieruchomienia każdego węzła, leżącego poza podłożem, zużywamy trzy pręty. Dla unieruchomienia takich w węzłów potrzeba jest prętów

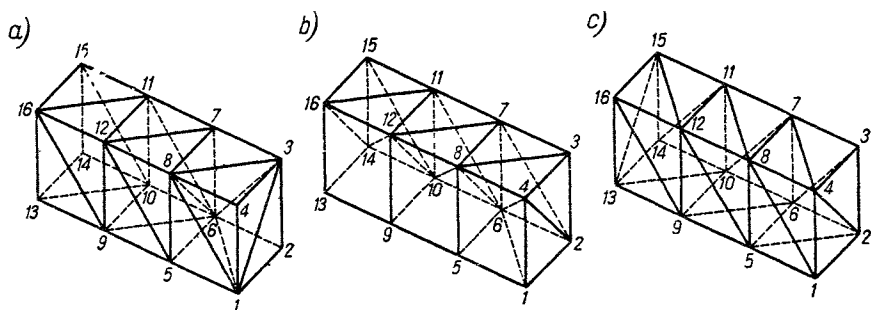
$$p = 3w. \quad (2.12a)$$

Przy budowaniu kratownicy sztywnej samej w sobie, trzy pierwsze węzły, stanowiące trójkąt podstawowy, zużywają tylko trzy pręty. Dobudowanie do tego trójkąta każdego z następnych ($w-3$) węzłów wymaga za każdym razem zużycia trzech prętów. W rezultacie liczba prętów w kratownicy sztywnej samej w sobie wynosi

$$p = 3 + 3(w-3) = 3w-6. \quad (2.12b)$$

Różnica wzorów (2.12a) i (2.12b) jest pozorna, należy bowiem pamiętać, że kratownica sztywna sama w sobie nie jest kinematycznie równoważna kratownicy nabudowanej na sztywnym podłożu, gdyż posiada 6 stopni swobody. Aby móc porównać obydwa kryteria, należy kratownicę sztywną samą w sobie unieruchomić względem podłoża, tj. dodać 6 więzów, np. w postaci dodatkowych 6 prętów (art. 2.4). W rezultacie obydwa kryteria sprowadzają się do wzoru (2.12a), jeśli jako pręty wliczać będziemy również więzy dodatkowe (reakcje) unieruchamiające kratownicę w przestrzeni.

Kryteria (2.12) są kryteriami sumarycznymi i nie określają, jak mają przebiegać pręty łączące węzły. W rezultacie przy tym samym rozstawieniu i liczbie węzłów można



Rys. 2.14. Różne postacie kratownicy o tym samym rozstawieniu węzłów

a) kratownica prosta; czworoscian podstawowy 1, 3, 4, 8; kolejność budowania: 6, 2, 5, 7, 12, 11, 9, 10, 16, 15, 13, 14; b) kratownica łączona trójpodułżnicowa 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16 z nabudowanymi węzłami w kolejności: 1, 5, 9, 13; c) kratownica zespolowa.

zbudować różne kratownice o tej samej liczbie prętów. Przykładem tego jest kratownica z rys. 2.8c, która przez przestawienie prętów może być przekształcona na inną kratownicę prostą (rys. 2.14a) lub kratownicę łączoną (rys. 2.14b), lub wreszcie kratownicę (rys. 2.14c), która spełniając warunek (2.12b) nie może być rozwiązana ani metodą węzłów, ani przekrojów. Kratownice takie, spełniające warunek sztywności, a nie będące kratownicami prostymi lub łączonymi nazywamy kratownicami zespolowymi.

Należy również zauważyć, iż kryteria (2.12) nie wykluczają możliwości zbudowania kratownicy nieprawidłowej, a mianowicie z częścią przesztynioną (statycznie niewyznaczalną) i częścią niedosztynioną (mechanizmem). Przykładem takiego błędnego rozwiązania może służyć kratownica z rys. 2.14a, gdy pręt (5, 12) zamienimy prętem (8, 2), gdyż wówczas gródź prawa będzie przesztyniona, natomiast gródź środkowa niedosztyniona.

Kratownica (rys. 2.14c) jest przykładem często stosowanych *kratownic powłokowych*, których pręty zamykają jednospójną przestrzeń nie przechodząc przez jej wnętrze*. Okazuje się, że każda kratownica powłokowa zbudowana z trójkątów spełnia warunek (2.12b), jest więc kratownicą sztywną. Wynika to z twierdzenia Eulera**, które głosi, iż w dowolnym wielościanie liczba ścian s , naroży w i krawędzi p jest związana zależnością

$$p = w + s - 2. \quad (a)$$

Jeśli wielościan składa się z samych trójkątów, to liczba ścian s i krawędzi p związana jest zależnością dodatkową:

$$p = 3s/2, \quad (b)$$

gdyż każdy z boków należy jednocześnie do dwóch trójkątów. Wyznaczając stąd s i podstawiając do (a), mamy

$$p = w + (2p/3) - 2,$$

skąd

$$p = 3w - 6.$$

Traktując więc wielościan jako kratownicę, w której odpowiednikami naroży są węzły, a krawędzi — pręty, dochodzimy do stwierdzenia, że kratownica taka jest sztywna sama w sobie.

Kratownica całkowicie unieruchomiona, a więc spełniająca kryterium $p = 3w$ jest równocześnie kratownicą statycznie wyznaczalną. Oznaczając bowiem jako niewiadome

* Definicja kratownic powłokowych wynika z właściwości geometrycznych i nie ma nic wspólnego z podziałem na kratownice proste, łączone i zespolowe, który to podział jest zrobiony ze względu na metodę rozwiązania. Kratownica powłokowa może należeć do każdej z tych grup. Tak na przykład kratownica (rys. 2.11a) jest łączona, podczas gdy kratownica (rys. 2.7a) jest prosta.

** Dowód twierdzenia Eulera jest następujący. Przy tworzeniu wielościanu pierwszy wielobok ma tyle samo krawędzi p_1 , ile naroży w_1 . Przy dobudowaniu następnego wieloboku wykorzystujemy z wieloboku pierwszego jedną krawędź i dwa naroża, tak że liczba dodanych boków p_2 jest o 1 większa niż liczba dodanych naroży w_2 . Dobudowując trzeci wielobok wykorzystujemy już trzy naroża istniejące i dwa boki, a zatem znowu musimy dodać boków p_3 o 1 więcej niż naroży w_3 . Postępując w ten sposób stwierdzamy, że zależność ta jest spełniona dla $(s-2)$ dobudowanych ścian z wyjątkiem ostatniej ściany, którą otrzymuje się niejako automatycznie. W rezultacie możemy napisać $(s-1)$ zależności

$$p_1 = w_1, \quad p_2 = w_2 + 1, \quad p_3 = w_3 + 1, \quad \dots, \quad p_{s-1} = w_{s-1} + 1.$$

Dodając stronami te wszystkie równości mamy:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{s-1} = w_1 + w_2 + \dots + w_{s-1} + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{(s-2)\text{razy}},$$

a po oznaczeniu

$$p = \sum_1^{s-1} p_i, \quad w = \sum_1^{s-1} w_i$$

mamy

$$p = w + s - 2.$$

siły wewnętrzne N_i w prętach, możemy dla każdego z węzłów napisać trzy równania równowagi rzutów sił:

$$\left. \begin{aligned} \sum N_i \cos \alpha_i + Q_x &= 0, \\ \sum N_i \cos \beta_i + Q_y &= 0, \\ \sum N_i \cos \gamma_i + Q_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

gdzie $\vec{Q}[Q_x, Q_y, Q_z]$, jest obciążeniem zewnętrznym danego węzła, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ są kątami, jakie tworzy pręt i z osiami x, y, z , a sumowanie odnosi się do wszystkich prętów schodzących się w danym węźle. Jeśli kratownica ma w węzłów, to liczba równań (2.13) jest równa $3w$, a liczba niewiadomych jest równa liczbie prętów p . O ile więc kratownica spełnia warunek (2.12a), to liczba niewiadomych jest akurat równa liczbie równań statyki, a więc kratownica jest statycznie wyznaczalna. Dla kratownicy sztywnej samej w sobie jako 6 dodatkowych niewiadomych występuje 6 reakcji (węzłów) unieruchamiających ją w przestrzeni, tak że znowu liczba niewiadomych sił jest równa liczbie równań równowagi.

Układ równań (2.13) jest liniowy. Z wyjątkiem przypadku, gdy wyznacznik charakterystyczny układu równań (2.13) jest równy zeru, istnieje tylko jeden układ sił wewnętrznych, który przy danym obciążeniu zapewnia równowagę każdego z węzłów.

Kratownice, dla których wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru, nazywają się kratownicami o postaci krytycznej. Najprostszy przykład takiej kratownicy przedstawia kratownica trójpętowa (art. 2.2), gdy wyznacznik (2.2) jest równy zeru. Wprowadzając jednostkowe wektory i_k skierowane wzdłuż osi prętów 1, 2, 3 (rys. 2.3) i określone rzutami

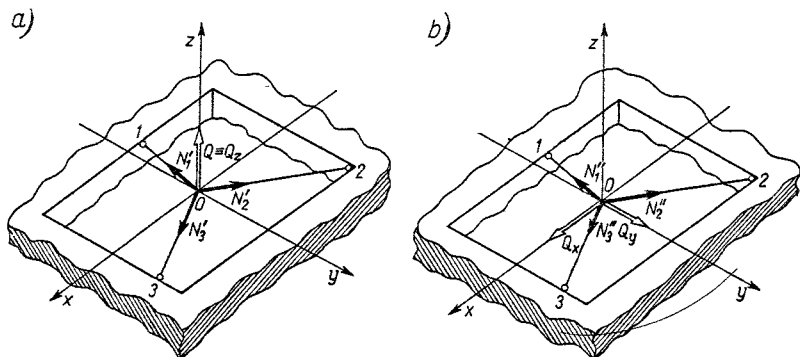
$$i_{kx} = \cos \alpha_k, \quad i_{ky} = \cos \beta_k, \quad i_{kz} = \cos \gamma_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

otrzymujemy wyznacznik (2.2) w postaci iloczynu mieszanego skalarno-wektorowego

$$D = \vec{i}_1 \cdot (\vec{i}_2 \times \vec{i}_3)$$

przedstawiającego objętość równoległościanu o krawędziach $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$. Objętość ta staje się równa zeru tylko wtedy, gdy te trzy wektory, a więc i trzy pręty leżą w jednej płaszczyźnie.

Obierając w tym przypadku układ osi x, y, z (rys. 2.15) rozróżniamy dwa warianty obciążenia tej przestrzennej kratownicy o postaci krytycznej. Przy obciążeniu I, gdy tylko $Q_z \neq 0$, siły N'_1, N'_2, N'_3



Rys. 2.15. Statyka trójpętowej kratownicy o postaci krytycznej
a) I wariant obciążenia; b) II wariant obciążenia.

stają się teoretycznie nieskończenie wielkie. W rzeczywistości pod działaniem nawet bardzo małej siły Q powstaną duże odkształcenia samych prętów, jak również dość znaczne przemieszczenie pionowe węzła O . W tym przypadku kratownica staje się *pseudomechanizmem*, to jest konstrukcją doznającą niewspółmiernie dużych odkształceń innego zupełnie rzędu niż spotykane zazwyczaj. Równowaga węzła możliwa jest tylko dlatego, że po odkształceniu pręty nie leżą ściśle w płaszczyźnie xy , lecz tworzą z nią niewielkie kąty. Zadanie wyznaczenia sił daje się nieliniowe, gdyż odkształcenia prętów wchodzi w równanie równowagi rzutów na oś pionową, ukryte w tych kątach, jakie po odkształceniu tworzą pręty z płaszczyzną xy .

Jeśli na przykład wszystkie trzy pręty kratownicy (rys. 2.15a) są identyczne i są rozstawione co 120° , to z warunków równowagi rzutów na oś x i y wynika, że $N'_1 = N'_2 = N'_3 = N'$, a punkt O doznaje tylko przemieszczenia pionowego. Jeśli po odkształceniu każdy z prętów tworzy z płaszczyzną xy kąt β , to równanie równowagi rzutów na oś pionową brzmi:

$$3N' \sin \beta = Q_z.$$

Wydłużenie każdego z prętów o pierwotnej długości l wynosi:

$$l \sec \beta - l = N'l/EA$$

i po podstawieniu N' do poprzedniego wzoru daje równanie trygonometryczne dla kąta β :

$$\tan \beta - \sin \beta = Q_z/3EA. \quad (c)$$

Jeśli $Q_z/EA = 1 \cdot 10^{-5}$, to z równania (c) mamy $\beta = 1^\circ 5'$. Aby zdać sobie sprawę z tego, jaki rząd przedstawiają powyższe liczby, przypuśćmy, że $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $A = 2$ cm², $l = 1$ m, wtedy

$$Q_z = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 = 40 \text{ kG}.$$

Przemieszczenie pionowe f węzła O wynosi:

$$f = l \tan \beta = 1,88 \text{ cm},$$

siła zaś w każdym z prętów jest:

$$N' = EA(\sec \beta - 1) = 2 \cdot 10^6 \cdot 2(\sec 1^\circ 5' - 1) = 710 \text{ kG},$$

a więc około 18 razy więcej niż siła obciążająca. Wszystkie te liczby potwierdzają poprzednie stwierdzenie, że konstrukcja przy takim obciążeniu staje się pseudomechanizmem.

W przypadku II (rys. 2.15b) równanie rzutów na oś z jest spełnione tożsamościowo, natomiast w dwóch pozostałych równaniach występują trzy niewiadome siły N'_k ($k = 1, 2, 3$). Ponieważ równań statyki jest za mało do wyznaczenia niewiadomych sił, przeto zadanie jest statycznie niewyznaczalne, ale liniowe. Również w przypadku, gdy $Q_x = Q_y = 0$, w prętach kratownicy mogą istnieć siły różne od zera. Obierając bowiem N'_1 zupełnie dowolnie, wartości sił pozostałych N'_2 i N'_3 można zawsze tak dobrać, aby równania statyki były spełnione. Jest to znana własność układów statycznie niewyznaczalnych określona jako naprężenie własne.

Przeanalizowany przykład kratownicy trójpętowej o postaci krytycznej pozwala wyciągnąć i uogólnić kilka wniosków.

Wniosek 1. *Krytyczna postać kratownicy jest wynikiem wyłącznie ustawienia prętów i węzłów, a nie zależy zupełnie od obciążenia, gdyż wartość wyznacznika charakterystycznego równań (2.13) zależy tylko od cosinusów kierunkowych.*

Wniosek 2. *Każda kratownica o postaci krytycznej staje się przy niektórych obciążeniach pseudomechanizmem.*

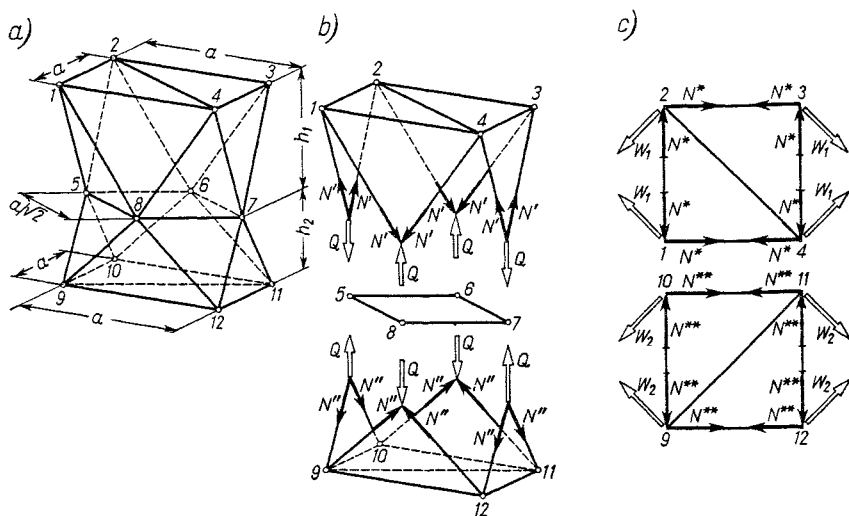
W omawianym przykładzie tym obciążeniem była siła Q_z . W przypadku ogólnym wniosek ten wypływa z własności układu równań liniowych*.

* Gdy wyznacznik układu równań (2.13) jest równy zeru, to przy istnieniu wyrazów wolnych (działaniu obciążeń Q) można zawsze znaleźć takie ich wartości, aby niewiadome $N'_i \rightarrow \infty$.

Wniosek 3. W każdej kratownicy o postaci krytycznej mogą istnieć siły wewnętrzne bez działania obciążenia zewnętrznego. Z matematyki wiadomo, że w przypadku gdy wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru, istnieją niezerowe rozwiązania jednorodnego układu, w którym wyrazy wolne są równe zeru. W naszym przypadku wyrazami wolnymi są obciążenia zewnętrzne, a niewiadomymi siły w prętach.

Formułując wniosek odwrotny do wniosku 3, mamy możliwość łatwego sprawdzenia, czy kratownica ma postać krytyczną. Jeśli mianowicie przy zerowym obciążeniu zewnętrznym możemy dobrać taki niezerowy układ sił wewnętrznych, który zapewni równowagę każdego z węzłów, to kratownica ma postać krytyczną, a wyznacznik charakterystyczny układu równań (2.13) jest równy zeru. Ta metoda zerowego obciążenia jest znacznie wygodniejsza aniżeli bezpośrednie obliczanie wartości wyznacznika.

Dla kratownic prostych i łączonych krytyczne postacie kratownic sprowadzają się albo do przypadku, gdy trójpętrowe naroże staje się zespołem trzech prętów leżących w jednej płaszczyźnie (rys. 2.15), albo gdy 6 prętów łączących dwa sztywne zespoły przecina się z jedną prostą. W kratownicach zespołowych takich ogólnych reguł sformułować nie można i analizę na postać krytyczną należy przeprowadzać dla każdego przypadku oddzielnie. Tak na przykład kratownica zespołowa (rys. 2.16a), w której wręgi skrajne są kwadratami o boku a , wręga środkowa kwadratem o boku $a/\sqrt{2}$ ustawionym syme-



Rys. 2.16. Analiza kratownicy zespołowej o postaci krytycznej
a) przestrzenny obraz kratownicy; b) obciążenie siłami wewnętrznymi; statyka wręg skrajnych.

trycznie, ma postać krytyczną przy dowolnych wartościach h_1 i h_2 . Jeśli bowiem podzielić kratownicę na trzy części (rys. 2.16b) i założyć, że oddziaływanie między górną i dolną częścią stanowią cztery siły $\pm Q$, to stwierdzamy, że pręty wręgi środkowej będą zerowe, oraz że część górna i dolna będą jako całość w równowadze. Rozpatrując z kolei część górną widzimy, że oddziaływania Q wywołują w prętach podłużnic siły

$$N' = Q \sqrt{4h_1^2 + a^2}/4h_1,$$

przy czym w prętach węzłów 5 i 7 są to siły rozciągające, w prętach zaś węzłów 6 i 8 ściskające. Przechodząc następnie do węzła 4 stwierdzamy, że oddziaływania prętów 4-8 i 4-7 dadzą w tym węźle wypadkową W_1 leżącą w płaszczyźnie wręgi górnej i skierowaną pod kątem 45° do pręta 3-4 (rys. 2.16c). Wielkość tej wypadkowej jest

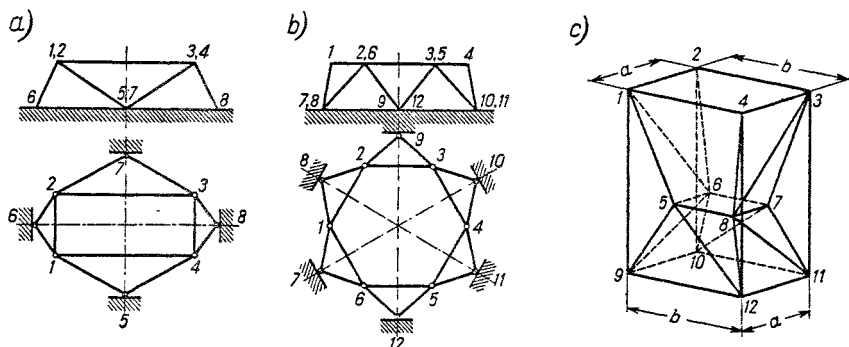
$$W_1 = Qa\sqrt{2}/4h_1.$$

Analogicznie przedstawiać się będą oddziaływania podłużnie na pozostałe węzły wręgi (rys. 2.16c) i w rezultacie w prętach 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 powstaną siły N^* jednakowe co do wielkości i równe:

$$N^* = Qa/4h_1$$

z tym tylko, że w dwóch prętach 1-2, 3-4 są one ściskające, w pozostałych rozciągające, podczas gdy przekątny pręt jest zerowy. W podobny sposób można rozpatrzyć równowagę dolnej części kratownicy otrzymując w wyniku te same wzory, w których h_1 zastąpiono przez h_2 . W ostatecznym rezultacie dochodzimy do wniosku, że w kratownicy (rys. 2.16a) mogą istnieć siły wewnętrzne zapewniające równowagę każdego z węzłów bez jakiegokolwiek obciążenia zewnętrznego, a to dowodzi, że kratownica ma postać krytyczną.

Kilka innych przykładów krytycznej postaci kratownic zespołowych podano na rys. 2.17. Przeprowadzenie analizy pozostawia się czytelnikowi.



Rys. 2.17. Przykłady kratownic zespołowych o postaci krytycznej

Pewną wskazówką do przewidywania, że kratownica ma postać krytyczną, jest to, że postać krytyczna towarzyszy często regularnym rozstawieniom węzłów i prętów, jednakże wskazówka ta nie może być uznana za regułę. Gdyby wieńiec kratownicy (rys. 2.17b) miał postać wielokąta foremnego o nieparzystej liczbie boków, to kratownica nie miałaby postaci krytycznej pomimo regularnego rozstawienia węzłów i prętów.

Przeprowadzone rozważania dotyczyły kratownic przestrzennych. Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla kratownic płaskich, przy czym wszystkie wnioski zostają w mocy.

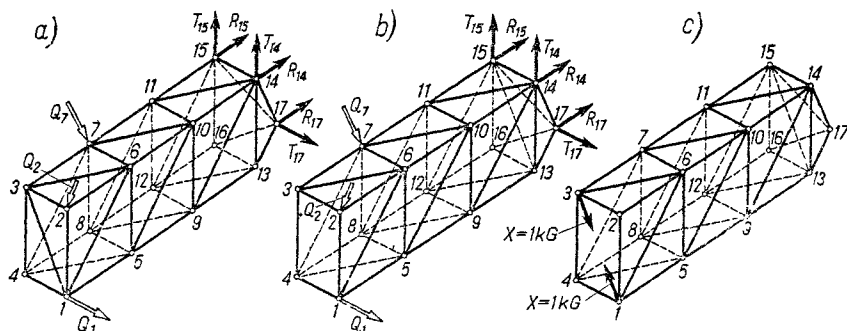
Praktyczne znaczenie wszystkich wywodów jest następujące. W kratownicach przestrzennych, stanowiących konstrukcje bardziej złożone aniżeli kratownice płaskie, istnieje w znacznie większym stopniu możliwość pojawienia się krytycznej postaci kratownicy, zwłaszcza przy naturalnej tendencji konstruktorów do tworzenia układów regularnych. Uświadomienie sobie tego niebezpieczeństwa, jak również przedstawienie metod służących do wykrycia takich nieprawidłowości konstrukcji było istotnym celem przeprowadzonych rozważań.

2.7. Przestrzenne kratownice zespołowe. Metoda prętów zastępczych

W odróżnieniu od płaskich, kratownice przestrzenne należą przeważnie do kratownic zespołowych. Rozwiązanie ich jest możliwe przez wyznaczenie niewiadomych z układu $3w$ równań (2.13) równowagi węzłów, jednakże metoda ta jest niepraktyczna. Z tego powodu stosujemy metodę prętów zastępczych (tzw. metodę Henneberga), polegającą na

takim przedstawieniu stosowanej liczby prętów, aby przekształcona kratownica stała się kratownicą prostą lub łączoną.

Przypuścimy, że mamy rozwiązać zespolową kratownicę powłokową (rys. 2.18a) obciążoną siłami Q , a utrzymaną w równowadze sześcioma reakcjami. W danym przypadku wystarczy usunąć tylko pręt (1, 3) wstawiając go jako pręt (13, 15), aby kratownica stała się już kratownicą prostą. Istotnie w kratownicy przekształconej (rys. 2.18b) możemy



Rys. 2.18. Rozwiązanie kratownicy zespolowej metodą prętów zastępczych

a) kratownica zespolowa powłokowa $m = 17$, $p = 45$; b) kratownica prosta z wprowadzonym prętem zastępczym 13-15. Siły wewnętrzne N_i ; c) kratownica prosta z prętem zastępczym 13-15. Siły wewnętrzne n_i .

rozwiązać wszystkie węzły według następującej kolejności: 2, 3, 1, 4, 6, 7, 5, 8, 10, 11, 9, 12, 14, 13, 15 i 16, gdyż w każdym z węzłów spotykamy tylko trzy niewiadome siły wewnętrzne N_i . W tej samej kolejności można obliczyć siły n_i wywołane w tych samych prętach działaniem sił $X = 1 \text{ kG}$ przyłożonych w węzłach 1 i 3 (rys. 2.18c). Jeśli teraz $X \neq 1 \text{ kG}$, to z zasady superpozycji wypadkowa siła W_i w przecie i jest

$$W_i = N_i + n_i X. \quad (2.14)$$

Miedzy innymi w przecie zastępczym (13, 15) oznaczonym dla krótkości wskaźnikiem a , siła wypadkowa

$$W_a = N_a + n_a X. \quad (a)$$

W rzeczywistości pręta zastępczego nie ma i po to, aby móc go usunąć trzeba, aby między węzłami 1 i 3 działała siła X sprowadzająca W_a do zera. W wyniku:

$$X = -(N_a/n_a). \quad (2.15)$$

Mając siłę X , przedstawiającą oddziaływanie usuniętego pierwotnie pręta (1, 3) można z wzoru (2.14) wyznaczyć siły we wszystkich prętach. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie, zapewniając równowagę każdego węzła, jest na zasadzie jednoznaczności rozwiązania odpowiednią prawidłową i jedyną możliwą.

Biorąc jako przykład kratownicę (rys. 2.18a) obciążoną tylko $Q_1 \neq 0$ i analizując pracę konstrukcji z wprowadzonym prętem zastępczym (rys. 2.18b), dochodzimy do wniosku (rys. 2.18c), że ścian boczne i górne w obrębie 3 grodu miały wszystkie pręty zerowe. Biorąc dla prostoty $l_{1,4} = l_{1,5} = l_{6,9} = l_{9,13} = l_{1,2} = b$ oraz wysokość $\Delta 13, 16, 17$ równą też b otrzymujemy siły w prętach jak na rys. 2.19a. Stan obciążenia $X = 1 \text{ kG}$ daje siły wskazane na rys. 2.19b, przy czym w obrębie 3 grodu siły te wyzna-

które w rzeczywistości muszą być równe zeru. Otrzymujemy stąd dwa równania dla określenia X_1 i X_2 . Rozwiązanie ich daje:

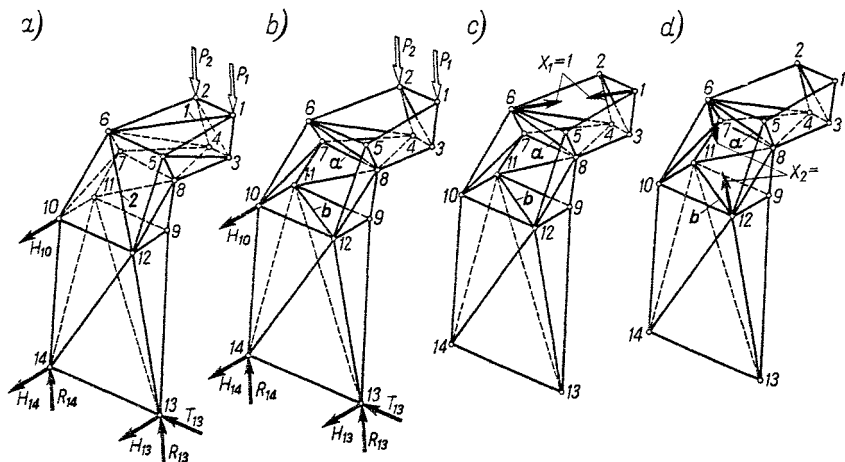
$$X_1 = -\frac{N_a n'_b - N_b n'_a}{n'_a n''_b - n'_b n''_a}, \quad X_2 = -\frac{N_a n'_b - N_b n'_a}{n'_a n''_b - n'_b n''_a}. \quad (2.17)$$

W przypadku liczby prętów zastępczych większej niż dwa, dysponujemy odpowiednio większą liczbą równań typu (b), a stąd ze wzoru typu (2.16), przybierającego postać

$$W_i = N_i + n'_i X_1 + n''_i X_2 + \dots + n^{(k)}_i X_k, \quad (2.18)$$

możemy wyznaczyć siły we wszystkich prętach.

Przy stosowaniu metody prętów zastępczych konieczne jest sprawdzenie, czy wprowadzając pręt zastępczy nie spowodowaliśmy pojawienia się krytycznej postaci prze-



Rys. 2.20. Przykład rozwiązania kratownicy zespołowej z dwoma zastępczymi prętami
a) konstrukcja pierwotna 1, 2 pręty usuwane; b) konstrukcja z prętami zastępczymi a, b; obciążenie zewnętrzne P_1, P_2 równoważone 6 reakcjami R, H, T wywołuje siły w prętach N_i ; c) stan obciążenia $X_1 = 1$ kg; siły w prętach n'_i ; d) stan obciążenia $X_2 = 1$ kg; siły w prętach n''_i .

kształconej kratownicy. Ponieważ przekształcona kratownica ma być prosta lub łączona, przeto należy zwrócić uwagę, aby nigdzie w przekształconej kratownicy nie pojawiło się naroże płaskie oraz aby nigdzie 6 prętów łączących nie przecinało się z jedną prostą.

Metoda prętów zastępczych będąc najbardziej uniwersalną metodą rozwiązywania kratownic zespołowych jest stosowana w tych przypadkach, gdy zawodzą inne metody rozwiązywania tych kratownic. Powodem jest to, że w zastosowaniach technicznych, gdy liczba prętów w kratownicy jest rzędu 100 i więcej, dokładność rachunków według metody prętów zastępczych jest mała.

W szczególności dla kratownic powłokowych ostateczna wartość siły wewnętrznej (wzory 2.14 i 2.18) przedstawia się na ogół pod postacią różnicy dwóch bliskich wartości, wskutek czego przy przeprowadzaniu obliczeń wykreślić lub na suwaku, wiarygodność rezultatu jest problematyczna.

2.8. Niektóre ułatwienia analizy kratownicy

Jakkolwiek każdą statycznie wyznaczalną kratownicę przestrzenną można rozwiązać metodą węzłów, przekrojów lub prętów zastępczych, to jednak bardzo często spotykamy przypadki, gdy rozwiązanie można znacznie uprościć nie stosując tych ogólnych metod. Jedną z takich możliwości dają reguły wynikające z równowagi przestrzennego układu sił, przecinających się w jednym punkcie (węźle) O , a mianowicie:

1. Trzy siły nie działające w jednej płaszczyźnie mogą być tylko wtedy w równowadze, gdy każda z nich jest równa zero (patrz wzór 2.1).

2. Gdy z czterech sił, nie działających w jednej płaszczyźnie, dwie działają wzdłuż jednej prostej, to równowaga zachodzi tylko wtedy, gdy te współliniowe siły są równe i przeciwnie skierowane, pozostałe zaś dwie siły są równe zero.

3. Jeśli z n sił, $(n-2)$ siły działają w jednej płaszczyźnie, a tylko $(n-1)$ -sza i n -ta siła poza tą płaszczyzną, to mając wartość jednej z tych dwóch sił, można wartość drugiej wyznaczyć bezpośrednio z warunku rzutów na oś prostopadłą do płaszczyzny wyznaczonej przez siły pozostałe.

4. Jeśli z n sił $(n-1)$ działa w jednej płaszczyźnie, a tylko n -ta poza nią, to równowaga zachodzi tylko wtedy, gdy ta n -ta siła jest równa zero.

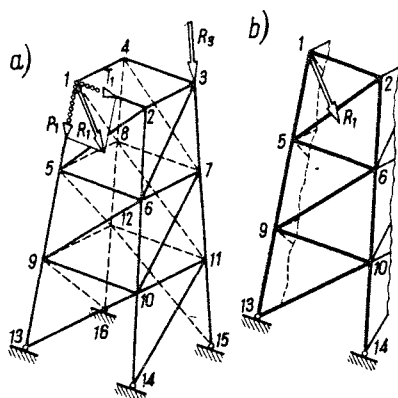
Stosując te reguły można osiągnąć uproszczenie polegające na *wyeliminowaniu z analizy danej kratownicy pojedynczych prętów lub grup prętów nieczynnych przy danym obciążeniu*. Tak na przykład w kratownicy (rys. 2.8c) przy działaniu dwóch par sił o momencie Pa zastosowanie reguły (1) eliminuje z analizy pręty schodzące się w węźle 2, 13 i 14. Stosując następnie regułę (4) do sił schodzących się w węźle 15 widać, iż siła $N_{15,16} = 0$, jako jedyna nie leżąca w płaszczyźnie, w której działają $N_{10,15}$, $N_{11,15}$ i P . Przechodząc z kolei do węzła 16 i nadal stosując regułę (4) widać, iż $N_{16,11} = 0$. Dalsze stosowanie tej samej reguły określa nieczynność prętów (12, 11), (9, 10), (12, 10), (12, 7), (7, 8) i (5, 6). Wreszcie rozpatrując węzeł 4 i stosując regułę (2), otrzymujemy, że pręty (4, 8), (4, 3) są też zerowe, a siła $N_{4,1} = -P$. W wyniku mamy znaczne uproszczenie analizy, gdyż z 42 pierwotnie nieznanymi sił mamy określonych już połowę.

Podana analiza może wywołać wrażenie, iż stosowanie reguł (1÷4) daje uproszczenia tylko w przypadku kratownicy prostych. Tak jednak nie jest. Biorąc bowiem kratownicę zespolową o płaskich ścianach (rys. 2.21a) obciążoną tylko siłą R_1 ($R_3 = 0$) w płaszczyźnie (1, 2, 14, 13) i stosując regułę (4) do węzła 2, a następnie regułę (1) do węzłów 3 i 4 i wreszcie regułę (4) do węzła 1 otrzymujemy w wyniku, iż wszystkie pręty górnej gradzi leżące poza płaszczyzną (1, 2, 14, 13) są nieczynne. Powtarzając to samo rozumowanie dla gradzi środkowej i dolnej otrzymujemy na koniec, iż jedynymi prętami, w których przy obciążeniu R_1 mogą (ale nie we wszystkich muszą) działać siły wewnętrzne są pręty ściany (1, 2, 14, 13) (rys. 2.21b). W ten sposób analizę kratownicy przestrzennej sprowadzamy do rozwiązania kratownicy płaskiej unikając kłopotliwej metody prętów zastępczych.

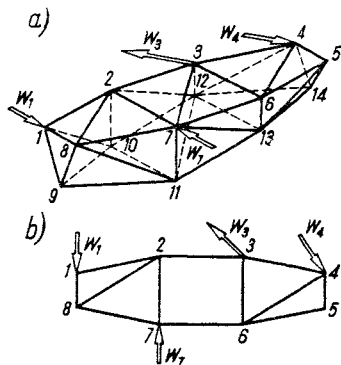
Drugą możliwość uproszczeń daje zastosowanie zasady jednoznaczności rozwiązania (art. 1.5). Biorąc znowu kratownicę (rys. 2.21a) obciążoną tylko siłą R_3 ($R_1 = 0$) założmy, iż pracuje tylko podłużnica (3, 15) i że siła we wszystkich jej odcinkach jest stała i równa

— R_3 . Łatwo sprawdzić, że przy tym założeniu równowaga wszystkich węzłów jest spełniona, a więc obrany przez nas na chybił trafił układ sił jest, zgodnie z zasadą jednoznaczności rozwiązania, odpowiedzią prawidłową i jedyną. Wypadkowe siły w prętach kratownicy (rys. 2.21) przy jednoczesnym działaniu sił R_1 i R_3 znajdziemy stosując zasadę superpozycji do wyniku powyższego ($R_1 = 0$, $R_3 \neq 0$) i poprzedniego (rys. 2.21b).

Szczególnie ważną regułę daje zastosowanie zasady jednoznaczności w przypadku kratownicy przestrzennej o ścianach płaskich. Obciążmy taką kratownicę sztywną samą w sobie, z jedną tylko ścianą płaską (1, ..., 8) (rys. 2.22a), siłami W_1 , W_5 , W_4 i W_7 le-



Rys. 2.21. Przykład uproszczonej analizy kratownicy

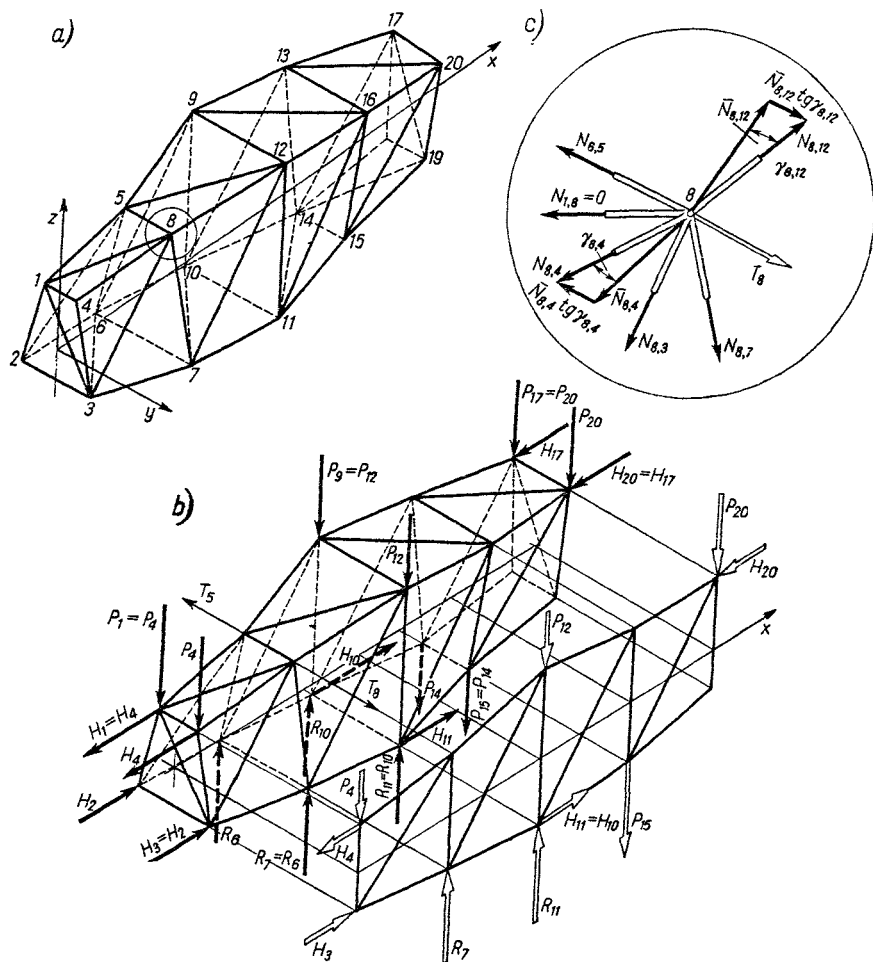


Rys. 2.22. Kratownica o jednej ścianie płaskiej obciążona samozrównowazonym układem czterech sił W

żącymi w płaszczyźnie tej ściany i tworzącymi układ równoważący się. Założmy, że pod takim obciążeniem w prętach, należących do ściany obciążonej, pojawiają się siły obliczone tak, jakby ta kratownica była izolowana od reszty, podczas gdy we wszystkich innych prętach są one równe zero. Sprawdźmy, czy przy takim założeniu zachowana jest równowaga każdego z węzłów. Dla węzłów leżących poza ścianą obciążoną, np. dla węzła 12, jest to rzeczywiście spełnione, gdyż zgodnie z założeniem $N_{12,13} = N_{12,10} = N_{12,11} = N_{12,4} = N_{12,3} = N_{12,2} = N_{12,14} = 0$. Dla węzła leżącego na ścianie płaskiej, np. węzła 7, równanie równowagi rzutów na prostopadłą do płaszczyzny ściany jest też spełnione. Z założenia bowiem $N_{7,13} = N_{7,11} = 0$, a siły w prętach (7, 8), (7, 2), (7, 3), (7, 6) i siła W_7 nie dają rzutów na tę prostopadłą. Pozostają warunki rzutów na dwie osie, leżące w płaszczyźnie ściany, lecz są one również spełnione, gdyż siły w prętach obliczyliśmy właśnie tak, aby te warunki równowagi były spełnione. Wynikiem więc rozważania jest stwierdzenie słuszności założenia wstępnego, co można ująć w regułę 5.

5. Jeśli w statycznie wyznaczalnej kratownicy przestrzennej mającej ścianę płaską, sztywną samą w sobie, wszystkie obciążenia równoważą się w płaszczyźnie tej ściany, to siły wewnętrzne w prętach nie należących do ściany obciążonej są równe zero, a siły w prętach ściany wyznacza się jak dla kratownicy płaskiej.

Wyjaśnienia wymaga dodatkowy warunek, aby obciążona ściana płaska izolowana od reszty konstrukcji była sztywna sama w sobie. Przypuśćmy, że w omawianej kratownicy pręt (3, 7) został zastąpiony prętem (7, 12). Kratownica jako całość jest nadal sztywna, lecz płaska ściana staje się sama w sobie mechanizmem (rys. 2.22b), dla którego niemożliwe jest wyznaczenie takiego układu sił N , aby w płaszczyźnie kraty były spełnione warunki równowagi, a to obala całe rozumowanie.



Rys. 2.23. Statyka kratownicy czteropodłużnicowej symetrycznej przy symetrycznym obciążeniu

a) szkic konstrukcji; b) określenie rzutu i obciążeń ściany bocznej; c) statyka węzła 8.

W przypadku symetrycznych kratownic 3- i 4-podłużnicowych* (rys. 2.23a), wykorzystanie zasady jednoznaczności pozwala w prosty sposób rozwiązać przypadek działania obciążenia symetrycznego (rys. 2.23b). Zrzutujemy mianowicie ścianę boczną tej kratownicy na płaszczyznę symetrii przenosząc jednocześnie wszystkie siły do niej równoległe (tj. P , H , R). Ten układ sił jest w równowadze, gdyż przez takie przeniesienie trzy warunki równowagi, tj. suma rzutów na osie x i z oraz suma momentów względem osi y nie uległa zmianie, pozostałe zaś warunki równowagi były spełnione tożsamościowo. Wyznamy siły $\bar{N}_i$ w prętach tej kratownicy płaskiej i założymy, że rzeczywista wartość siły w pręcie ściany bocznej $N_i = \bar{N}_i \sec \gamma_i$, gdzie γ_i — kąt między prętem i a płaszczyzną symetrii. Założymy, że siły we wszystkich wykrzyżowaniach ścian górnej i dolnej są równe zeru. Sprawdźmy teraz, czy przy tych założeniach będzie spełniona równowaga każdego z węzłów kratownicy przestrzennej. Biorąc dowolny węzeł, np. 8 (rys. 2.23c), obciążony dodatkowo siłą T_8 zauważymy, że zamiana siły $\bar{N}_{8,12}$ na siłę $N_{8,12} = \bar{N}_{8,12} \sec \gamma_{8,12}$ równoznaczna jest z dodaniem siły $\bar{N}_{8,12} \tg \gamma_{8,12}$ prostopadłej do płaszczyzny symetrii, a zatem pokrywającej się z prętem 8-5. To samo dotyczy wszystkich pozostałych sił schodzących się w tym węźle. Obierając siłę $N_{8,5} = T_8 + \sum \bar{N}_i \tg \gamma_i$, gdzie sumowanie odnosi się do wszystkich prętów schodzących się w tym węźle** spełniamy warunek równowagi węzła 8 w kierunku prostopadłym do płaszczyzny symetrii, a pozostałe dwa warunki już przedtem spełniliśmy, dzięki stosownemu obliczeniu sił $\bar{N}_i$. Ponieważ identyczną wartość $N_{8,5}$ otrzymamy z rozpatrywania równowagi symetrycznie położonego węzła 5, to dowód spełnienia równowagi wszystkich węzłów przy poczynionych założeniach można uważać za przeprowadzony.

Jak widać z powyższego, przy obciążeniu symetrycznym pracują jedynie pręty ścian bocznych i rozpórki prostopadłe do płaszczyzny symetrii.

2.9. Linie wpływowe dla kratownic

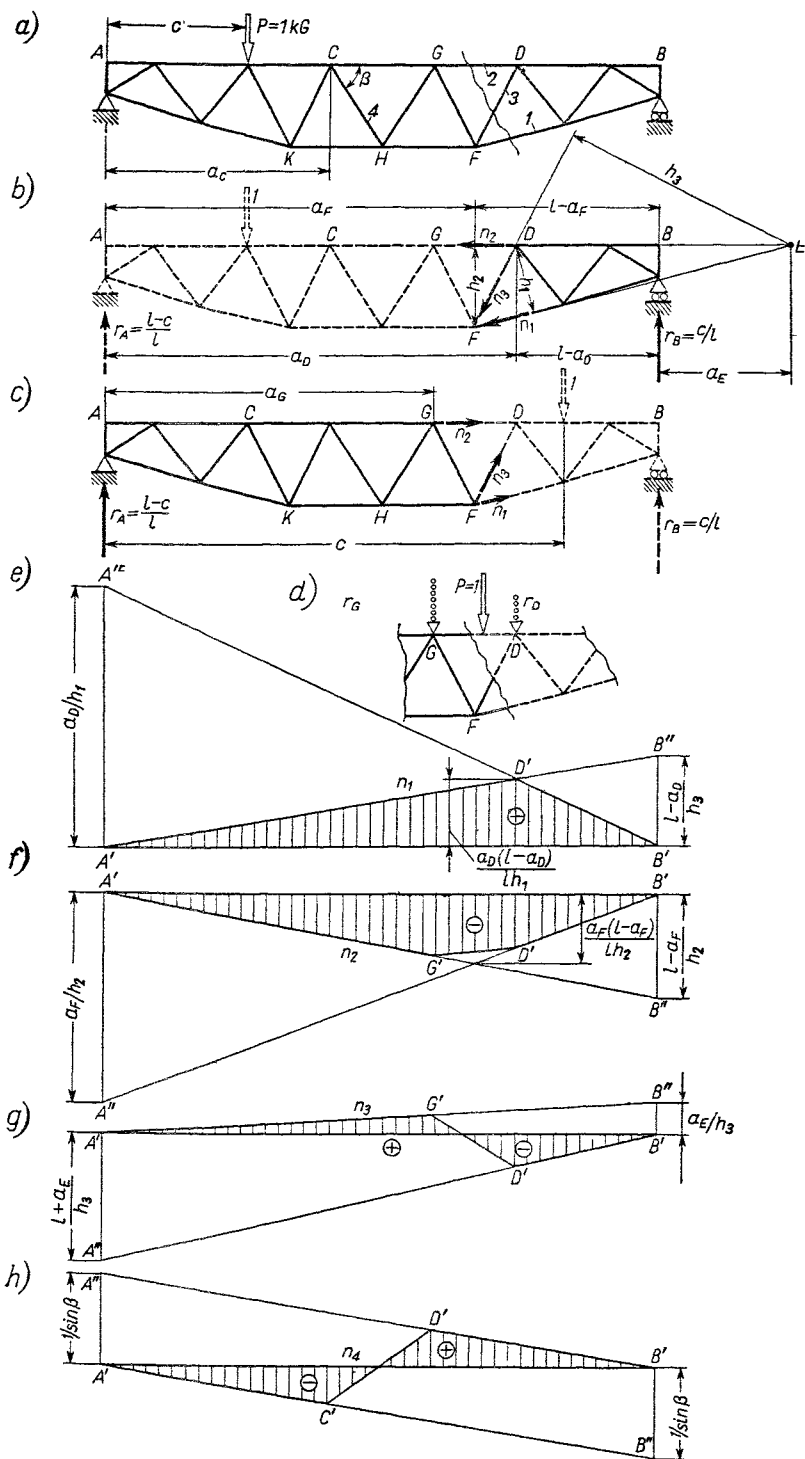
Jak będzie podane w rozdziale 3, wiele zagadnień statyki kratownic przestrzennych daje się sprowadzić do rozwiązania kratownic płaskich, dlatego też wyznaczanie linii wpływowych ograniczymy głównie do tych kratownic. Interesować będą nas siły wzdłużne w prętach wywołane obciążeniem ogólnym, gdyż działanie obciążenia lokalnego (rys. 2.2) i odpowiadające mu linie wpływowe pokrywają się z liniami wpływowymi dla belek (art. 1.6).

Biorąc kratownicę (rys. 2.24) wyznaczmy prawo zmienności sił w prętach 1, 2, 3, gdy siła $P = 1$ kG przesuwa się po pasie ACB . Siły te najłatwiej wyznaczyć metodą Rittera, prowadząc przekrój przez te trzy pręty. Musimy przy tym rozróżnić trzy przypadki w zależności od tego, jak położona jest siła P względem punktów G i D części pasa, przez który był przeprowadzony przekrój. Gdy siła P znajduje się na lewo od G ($c < a_G$), wygodniej jest rozpatrywać prawą część kratownicy obciążoną tylko reakcją $r_B = c/l$. Wtedy siły n_1 , n_2 , n_3 (rys. 2.24b) są równe:

$$n_1 = \frac{c}{l} \frac{l-a_D}{h_1} \text{ kG/kG}, \quad n_2 = -\frac{c}{l} \frac{l-a}{h_2} \text{ kG/kG}, \quad n_3 = \frac{c}{l} \frac{a_F}{h_3} \text{ kG/kG}. \quad (a)$$

* Dla kratownic 4-podłużnicowych istnieje dodatkowe ograniczenie, aby ściany górna i dolna były prostopadłe do płaszczyzny symetrii, natomiast wykrzyżowania w tych ścianach nie muszą być symetryczne.

** Kąt γ uważamy za dodatni, gdy wychodząc z danego węzła pręt odchodzi od płaszczyzny symetrii. Tak więc $\gamma_{8,12} > 0$, ale $\gamma_{8,4} < 0$.



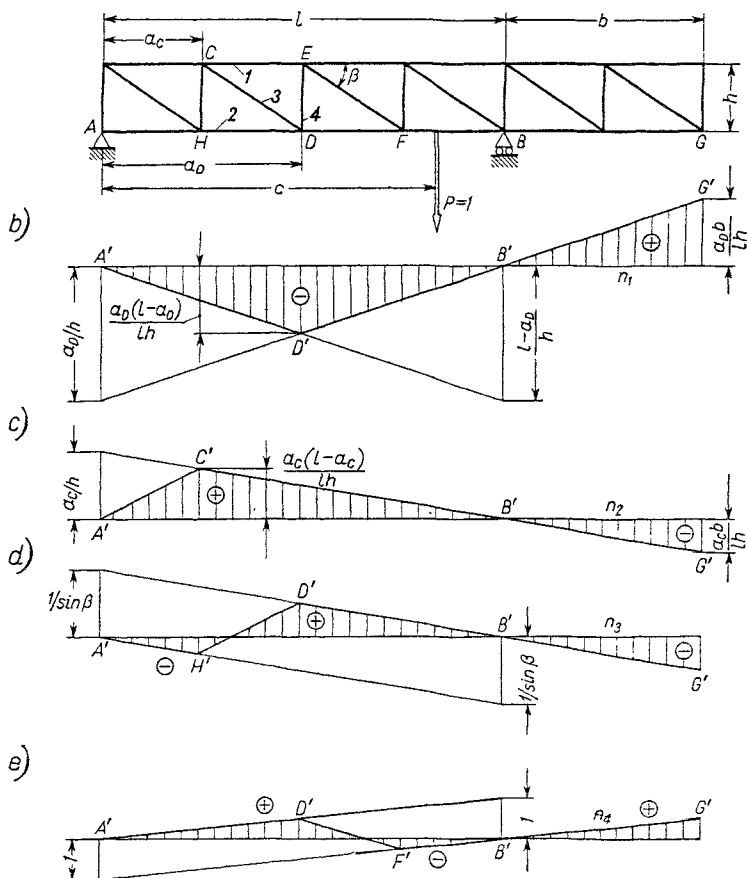
Rys. 2.24. Linie wpływowe sił w prętach typowej kratownicy płaskiej

Jeśli z kolei $c > a_D$, wygodniej jest rozpatrywać równowagę części lewej (rys. 2.24c) obciążonej reakcją $r_A = (l-c)/l$ otrzymując:

$$n_1 = \frac{l-c}{l} \frac{a_D}{h_1} \text{ kG/kG}, \quad n_2 = -\frac{l-c}{l} \frac{a_F}{h_2} \text{ kG/kG}, \quad n_3 = -\frac{l-c}{l} \frac{a_E+l}{h_3} \text{ kG/kG}. \quad (b)$$

Wreszcie, gdy siła P znajduje się między G i D , to rozkładając ją na dwie składowe r_G i r_D (rys. 2.24d) widzimy, że rozkład ten nie wpływa zupełnie na n_1 , gdyż z warunku równowagi prawej części wynika że siła r_D daje względem D moment równy zeru. A zatem wartość siły n_1 będzie nadal określona wzorem (a). Inaczej przedstawia się sprawa z siłą n_2 , gdyż rozpatrując równowagę lewej części widzimy, że poza momentem od r_A wejdzie w równanie moment siły r_G równy $-r_G(a_F-a_G)$. W rezultacie siła

$$n_2 = -\frac{1}{h_2} \left[\frac{l-c}{l} a_F - \frac{a_D-c}{a_D-a_G} (a_F-a_G) \right] \quad (c)$$



Rys. 2.25. Linie wpływowe sił w kratownicy o pasach równoległych

liniowo zależy od zmiennej c . Jak łatwo sprawdzić dla $c = a_G$ i $c = a_D$ wartość n_2 (wzór c) pokrywa się odpowiednio z wartościami n_2 ze wzorów (a) i (b), co oznacza, że wykres tworzy linię łamaną.

Analogicznie można udowodnić, że linię łamaną bez przeskoków musi tworzyć linia wpływowa n_2 . Mając odpowiednie zależności linie wpływowe (rys. 2.24e, f, g) kreślimy jak dla belek, art. 1.6.

Jeśli pasy kratownicy są równoległe, to siłę w wykrzyżowaniu najłatwiej wyznaczyć w warunkach rzutu na oś prostopadłą do pasów. Tak na przykład dla pręta 4, prowadząc przekrój przez pręty $H-K$, 4 i $C-G$, gdy $c > a_G$, mamy w warunkach równowagi lewej części kratownicy

$$n_4 \sin \beta - r_A = 0,$$

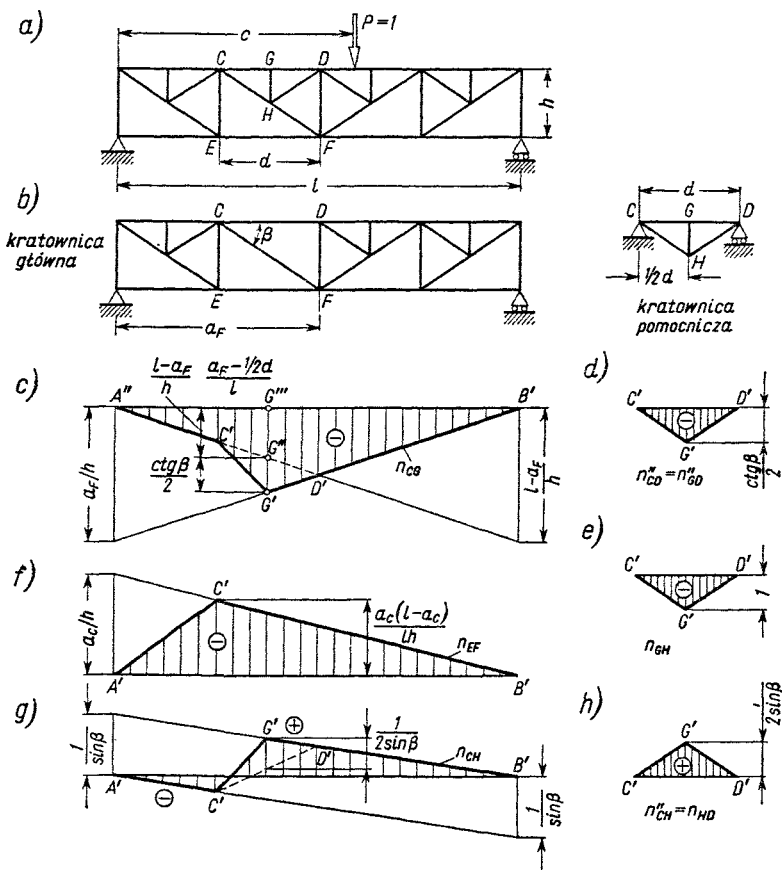
skąd

$$n_4 = (l-c)/l \sin \beta. \quad (d)$$

Podobnie, gdy siła P jest na lewo od C ($c < a_C$)

$$n_4 = -c/l \sin \beta. \quad (e)$$

Wreszcie gdy siła P znajduje się między C i G , to dowodząc jak dla siły n_2 znajdziemy, że n_4 zmienia się liniowo w funkcji c . W wyniku otrzymujemy linię wpływową jako łamaną $A'C'D'B'$ (rys. 2.24h).



Rys. 2.26. Linie wpływowe sił w kratownicy łączonej

W przypadku szczególnym, gdy pasy kratownicy są na danym odcinku równoległe, a rozpórki prostopadłe (rys. 2.25), linie wpływowe upodabniają się do linii wpływowych dla belki (art. 1.6). Tak więc siłę w pasie 2 otrzymuje się dzieląc rzędne linii wpływowej momentu gącego belki AB dla przekroju C przez odległość pasów h . Podobnie dla pasa 1 rzędne linii wpływowej momentu gącego należy określić dla D , względem którego przy obliczaniu siły n_1 formułujemy równanie równowagi momentów. Dla siły n_3 rzędne obliczamy według wzorów (d) i (e). Podobnie obliczamy linię wpływową dla n_4 , pamiętając tylko, że kąt $\beta = 90^\circ$, a punktami załomu wykresu są D i F .

W niektórych konstrukcjach w celu uniknięcia zbyt dużych momentów zginających od obciążeń lokalnych stosuje się dodatkowe podparcia pasów bezpośrednio obciążonych siłą przesuwą (rys. 2.26). Wyznaczenie linii wpływowych nie sprawi trudności, jeśli potraktować tę kratownicę jako złożoną w dwóch nałożonych na siebie: głównej i pomocniczej (rys. 2.26b). Siły wypadkowe w prętach (a więc i linie wpływowe) są sumą algebraiczną sił w nakrywających się prętach. Prześledźmy wyznaczenie linii wpływowej dla pręta CG . Dla kratownicy głównej linią wpływową n'_{CG} jest linia łamana $A''D'B'$ (rys. 2.26c), podczas gdy dla kratownicy pomocniczej — łamana $C'G'D'$ (rys. 2.26d). Suma tych dwóch wykresów daje ostatecznie linię łamaną $A''C'G'D'B'$ (rys. 2.26e), przy czym punkty $G'D'$ i B' leżą na jednej prostej, gdyż

$$G'G''' = G'G'' + G''G''' = a_F[l - a_F + (d/2)]/hl,$$

a więc rzędna na prostej $B'D'$.

Podobnie n_{CH} otrzymuje się jako sumę rzędnych n'_{CH} łamanej $A'C'D'B'$ (rys. 2.26g) oraz n''_{CH} rzędnych linii $C'G'D'$ (rys. 2.26h). W wyniku łamana $A'C'G'D'B'$ (rys. 2.26g) jest linią wpływową n_{CH} , przy czym linia $G'D'B'$ jest znowu linią prostą. Dla prętów, które występują tylko jako pręty kratownicy głównej bądź pomocniczej, linie wpływowe określone dla odpowiedniej kratownicy są odpowiednią ostateczną. Tak na przykład n_{EF} (rys. 2.26f) jest obliczone jak gdyby żadnej kratownicy pomocniczej nie było, a n_{HD} (rys. 2.26h) i n_{GH} (rys. 2.26e), jak gdyby nie było kratownicy głównej. Co się tyczy siły n_{HF} , to jest ona równa pierwszemu składnikowi n'_{CH} , to jest łamanej $A'C'D'B'$ (rys. 2.26g).

2.10. Analityczna metoda wyznaczania odkształceń kratownic

W kratownicach statycznie wyznaczalnych obliczenie odkształceń ma na celu udowodnić dostateczną sztywność konstrukcji, tj. wykazać, że odkształcenia nie przekraczają wartości dopuszczalnych przez obowiązujące przepisy*.

Wyznaczenie odkształceń kratownic polega na określeniu przemieszczeń ich węzłów. Postępując według reguł art. 1.2 musimy zatem dla wyznaczenia szukanego przemieszczenia jednego z węzłów obciążyć kratownicę w tym węźle siłą $P_{\text{dod}} = 1$ kG działającą w kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Ponieważ założono przegubowe połączenie prętów kratownicy (art. 2.1), to ta siła P_{dod} wywoła w prętach kratownicy tylko siły wzdłużne n_p kG/kG stałe w poszczególnych prętach. Uwzględniając to po podstawieniu do (1.10) mamy

$$f = \sum_1^k n_p u_p, \quad (2.19)$$

gdzie u_p — całkowite wydłużenie pręta p wywołane dowolnymi przyczynami (art. 1.2), a sumowanie obejmuje wszystkie k prętów kratownicy.

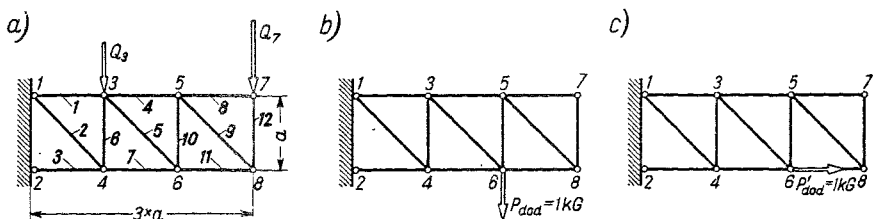
* Przepisy takie istnieją w lotnictwie, budowie dźwigów itd. Tak na przykład wymaga się, aby maksymalne ugięcie mostu suwnicy nie przekraczało $1 \div 2 \cdot 10^{-3} l$ (l — długość mostu).

Jeśli przyczyną powstania u_p był jednocześnie wpływ obciążenia zewnętrznego, dającego siły N_p , równomierne ogrzanie pręta (współczynnik rozszerzalności λ_p) o Δt_p stopni i błąd wykonawczy d_p , to

$$u_p = \frac{N_p l_p}{E_p A_p} + \lambda_p \Delta t_p l_p + d_p. \quad (2.20)$$

W szczególności, jeśli $N_p = 0$ ($p = 1, \dots, k$), a pozostałe składniki nie są równe zeru, to wartość f według (2.19) wyznacza przemieszczenie wywołane samymi tylko błędami wykonawczymi i ogrzaniem. Samo u_p traktujemy jako dodatnie, gdy jest ono wydłużeniem się pręta.

Obliczenia odkształceń prowadzimy najczęściej w postaci tabelarycznej. Prześledźmy ich przebieg na przykładzie kratownicy (rys. 2.27a), dla której szukamy pionowego przemieszczenia węzła 6 przy obciążeniu $Q_1 = 2$ t, $Q_7 = 5$ t, przekrojach podłużnie 10 cm², przekrojach rozpórek i wykrzyżowań



Rys. 2.27. Wyznaczenie przemieszczenia liniowego

- a) obciążenie zewnętrzne; siły wewnętrzne w prętach N_i ; b) obciążenie dodatkowe; siły wewnętrzne w prętach n_i ;
c) obciążenie dodatkowe; siły wewnętrzne w prętach n'_i .

5 cm², $a = 1$ m. Zestawiając dane geometryczne oraz obliczając siły N_p otrzymujemy trzy pierwsze kolumny tabl. 2.1. Obliczając następnie u_p z wzoru (2.20) ($E_p = 2 \cdot 10^8$ kG/cm²; $\Delta t_p = 0$; $d_p = 0$) otrzymujemy kolumnę 4. Siły n_p (kolumna 5) otrzymujemy jako wynik obciążenia kratownicy siłą pionową $P_{\text{dod}} = -1$ kG w węzle 6 (rys. 2.27b), gdyż ona właśnie odpowiada szukanemu przemieszczeniu jako siła uogólniona. Wykonanie mnożenia kolumn 4 przez 5 daje kolumnę 6, której sumą

$$f = \sum_1^{12} n_p u_p = 0,679 \text{ cm} \approx 6,8 \text{ mm}.$$

Suma ta jest szukanym przemieszczeniem pionowym. Dodatnia wartość f oznacza, iż przemieszczenie następuje zgodnie ze zwrotem P_{dod} , a więc do dołu. Gdybyśmy zamiast pionowego przesunięcia węzła 6 chcieli wyznaczyć jego przemieszczenie poziome, to wprowadzając nową siłę $P'_{\text{dod}} = 1$ kG skierowaną poziomo (rys. 2.27c) otrzymujemy siły n'_p i następnie $n'_p u_p$ (kolumny 7 i 8). Suma

$$f' = \sum_1^{12} n'_p u_p = -0,135 \text{ cm} \approx -1,3 \text{ mm}$$

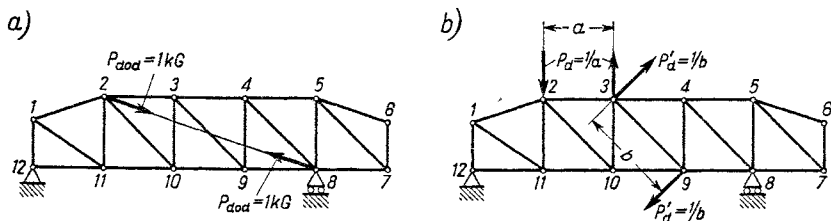
daje wartość szukanego przemieszczenia poziomego, przy czym znak minus wskazuje, iż przemieszczenie ma zwrot przeciwny do założonego zwrotu P'_{dod} , a więc na lewo.

W niektórych zagadnieniach potrzebna jest znajomość względnych przemieszczeń węzłów lub obrotów prętów. Wyznaczenie przemieszczeń tego rodzaju jest możliwe po wprowadzeniu odpowiednich sił uogólnionych (art. 1.2). Jeśli chcemy wyznaczyć zbliżenie

Tablica 2.1

Przeł nr	l_p cm	A_p cm ²	N_p kG	u_p 10 ³ cm	n_p $\frac{\text{kG}}{\text{kG}}$	$n_p u_p \cdot 10^3$ cm	n_p $\frac{\text{kG}}{\text{kG}}$	$n_{up} \cdot 10^3$ cm
1	100,0	10,0	+ 10 000	+ 5,00	+ 1,000	5,00	0	0
2	141,4	5,0	+ 9 900	+ 14,00	+ 1,414	19,32	0	0
3	100,0	10,0	- 17 000	- 8,50	- 2,000	17,00	1,000	- 8,50
4	100,0	10,0	+ 5 000	+ 2,50	0	0	0	0
5	141,4	5,0	+ 7 070	+ 10,10	+ 1,414	14,14	0	0
6	100,0	5,0	- 7 000	- 7,00	- 1,000	7,00	0	0
7	100,0	10,0	- 10 000	- 5,00	- 1,000	5,00	1,000	- 5,00
8	100,0	10,0	0	0,00	0	0	0	0
9	141,4	5,0	+ 7 070	+ 10,00	0	0	0	0
10	100,0	5,0	- 5 000	- 5,00	0	0	0	0
11	100,0	10,0	- 5 000	- 2,50	0	0	0	0
12	100,0	5,0	- 5 000	- 5,00	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

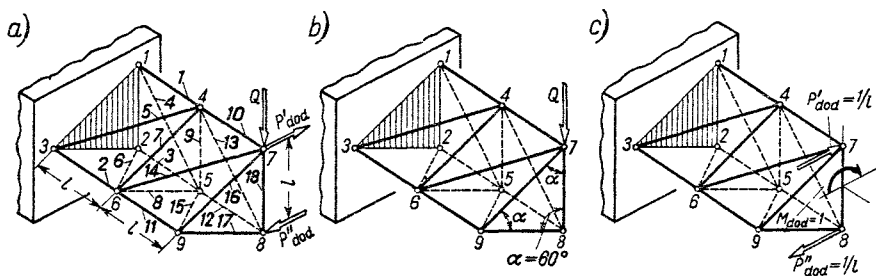
się węzłów 2 i 8 (rys. 2.28a), to przykładając w tych węzłach dwie jednostkowe siły $P = 1$ kG działające wzdłuż linii (2, 8) otrzymamy z wzoru (2.19) żadaną odpowiedź. Podobnie, chcąc wyznaczyć obrót pręta (2, 3) (rys. 2.28b) względem podłoża, należy pręt ten obciążyć momentem jednostkowym. Ponieważ jednak zaniedbujemy odkształcenie lokalne (odkształcenie na zginanie samego pręta), więc obciążenie ogólne przedstawi się jako para sił $1/a$ kG/kGcm przyłożonych prostopadłe do pręta na jego końcach. Wreszcie chcąc wykryć zmianę kąta między prętem (2, 3) i schodzącym się z nim w węźle 3 prętem (3, 9) wprowadzamy dwie jednostkowe pary sił $1/a$ i $1/b$ (rys. 2.28b). Mamy przy tym



Rys. 2.28. Jednostkowe uogólnienie siły odpowiadające względnym przemieszczeniom
 a) linowe przemieszczenie węzła 2 względem węzła 8; b) obrót pręta 2-3 względem pręta 3-9.

pełną analogię z rozpatrzonym w art. 1.4 przypadkiem belki ciągłej. Jedyna różnica polega na tym, że zmiana kąta między prętami (2, 3) i (3, 9) wynika z podatności podparcia końców tych prętów przez resztę konstrukcji kratowej, natomiast na rys. 1.12 kąt względnego obrotu jest spowodowany odkształcalnością sąsiadujących belek na zginanie i podatnością podpór.

Przykład liczbowy. Obliczyć kąt obrotu pręta 13 w płaszczyźnie wręgi 7-8-9 trójpodłużnicowej kratownicy stalowej (rys. 2.29), jeśli $Q = 2$ t, $l = 1$ m, przekroje podłużnic $A_1 = 4$ cm², przekroje rozpórek i wykrzyżowań $A_2 = 2$ cm², $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm².



Rys. 2.29. Wyznaczanie kąta obrotu pręta

- a) dane wyjściowe dla określenia odkształceń kratownicy; b) obciążenie zewnętrzne; siły wewnętrzne w prętach N_i ;
 c) obciążenie dodatkowe odpowiadające kątowi obrotu pręta 13 w płaszczyźnie wręgi 7-8-9 jako siła uogólniona.

Rozwiązanie. Obliczmy przede wszystkim siły N_p wywołane działaniem obciążenia Q (rys. 2.29b). Można by tu stosować wzory art. 2.5, jednakże prościej dojdziemy do wyniku zauważając, że pod działaniem Q powstaną siły tylko w prętach ściany 1-2-8-7 (patrz rys. 2.21):

$$N_1 = -N_{13} = 2 \text{ t}, \quad N_3 = -4 \text{ t}, \quad N_4 = N_{13} = 2\sqrt{2} \text{ t},$$

$$N_9 = N_{18} = -2 \text{ t}, \quad N_{10} = 0.$$

Przechodząc do obliczenia sił n_p wywołanych parą sił $1/l$ (rys. 2.29c), mamy po zastosowaniu wzorów (2.8) i (2.9) przy $M_s = M_{\text{dod}} = 1 \text{ kGcm}$ i $h = h_c = l/\sqrt{3}$:

$$R_A = R_B = R_C = 0, \quad T_A = T_B = T_C = -M_s/h = -2/l\sqrt{3}.$$

Wstawiając te wartości do wzorów (2.10), przy czym $c = l$, a długość wykrzyżowań $l/\sqrt{2}$, określamy siły w prętach pobocznych. Ponieważ $N_p \neq 0$ tylko dla prętów ściany 1-2-3-7, więc przy wyznaczaniu n_i ograniczamy się też tylko do tych prętów. W wyniku:

$$n_1 = n_3 = n_{10} = n_{12} = n_9 = 2n_{13} = -2/l\sqrt{3}, \quad n_4 = n_{13} = 2\sqrt{2}/l\sqrt{3}.$$

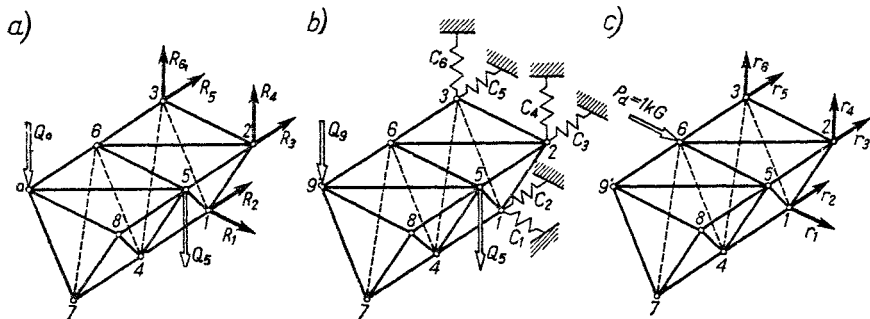
Wyniki powyższe grupujemy w tablicy 2.2. Stąd $\Phi = \sum n_p u_p \approx 47,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 0,27^\circ$. Dodatnia wartość kąta wskazuje, że obrót ten zachodzi w kierunku działania pary sił o jednostkowym momencie.

OBLICZENIE ODKSZTAŁCEŃ KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ

Tablica 2.2

Pręt	l_p cm	A_p cm ²	N_p kG	$10^2 u_p$ cm	$n_p 10^2 \frac{\text{kG}}{\text{kG cm}}$	$10^4 \cdot n_p u_p$
1	100,0	4,0	2 000	2,50	-1,157	-2,89
3	100,0	4,0	-4 000	-5,00	-1,157	+5,78
4	141,4	2,0	2 830	10,00	1,637	+16,37
9	100,0	2,0	-2 000	-5,00	-1,157	-5,78
10	100,0	4,0	0	0	-1,157	0
12	100,0	4,0	-2 000	-2,50	-1,157	2,89
13	141,4	2,0	2 830	10,00	1,637	16,37
18	100,0	2,0	-2 000	-5,00	-0,578	2,89

W niektórych zagadnieniach na odkształcenia kratownicy wpływa również podatność podpór. Traktując te podpory jako dodatkowe pręty o znanych sztywnościach C kG/cm, sprowadzamy w ten sposób zadanie do nierównego. Jeśli konstrukcja (rys. 2.30) ma



Rys. 2.30. Uwzględnienie wpływu podatności podpór na odkształcenia

wszystkie unieruchamiające ją więzy podatne, to wprowadzając sześć prętów (rys. 2.30b) zamocowanych już do nieodkształcalnego podłoża, otrzymamy zamiast (2.19)

$$f = \sum_1^k n_p u_p + \sum_1^b r_q u_q, \quad (2.21)$$

gdzie poza pierwszym składnikiem identycznym jak we wzorze (2.19) występują:

r_q — reakcja podpory q -tej ($q = 1, \dots, 6$), wywołana działaniem obciążenia jednostkowego (rys. 2.30c),

u_q — przemieszczenie tej podpory na skutek przyczyn zewnętrznych.

Jeśli tą przyczyną zewnętrzną będzie jednocześnie działanie reakcji R_q od obciążenia zewnętrznego Q i trwałe obsunięcie się podpory lub błąd montażowy d_q , to

$$u_q = d_q + (R_q/C_q). \quad (2.22)$$

Charakterystyczną osobliwością, którą cechuje odkształcenie kratownic, jest duży wpływ elementów poprzecznych, tj. rozpórek i wykrzyżowań, na wielkość tych odkształceń. Wpływa na to nie tylko fakt, że belki kratowe są zazwyczaj bardziej krępe niż belki lite, lecz również to, że materiał rozpórek i wykrzyżowań, spełniających tę samą rolę co ścianka w belce dwuteowej, jest znacznie lepiej wykorzystany niż materiał ścianki przy pracy na ścinanie (większe σ). W rozwiązanej konstrukcji (rys. 2.27) wpływ podatności wykrzyżowań 2, 5 i rozpórki 6 wynosi $\sim 60\%$ wartości f .

Nie przeceniając wartości tego przykładu, trzeba jednak stwierdzić, że w typowych konstrukcjach wpływ ten jest zawsze dość znaczny ($10 \div 30\%$) i w rachunkach nie może być pominięty. Istnieją zaś przypadki, jak np. skręcanie kratownicy, gdy wpływ odkształcalności rozpórek i wykrzyżowań staje się w ogóle dominujący (rzędu 70% i więcej).

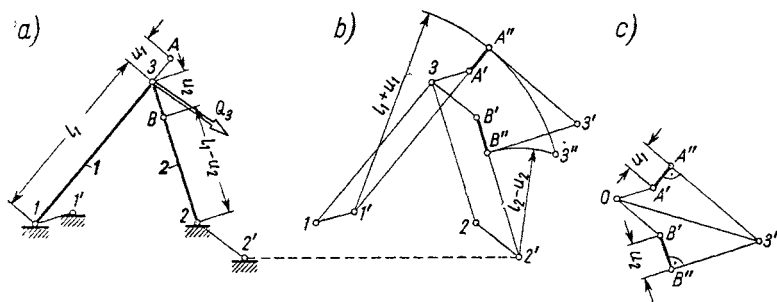
2.11. Plan Williota

Analityczna metoda wyznaczania odkształceń jest niezastąpiona dla kratownic przestrzennych. Dla kratownic płaskich można wyznaczyć przemieszczenia metodą wykreślną budując tzw. plan Williota. Jest on wygodniejszy niż metoda analityczna, gdyż daje pełny obraz przemieszczeń wszystkich węzłów. Budowę tego planu rozpoczniemy od rozwiązania zadania podstawowego, jakim jest wyznaczenie przemieszczeń węzła 3 dwuprętowej kratownicy (rys. 2.31). Zakładamy, przy tym, iż pod działaniem siły Q_3 lub innych przyczyn zmiany długości prętów są u_1 i u_2 , a węzły 1 i 2 doznają przemieszczeń o znanych wielkościach, zajmując położenia $1'$ i $2'$.

Poszczególne etapy tego rozwiązania są podobne na rys. 2.31b. Uważając naprzód pręty 1 i 2 za nieodkształcalne, przesuwamy je równolegle do położen $1'A'$ i $2'B'$ odpowiadających przemieszczeniom węzłów 1 i 2. Odmierzając teraz od A' i B' wydłużenia u_1 i u_2 (przy czym $u_2 < 0$) mamy długości promieni $(l_1 - u_1)$ i $(l_2 - u_2)$. Zataczając odpowiednie łuki otrzymujemy punkt $3''$ jako szukane położenie węzła 3. Przeprowadzona konstrukcja wykreslna narysowana jest w przesadzie, w rzeczywistości bowiem zarówno przemieszczenie węzłów 1 i 2, jak i wielkości u_1 i u_2 są bardzo małe w porównaniu do długości l_1 i l_2 . Uprawnia to do zastąpienia łuków prostymi prostopadłymi do $1'A''$ i $2'B''$, w wyniku czego położenie węzła 3 określimy jako $3'$. Całą konstrukcję wykreślną przemieszczenia węzła 3 można odłączyć od rysunku kratownicy (rys. 2.31c) i wykonać ją w skali wielokrotnie większej niż na rys. 2.31b. Należy zwrócić przy tym uwagę na zwroty odmierzanych wydłużeń prętów. Utożsamiając w myśli punkt 0 z węzłem 3 wyobrażamy sobie jednocześnie, jaką pozycję względem punktu 0 zajmą pręty 1 i 2. Po

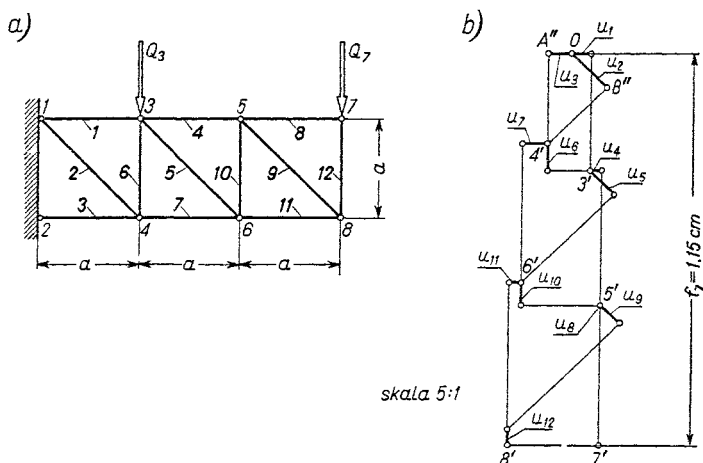
odmierzeniu przemieszczeń węzłów podporowych 1, 2 wydłużenia u_1 i u_2 nanosimy w ten sposób, że kierujemy je na zewnątrz wyobrażonych prętów, gdy są one dodatnie, gdy zaś są ujemne kierujemy je w głąb materiału tych wyobrażonych prętów.

Opisane rozwiązanie stanowi punkt wyjścia zadań bardziej złożonych. Biorąc kratownicę (rys. 2.32) identyczną z rozpatrywaną poprzednio (rys. 2.27), konstrukcję wykreślną rozpoczynamy od węzła 4.



Rys. 2.31. Zadanie podstawowe do planu Williota

a) dane wyjściowe; b) konstrukcja wykreślna rzeczywista i uproszczona; c) wydrebniona uproszczona konstrukcja wykreślna.



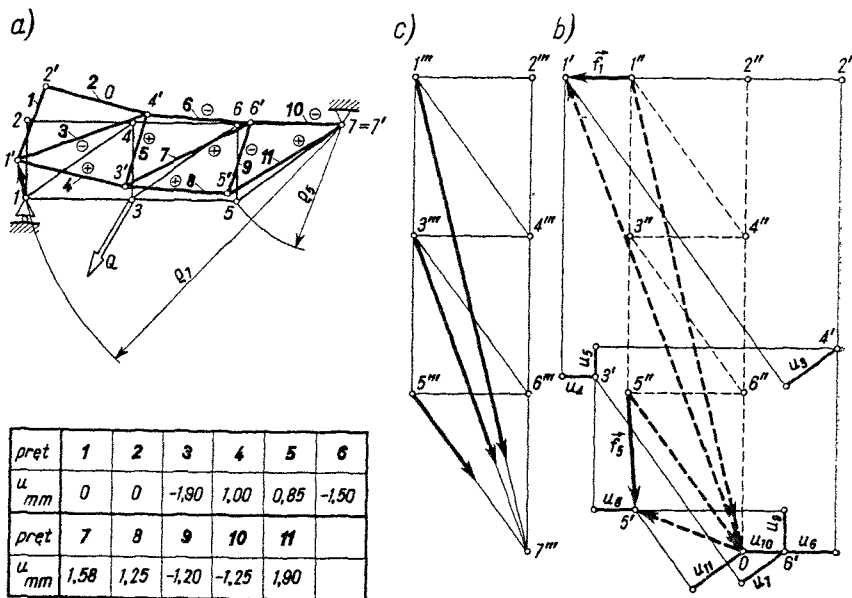
Rys. 2.32. Plan Williota dla kratownicy prostej

a) kratownica wysięgnikowa; b) plan Williota dla kratownicy z rys. a.

Ponieważ węzły 1 i 2 nie doznają przemieszczeń, przeto wydłużenia prętów u_1 i u_2 odmierzamy bezpośrednio od 0 (rys. 2.32b). Utożsamiając w myśli 0 z węzłem 4 wyobrażamy sobie, że pręt 3 jest skierowany od 0 na lewo, a pręt 2 na lewo i do góry. Ponieważ $u_3 > 0$, więc u_2 odmierzamy na zewnątrz od wyobrażonego sobie pręta 2, a więc na prawo do dołu. $u_3 < 0$ odmierzamy w kierunku osi do wewnątrz wyobrażonego sobie pręta 3, tj. na lewo. Prowadząc z punktów A'' i B'' prostopadłe do osi odpowiednich prętów otrzymujemy punkt $4'$. Przemieszczenie węzła 4 jest wektorem $04'$. Następnie wyznaczamy przemieszczenie węzła 3 stwierdzając, że znamy zarówno odkształcenia prętów 1 i 6 jak i przemieszczenia

węzłów 4' i 1 (to ostatnie w tym przypadku jest równe zero). Zadanie można było rozwiązać kreśląc nową konstrukcję, prościej jednak będzie gdy węzeł 3 utożsamimy w myśli z obranym poprzednio punktem θ . Powtarzając konstrukcję z rys. 2.31c stwierdzamy, że przemieszczenia węzłów 4 i 1 są już wykreślone (jedno z nich jest równe zero), odmierzając wobec tego z końców tych odcinków u_1 i u_4 otrzymujemy punkt 3', a przemieszczenie węzła 3 określone wektorem $\vec{03'}$. Wydłużenie u_1 odmierzamy równolegle do osi pręta 1 na prawo, gdyż przy utożsamieniu węzła 3 z θ wyobrażony pręt 1 jest skierowany na lewo od θ , a u_1 jest dodatnie. Z tego samego powodu u_4 odmierzamy do dołu, gdyż wyobrażony pręt 6 jest skierowany do dołu, a u_4 jest ujemne. Powtarzając zadanie podstawowe, wyznaczamy z kolei przemieszczenie węzła 6 mając wszystkie dane wyjściowe (przemieszczenia węzłów 3 i 4 oraz u_4 i u_7) już określone. Korzystamy przy tym znowu z tego samego punktu θ , który tym razem utożsamiamy z węzłem 6. Przemieszczenie węzła 6 określone jest wektorem $\vec{06'}$, a więc następuje do dołu i na lewo. Pionowa składowa wektora $\vec{06'}$ jest pionowym przemieszczeniem węzła 6 i przy obranej skali wynosi 0,68 cm. Porównując tę wartość z obliczoną w przykładzie (art. 2.10) stwierdzamy zadowalającą zgodność obu wyników. Postępując analogicznie wyznaczamy z kolei przemieszczenia węzłów 5, 8, 7, otrzymując w ten sposób kompletny obraz przemieszczeń.

W przeprowadzonym przykładzie wyznaczenie przemieszczeń sprowadzało się do wielokrotnego powtórzenia zadania podstawowego (rys. 2.31) dzięki temu, że znane były przemieszczenia dwóch sąsiednich węzłów będących węzłami podporowymi kratownicy. W konstrukcji (rys. 2.33a) węzły podpo-

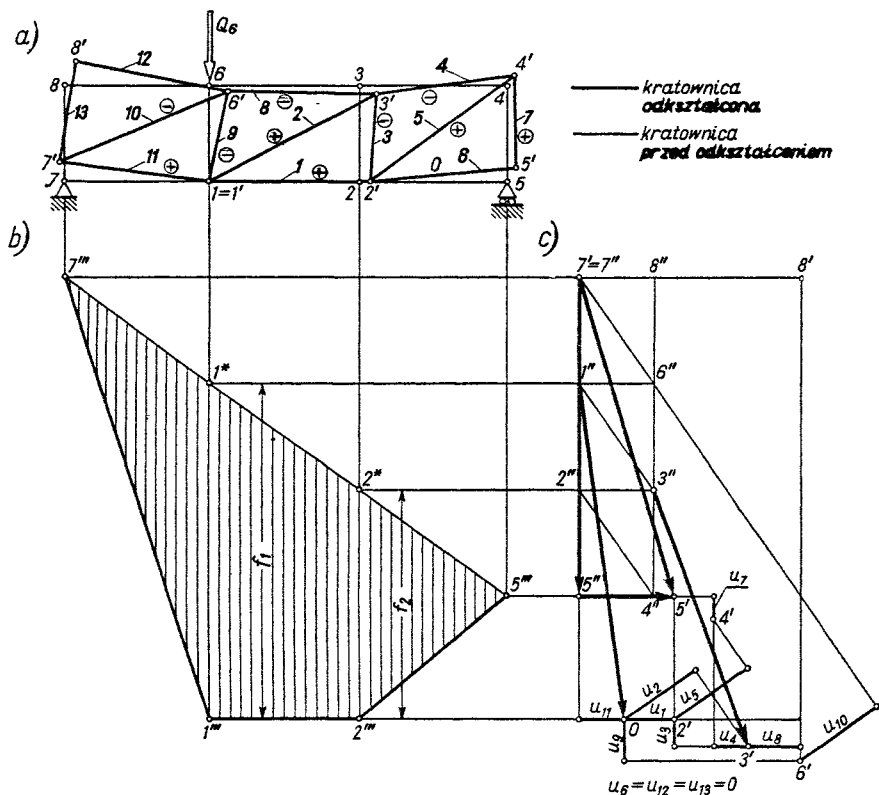


Rys. 2.33. Plan Williota

a) obraz odkształceń przy założeniu poziomego, przesuwania się węzła 6; b) plan Williota; c) wykres dodatkowych wektorów przemieszczeń.

rowe 7 i 1 nie leżą obok siebie. Aby zadanie sprowadzić do rozpatrzonego poprzednio zakładamy chwilowo, że podpora przesuwna znajduje się w węźle 6 sąsiadującym z podporą 7. Ponieważ znane jest odkształcenie pręta 10, przeto znane jest również przemieszczenie węzła 6, które na planie Williota przedstawione jest za pomocą wektora $\vec{06'}$. Z kolei możemy wyznaczyć przemieszczenia węzłów 5, 3, 4, 1 i 2, mając za każdym razem do rozwiązania zadanie podstawowe. Otrzymamy plan Williota (rys. 2.33b) (bez

punktów $1'', \dots, 6''$ i linii kreskowanych) przedstawia więc przemieszczenia węzłów przy wstępnym założeniu. Kratownica w postaci odkształconej zajmuje położenie zaznaczone grubszymi liniami (rys. 2.33a). Węzeł 1 doznał przy tym przemieszczenia $11'$ (rys. 2.33a) na planie Williota $01'$. Chcąc więc sprowadzić zadanie do rzeczywistych warunków podporowych należy obecnie obrócić kratownicę jako ciało sztywne względem węzła 7 o taki kąt, aby przemieszczenie pionowe węzła 1 było równe zero. Węzeł 1 porusza się przy tym po łuku koła. Pamiętając jednak, że przemieszczenia węzłów są bardzo



Rys. 2.34. Plan Williota

a) obraz odkształceń przy unieruchomieniu węzła 1 i poziomym przesunięciu węzła 2; b) wykres przemieszczeń pionowych pasa dolnego; c) plan Williota.

małe, możemy łuk ten zastąpić odcinkiem prostej prostopadłej do promienia $1-7 = \varrho_7$. W rezultacie do wektora $01'$ należy dodać taki wektor $1''0$, aby suma tych wektorów była wektorem poziomym $1''1' = \vec{1}$. Aby wyznaczyć rzeczywiste przemieszczenie innego węzła, np. węzła 5, zauważmy, że przy obrocie kratownicy węzeł ten przemieści się po prostopadłej do linii 7-5 (rys. 2.33a), a wielkość tego przemieszczenia będzie proporcjonalna do promienia ϱ_5 . Rysując obrocony o 90° (rys. 2.33c) obraz kratownicy (przy czym $1''' 7''' = 1''0$) spełniamy obydwie warunki, gdyż zachodzi proporcja

$$\overrightarrow{5''' 7'''} : \varrho_5 = \overrightarrow{1''' 7'''} : \varrho_7,$$

a ponadto odcinek $\overrightarrow{5''7''}$ jest prostopadły do odcinka 5-7 na rys. 2.33a. Przeszczenie rzeczywiste $\overrightarrow{f_s}$ węzła 5 będzie równe sumie wektorów $\overrightarrow{05'}$ i $\overrightarrow{5''7''}$. Sumę tę można otrzymać przenosząc wykres dodatkowych wektorów przeszczenia na plan Williota (rys. 2.33b).

W rezultacie przeszczenie wypadkowe węzła 5 jest $\overrightarrow{5''5'}$. Identyfikujemy przeszczenia pozostałych węzłów.

W przypadku gdy kratownica ma większą liczbę węzłów, zastosowanie podanego sposobu prowadzi do niewygodnej konstrukcji wykresnej, gdyż korekta przeszczenia wniesiona przez dodatkowe wektory (rys. 2.33c) wymaga odejmowania dużych i bliskich co do wartości i kierunku wektorów. Dla otrzymania bardziej zwartego planu Williota celowe jest rozpoczęcie kreślenia wykresu od środka kratownicy. Rozważając kratownicę (rys. 2.34a) zakładamy zupełnie dowolnie, że węzeł 1 jest stały, a węzeł 2 ma możliwość tylko przesuwu poziomego. Otrzymany plan Williota (rys. 2.34c) daje obraz odkształcenia kratownicy zaznaczony grubszy liniami (rys. 2.34a). Chcąc zadanie sprowadzić do rzeczywistych warunków podparcia, przesunąć naprzód całą kratownicę równolegle tak, aby punkt 7' pokrył się z 7''. Na planie Williota odpowiada to przesunięciu bieguna z 0 do 7' i wtedy przeszczenie węzła 5 jest równe $\overrightarrow{7'5'}$. Obracając obecnie całą kratownicę tak, aby przeszczenie pionowe węzła 5 było równe zeru, musimy od wektora $\overrightarrow{7'5'}$ odjąć wektor $\overrightarrow{5''7''}$, a wypadkowe przeszczenie węzła 5 jest równe $\overrightarrow{5''5'}$. Przeszczenia pozostałych węzłów otrzymujemy jak poprzednio, rysując na planie Williota obraz kratownicy obrócony o 90°, zredukowany w stosunku odcinków $5''7'' : 5,7$. Tak na przykład przeszczenie węzła 3 będzie przedstawione za pomocą wektora $\overrightarrow{3''3'}$, a przeszczenie węzła 1 będzie równe $\overrightarrow{1''0}$. W przypadku gdy interesują nas pionowe przesunięcia węzłów, to ich obraz otrzymujemy rzutując pionowe składowe przeszczenia na prostopadłe do pasa dolnego (rys. 2.34b). Wielobok $7'''1''2'''5'''$ ograniczony od góry prostą $7'''5'''$ daje wtedy szukaną odpowiedź.

2.12. Zadania

1. Zakładając w 3-prętowej kratownicy (rys. 2.3) $x_1 = -5 \text{ m}$, $y_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 2 \text{ m}$, $y_2 = -y_3 = 4 \text{ m}$, $z_1 = z_2 = z_3 = 8 \text{ m}$ oraz $Q_x = 54 \text{ t}$, $Q_y = 9 \text{ t}$, $Q_z = 18 \text{ t}$, wyznaczyć siły w prętach metodą wykresno-analityczną.

2. Powtórzyć obliczenie kratownicy z zad. 1 metodą wykresną.

3. Kratownica, o podanych na rysunku 2.3c wymiarach, obciążona jest siłą $Q_z = 3 \text{ t}$ i poziomą siłą $Q' = 5 \text{ t}$ o dowolnym kierunku. Wyznaczyć ekstremalne wartości sił w prętach.

- Wskazówka. Wyznaczyć najpierw miejsce geometryczne punktów przebiecia linii działania wypadkowej siły Q z płaszczyzną $1'2'3'$, a potem zastosować konstrukcję z rys. 2.4.

4. Wysięgnik (rys. 2.35) złożony z pręta OC i dwóch lin odciągowych OA i OB obciążono za pomocą układu liniowego siłą W o pionowej składowej $P = 6 \text{ t}$ i poziomej $H = 0,15 P$ mogącej mieć dowolny kierunek. Wyznaczyć ekstremalne wartości sił w pręcie i linach odciągowych.

5. Zakładając, iż w poprzednim zadaniu $P = \text{const}$ określić ilekrotnie może wzrosnąć siła H , aby w linach OA i OB nie wystąpiły siły ściskające.

6*. Obciążony pionową siłą $Q = 3 \text{ t}$ i poziomą o dowolnym kierunku siłą $H = 0,1 Q$ wysięgnik (rys. 2.36) unieruchomiony jest 6 reakcjami pionowymi R_A, R_B, R_C i poziomymi T_A, H_A, H_B . Wyznaczyć ekstremalne siły w prętach.

Uwaga: Lina wciągarki na odcinku FDE biegnie w płaszczyźnie symetrii.

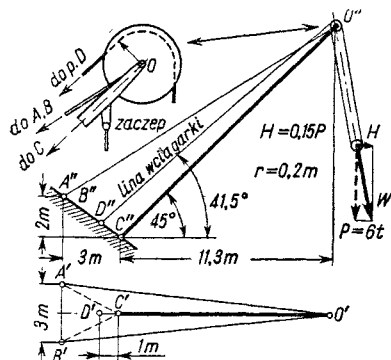
7*. Obliczyć siły w prętach kratownicy (rys. 2.37) utrzymanej w równowadze trzema reakcjami pionowymi R_A, R_B, R_C i czterema reakcjami poziomymi T_A, H_A oraz $T_B = T_C$, jeśli poza podanymi na rysunku obciążeniami działa w węźle D pionowo do dołu siła $P_D = 50 \text{ t}$.

8*. Żuraw (rys. 2.38) zbudowany z pięciu prętów (grubo zaznaczonych) i ośmiu lin obciążono siłą $Q = 3 \text{ t}$ i dowolnie skierowaną siłą poziomą $H = 0,1 Q$. Biorąc pod uwagę, iż z dwóch lin (2,6) i (3,7)

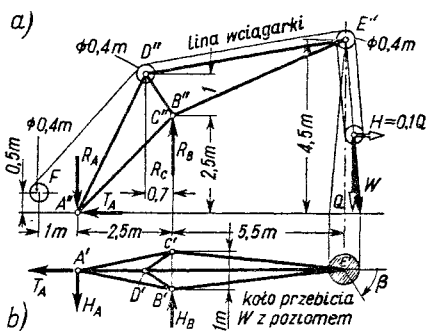
czynna jest tylko ta, która jest rozciągana, wyznaczyć ekstremalne siły w prętach i orzec czy konstrukcja jest prawidłowa.

Wskazówka. Obliczyć oddzielnie skutki działania siły Q i siły H dla $\beta = 0$ i siły H dla $\beta = 90^\circ$, a potem zastosować superpozycję, gdy siły poziome są $H \sin \beta$ i $H \cos \beta$.

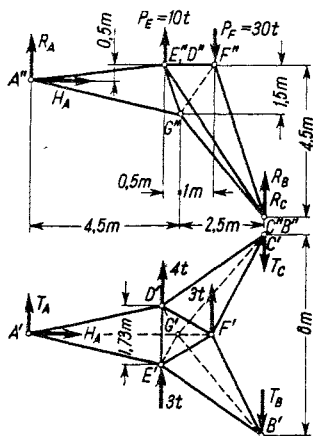
9. Bryła sztywna (rys. 2.39) podparta w punktach 1, 2 i 3 za pomocą sześciu prętów jest obciążona siłami P i H . Wyznaczyć siły w prętach.



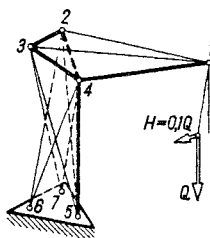
Rys. 2.35.



Rys. 2.36.



Rys. 2.37.



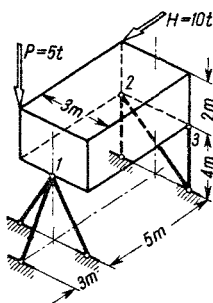
Rys. 2.38.

10. Wyznaczyć siły w sześciu prętach łoża silnikowego (rys. 2.10a,b), jeśli $a = 1,5$ m, $c = 1$ m, $h = 0,8$ m, $l = 1$ m, a siła obciążająca Q ma składowe $Q_x = 2500$ kG; $Q_y = 400$ kG, $Q_z = -2500$ kG.

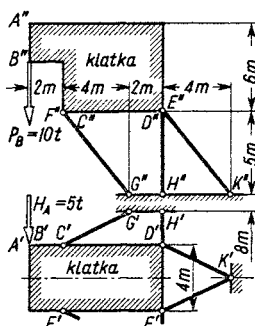
11. Sztywną samą w sobie symetryczną i symetrycznie podpartą klatkę (rys. 2.40) obciążono siłą pionową $P_B = 10$ t i siłą poziomą $H_A = 5$ t. Wyznaczyć siły w prętach mocujących tę klatkę do podłoża.

12. Udowodnić, że połączenie bryły z podłożem (rys. 2.41) ma postać krytyczną, pomimo tego, iż sześć prętów łączących nie przecina się z jedną prostą.

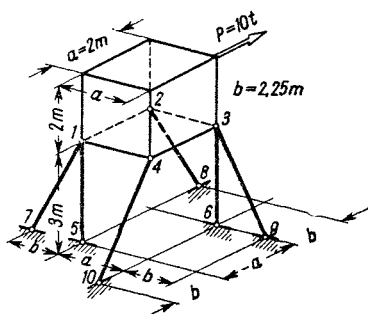
13. W połączeniu (rys. 2.41) pręt (4,10) zamieniono prętem (1,10). Udowodnić, że połączenie to nie ma postaci krytycznej i obliczyć siły w prętach wywołane przez siłę P .



Rys. 2.39.



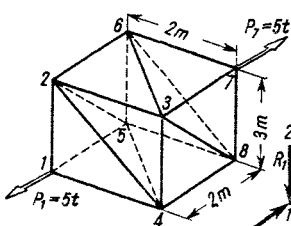
Rys. 2.40.



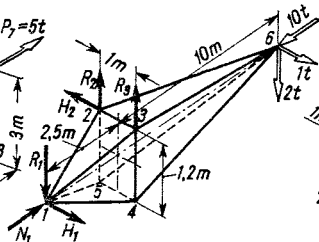
Rys. 2.41.

14. 6-ścienna kratownica (rys. 2.42) rozciągana jest wzdłuż przekątnej (1, 7) siłą $P_1 = P_7$. Traktując tę kratownicę jako łączoną z dwóch kratownic prostych (1, 2, 5, 4) i (7, 6, 3, 8) wyznaczyć siły w prętach.

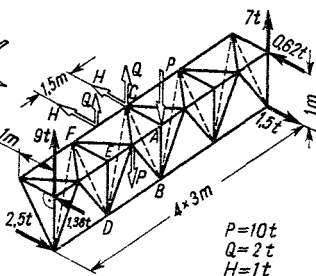
15. Kratowy maszt (rys. 2.43) obciążony w węźle 6, utrzymany jest w równowadze sześcioma reakcjami w węzłach 1, 2 i 3. Traktując kratownicę jako połączenie dwóch kratownic (2, 3, 6) i (1, 4, 5) wyznaczyć siły w prętach.



Rys. 2.42.



Rys. 2.43.



Rys. 2.44.

16. Obliczyć siły w prętach 3-podłużnicowej kratownicy przyzmatycznej (rys. 2.12), jeśli węgła jest trójkątem równoramiennym ($c = 1$ m, $h_c = 1$ m), a obciążenie zewnętrzne zredukowane do punktu B ma wartości: $M_y = 30$ tm, $M_x = 3$ tm, $M_z = 3$ tm; $T_x = 5$ t, $T_y = -3$ t, $N_0 = 0$.

17. W 3-podłużnicowym wysięgniku (rys. 2.11a) górna ściana (1, 2, 11, 10) jest płaska, węgry zaś są trójkątami równoramiennymi ustawionymi symetrycznie. Zakładając, iż wymiary węgry (1, 2, 3) i (4, 5, 6) są jednakowe ($c = 1$ m, $h_c = 1,5$ m), a węgry (7, 8, 9) inne ($c = 1,5$ m; $h_c = 2$ m) oraz że długość grodzi jest jednakowa ($l = 2,5$ m), obliczyć siły w prętach grodzi między węgry (4, 5, 6) i (7, 8, 9). Obciążenie stanowi siła pionowa $P_1 = 10$ t.

18. Obliczyć siły w prętach węgry (4, 5, 6) kratownicy z zadania 17.

19*. 3-podłużnicowy most suwnicy (rys. 2.44) obciążony oddziaływaniami wózka utrzymany jest sześcioma reakcjami o podanej wielkości. Wyznaczyć siły w prętach grodzi między węgry (ABC) i (DEF).

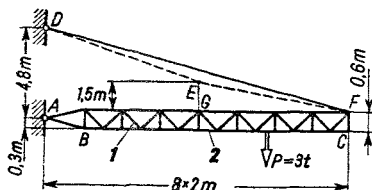
20. Obliczyć siły w prętach węgry (3, 4, 5) kratownicy z rys. 2.13.

21. W kratownicy (rys. 2.16) zachowując symetrię konstrukcji powiększono węgry (5, 6, 7, 8) tak, iż długość jej boku jest a . Czy ta zmieniona kratownica ma postać krytyczną?

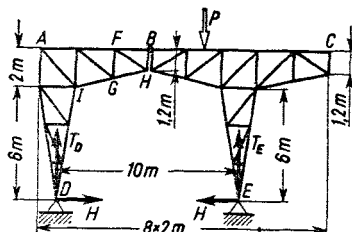
39. W kratownicy (rys. 2.29) węzeł 1 zmontowano błędnie wysuwając go o 1 cm w kierunku podłużnicy (1, 7). Wyznaczyć obrót pręta (7, 8) w płaszczyźnie wregi (7, 8, 9).

40. W kratownicy (rys. 2.27) podłużnicę (2, 8) ogrzano o 100°C ($\lambda = 13 \cdot 10^{-6} \text{ cm/cm}^{\circ}\text{C}$). Wyznaczyć pionowe przemieszczenia węzła 6 i 8.

41. W kratownicy (rys. 2.27) obciążenie wynosi $Q_3 = 10 \text{ t}$, $Q_7 = -5 \text{ t}$. Narysować dla tej kratownicy plan Williota.



Rys. 2.48.



Rys. 2.49.

42. W kratownicy (rys. 2.33) pręty 5, 7 i 9 ogrzano o 200°C ($\lambda = 13 \cdot 10^{-6} \text{ cm/cm}^{\circ}\text{C}$). Narysować plan Williota przyjmując, iż długość pionowych rozpórki jest 2 m, całkowita zaś długość kratownicy, tj. odcinek (2, 7), jest $3 \times 3 \text{ m}$.

43. W stalowej kratownicy (rys. 2.34) $Q_3 = 10 \text{ t}$, odległość podłużnic $h = 2 \text{ m}$, odległość podpór (7, 5) jest $3 \times 4 \text{ m}$, a przekroje prętów jednakowe i równe 15 cm^2 . Narysować plan Williota i wyznaczyć z tego planu pionowe przesunięcie węzła 3.

44. Z planu Williota (rys. 2.32) określić zmianę odległości między węzłem 4 a 5 oraz zmianę kąta między prętami 6 i 9.

45. Z planu Williota (rys. 2.33) określić zmianę kąta między prętami 7 i 8, jeśli przyjąć, iż odcinek (3, 5) ma długość 3 m, a wydłużenia u są takie jak podaje tablica.

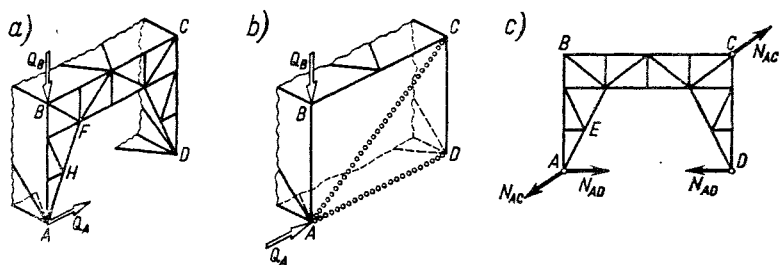
3. KRATOWNICE PRZESTRZENNE O ŚCIANACH PŁASKICH

Z uwagi na prostotę wykonania i montażu bardzo często przestrzenna kratownica ma postać zespołu złożonego z niewielu tylko płaskich kratownic (ścian). Takie ukształtowanie konstrukcji daje możliwość, w porównaniu z metodami podanymi w rozdz. 2, dalszych uproszczeń analizy tych kratownic. Poznanie tych uproszczeń stanowi cel niniejszego rozdziału.

3.1. Uproszczenia schematu statycznego. Kratownice pozornie nieszttywne

Spotykane w rzeczywistości kratownice składają się często z dużej liczby prętów. Przeprowadzenie analizy takich ustrojów w ich pierwotnej postaci nastęrczałoby pewne trudności i dlatego celowe jest uproszczenie schematu statycznego. Jedną z takich możliwości jest omówione w art. 2.8 usuwanie prętów nieczynnych przy danym lub dowolnym obciążeniu*. Drugą możliwość daje wprowadzenie prętów zastępczych jako elementów równoważnych funkcjonalnie danemu rzeczywistemu rozwiązaniu ustroju**.

Rozważmy na przykład kratownicę (rys. 3.1a), w której ze względów użytkowych lub innych ścianę $ABCD$ rozwiązano jako kratową bramę, usuwając przez to swobodę



Rys. 3.1. Wprowadzenie funkcjonalnie równoważnych prętów zastępczych

a) konstrukcja rzeczywista; b) konstrukcja zmodyfikowana przez wprowadzenie prętów zastępczych; c) obciążenie ściany zastąpionej. Przykładowo podane obciążenia Q_A , Q_B wywołują siły w kratownicy (rys. b) i nie trzeba ich uwzględniać w zadaniu z rys. c.

* Ilustracją pierwszego przypadku jest kratownica (rys. 2.21) przy obciążeniu siłą R_1 , ilustracją drugiego — zadanie 29 (rys. 2.46), w którym przy pominięciu ciężaru własnego wszystkie wykrzyżowania i rozpórki poza prętami wręg w założeniu podłużnic są zawsze zerowe.

** Określenie „pręty zastępcze funkcjonalnie” różni się od pojęcia prętów zastępczych dla kratownic zespołowych (art. 2.7). Pojęcie pierwsze wiąże się głównie ze zrozumieniem roli, jaką spełniają dane pręty lub ich grupa i nie zawsze musi być wykorzystane do analizy sił w konstrukcji, podczas gdy pojęcie prętów zastępczych (art. 2.7) służy tylko temu drugiemu celowi.

przemieszczeń węzłów A , B , C i D . Tę samą rolę przy działaniu obciążeń Q mogłyby jednak spełnić dwa pręty AC i AD (rys. 3.1b). Ponieważ ten drugi schemat jest znacznie prostszy, wygodniej jest prowadzić analizę konstrukcji jako całości tak, jak gdyby te zastępcze pręty AC i AD istniały. Jeśli w wyniku tej analizy siły w prętach zastępczych są odpowiednio N_{AB} i N_{CD} , to przejdzie do sił w rzeczywistej konstrukcji ściany $ABCD$ otrzymamy usuwając pręty zastępcze i obciążając tę ścianę siłami N_{AB} i N_{DC} (rys. 3.1c). Wypadkowe siły W w prętach takich jak AB , BC i CD są algebraiczną sumą siły np. N_{AB} wynikającej z analizy zmodyfikowanej konstrukcji (rys. 3.1b) i siły N'_{AB} wynikającej z rozwiązania według rysunku 3.1c, to jest

$$W_{AB} = N_{AB} + N'_{AB}. \quad (a)$$

Natomiast w prętach takich jak AE wypadkowa siła W_{AE} jest równa sile N'_{AE} wynikającej z rozwiązania zadania według rys. 3.1c, to jest

$$W_{AE} = N'_{AE}. \quad (b)$$

Słuszność podanej metody wynika z zasady jednoznaczności rozwiązania (art. 1.5) i reguły 5 (art. 2.8). Warunkiem podstawowym jest, aby zastępowana ściana była płaska i pręty zastępcze leżały w jej płaszczyźnie, a obciążenie zewnętrzne znajdowało się poza obreębem zastępowanej ściany.

Wprowadzając pojęcie funkcjonalnie równoważnych prętów mimo woli dokonano myślowego podziału węzłów i prętów ustroju na pierwotne i wtórne. W konstrukcji (rys. 3.1a) stanowiącej fragment większego ustroju, jako pierwotne węzły i pręty przyjęto węzły A , B , C i D , oraz pręty AB , ..., AD (rys. 3.1b), podczas gdy cała konstrukcja ściany $ABCD$ w jej rzeczywistym wykonaniu uznana została za wtórną. Podstawą tego podziału jest rozróżnienie roli, jaką spełniają dane elementy, a mianowicie za elementy pierwotne uznajemy te, które w najprostszy sposób zapewniają prawidłową pracę konstrukcji jako całości, jako wtórne te, które stanowią modyfikację ustroju pierwotnego*.

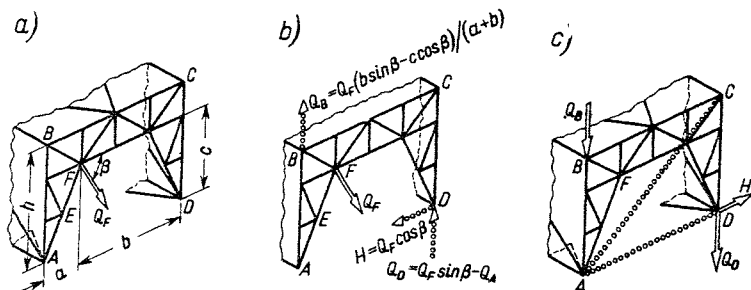
Nawiązując do wprowadzonego w art. 2.1 podziału obciążeń na lokalne i ogólne utrzymujemy ten podział i w kratownicach, gdy składają się one z elementów pierwotnych i wtórnych. Pod pojęciem obciążenia ogólnego rozumiemy obciążenia przyłożone w węzłach pierwotnych np. Q_A i Q_B (rys. 3.1a). Jeśli obciążenie przyłożone jest do węzłów konstrukcji wtórnej (rys. 3.2a), to wprowadzając odpowiednie zerowe grupy sił (analogia do rys. 2.2), rozdzielamy to obciążenie na lokalne (rys. 3.2b) i ogólne (rys. 3.2c). Ponieważ siła Q_F musi leżeć w płaszczyźnie ściany $ABCD^{**}$, mamy na podstawie reguły 5 (art. 2.8), że przy obciążeniu lokalnym pracują jedynie pręty tej ściany.

Kratownice z wprowadzonymi elementami wtórnymi są z reguły *kratownicami pozornie niesztynnymi*, to jest nie spełniającymi formalnych wymagań (wzory 2.12). Biorąc kratownicę (rys. 3.3) widzimy, iż wprowadzenie w niej wtórnej konstrukcji ściany $ABCD$ zamiast jednego pręta AC przekształca pierwotny trójkąt ADK w wynaturzony czwo-

* Podana definicja nie jest jednoznaczna, gdyż słowo „najprostszy” nie ma w technice znaczenia absolutnego.

** Wtórna kratownica $ABCD$ jest płaska, wobec czego przyłożenie siły Q_F , która by miała dużą składową prostopadłą do kratownicy wywoływałoby zgięcie prętów, co jest ciężarowo nieekonomiczne i konstrukcyjnie niedopuszczalne.

rokąt $AEDK$, a trójkąt HBC w wynaturzony pięciokąt. Aby spełnić kryterium (2.12), należałoby dodać pręty kropkowane. Pręty te mogą być opuszczone tylko wtedy, gdy w węzłach E , F i G działają obciążenia leżące w płaszczyźnie górnej ściany*, a ponadto



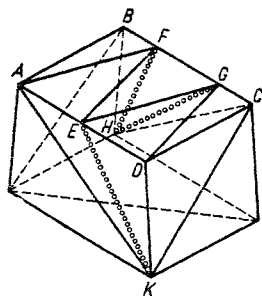
Rys. 3.2. Rozdział obciążeń na ogólne i lokalne
b) obciążenie lokalne; c) obciążenie ogólne.

gdy wszystkie pręty schodzące się w węzle E , F lub G leżą w jednej płaszczyźnie (reguła 4 art. 2.8). Przy spełnieniu tych warunków pozornie niesztwna kratownica (rys. 3.3) może być uznana za prawidłową, aczkolwiek takie rozwiązanie zmniejsza z reguły siły krytyczne (rys. 10.38 i następne). Jeśli pomimo to często budujemy kratownice pozornie niesztwne (rys. 2.11, 2.13), to dlatego, iż mają one zalety technologiczne (prostsze wykonanie węzłów płaskich niż przestrzennych).

Omówione uproszczenia schematu statycznego łącznie z podanymi w art. 2.8 innymi możliwościami są niezbędnym wstępnym etapem analizy każdej kratownicy. Dopiero po ich przeprowadzeniu można przystępować do właściwej analizy. Ponieważ zagadnienie działania obciążeń lokalnych (rys. 3.2b) jest proste do rozwiązania, główną naszą uwagę skoncentrujemy na działaniu obciążeń ogólnych.

3.2. Kratownice powłokowe. Rozdział obciążeń

W wielu zagadnieniach powłokowe kratownice sztywne same w sobie (rys. 2.14) mają co najmniej dwie ściany równoległe, wszystkie zaś pozostałe ściany płaskie (rys. 3.4a). Rozwiązanie takich kratownic sprowadza się do zagadnień statyki kratownic płaskich i tylko jednego zadania przestrzennego, a mianowicie skręcania kratownicy układami sił przyłożonych w płaszczyznach ścian równoległych.

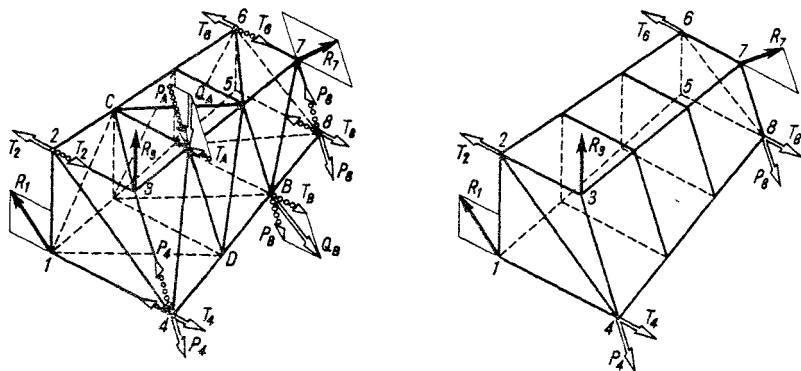


Rys. 3.3. Kratownica pozornie niesztwna

Zaznaczone linią kropkowaną pręty EK , HF , HG są myślowo wprowadzone, aby zadość uczynić formalnym wymaganiom sztywności.

* Niewielkie obciążenie prostopadle, jak ciężar własny, może być przeniesione przez zginanie prętów AED lub $BFGC$ jako belek podpartych na końcach (rys. 2.2).

Aby udowodnić słuszność tej reguły, rozważmy przypadek (rys. 3.4a), gdy obciążenia Q_A , Q_B oraz reakcje R_1 , R_3 , R_7 są wszystkie równoległe do płaszczyzn równoległych ścian (1, 2, 3, 4) i (5, 6, 7, 8). Rozkładając siły Q_A i Q_B na składowe P_A , T_A , P_B , T_B działające w płaszczyznach poszczególnych ścian, wprowadzamy w płaszczyznach równoległych ścian zerowe grupy sił T_2 , T_6 , P_4 , P_8 , T_4 , T_8 . Analizując jedną z grup sił złożoną z T_A i kropkowanych T_2 , T_6 , dobierzmy wartości tych ostatnich tak, aby te trzy siły tworzyły układ sił w równowadze. Wydzielając na zasadzie superpozycji z pierwotnego zadania ten układ trzech sił widzimy, iż spełnia on wszystkie warunki reguły 5 (art. 2.8). Wynika



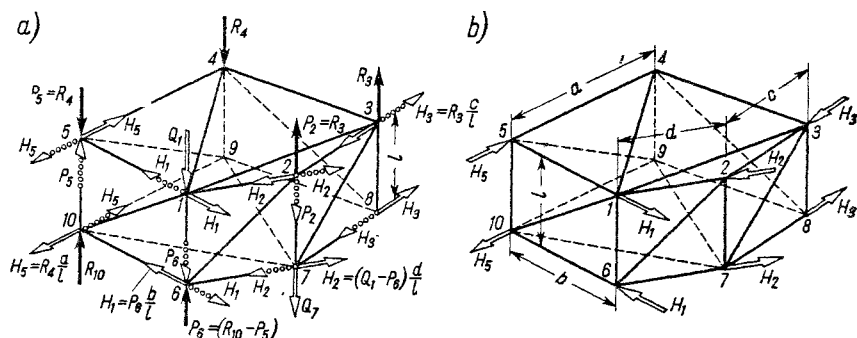
Rys. 3.4. Pierwszy wariant obciążenia kratownicy powłokowych

a) kratownica z równoległymi ścianami (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8); b) obciążenie pozostające po wydzieleniu zadań płaskich.

stąd, iż pod działaniem siły T_A oraz kropkowanych sił T_2 i T_6 pracują jedynie pręty płaskiej ściany (2, 3, 7, 6). Powtarzając to samo rozumowanie dla grupy sił P_A , P_B i kropkowanych sił P_4 , P_8 oraz dla grupy T_B i kropkowanych sił T_4 i T_8 , wydzielamy dwa następne zadania statyki płaskich ścian (3, 7, 8, 4) i (1, 4, 8, 5). Pozostały po wydzieleniu tych płaskich zadań układ sił (rys. 3.4b) składa się z dwóch grup przyłożonych w płaszczyznach ścian równoległych. Układ ten musi być w równowadze, gdyż każdy z wydzielanych z pierwotnego zadania trzech płaskich układów sił był w równowadze. Wynika stąd, iż wypadkowa grupy sił T_2 , R_3 , T_4 , P_4 i R_1 jest równa zero, w przeciwnym bowiem razie wypadkowa W tej grupy nie mogłaby być zrównoważona przez drugą grupę* (T_6 , R_7 , T_8 , P_8). To samo vice versa dotyczy grupy sił T_6 , R_7 , T_8 , P_8 . Jeśli ponadto wypadkowy moment jednej z grup sił jest równy zero, to każda z nich tworzy układ sił w równowadze spełniający warunki stosowalności reguły 5 (art. 2.8) i wtedy mamy dwa dodatkowe zadania statyki ścian płaskich. Jeśli tak nie jest, to wypadkowy moment M , jednej grupy sił zrównoważony jest takim samym momentem drugiej grupy i wtedy mamy przypadek przestrzennego obciążenia kratownicy momentami skręcającymi jedną ścianę względem drugiej równoległej.

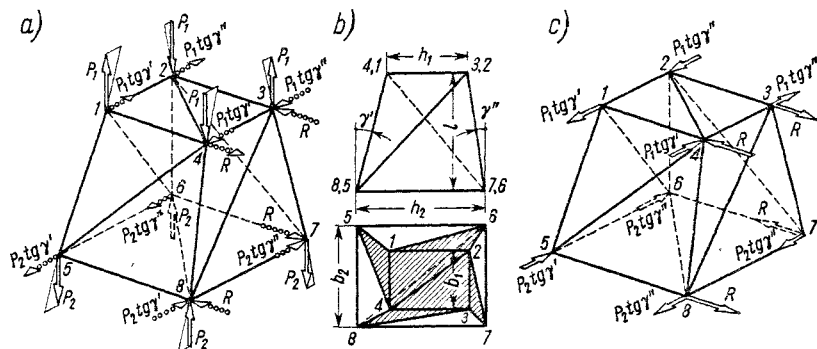
* Nie byłby spełniony warunek równowagi momentów względem dowolnej prostej leżącej w płaszczyźnie (5, 6, 7, 8).

W identyczny sposób dowodzi się słuszności reguły w przypadkach obciążeń siłami prostopadłymi do równoległych ścian kratownicy (rys. 3.5 i 3.6). Pozostawiając pierwszy z nich (rys. 3.5) do analizy czytelnikowi, omówmy pokrótce drugi (rys. 3.6). Wprowadzając mianowicie (rys. 3.6a) w ścianie (1, 4, 8, 5) siły $P_1 \operatorname{tg} \gamma'$, $P_2 \operatorname{tg} \gamma'$ i parę sił $R =$



Rys. 3.5. Drugi wariant obciążenia powłokowej kratownicy pryzmatycznej

a) kratownica obciążona siłami Q_1, Q_7 i reakcjami R_4, R_{10}, R_{11} , wszystkie pozostałe siły są wprowadzone w trakcie analizy; b) skracanie kratownicy po wydzieleniu zadań płaskich.



Rys. 3.6. Drugi wariant obciążenia powłokowej dowolnej kratownicy

a) kratownica z prostokątnymi ścianami równoległymi obciążona grupami sił P_1 i P_2 prostopadłymi do tych ścian; wszystkie siły kropkowane są wprowadzone w trakcie analizy; b) geometria rozważanej kratownicy; c) skracanie.

$= (P_2 b_2 - P_1 b_1)/l$ widzimy, iż tak wyodrębniony układ sił przedstawia zagadnienie płaskie. Wyodrębniając w podobny sposób drugi układ płaski na ścianie (2, 3, 7, 6) pozostałą resztę (rys. 3.6c) rozpoznajemy jako skracanie kratownicy momentem M_s

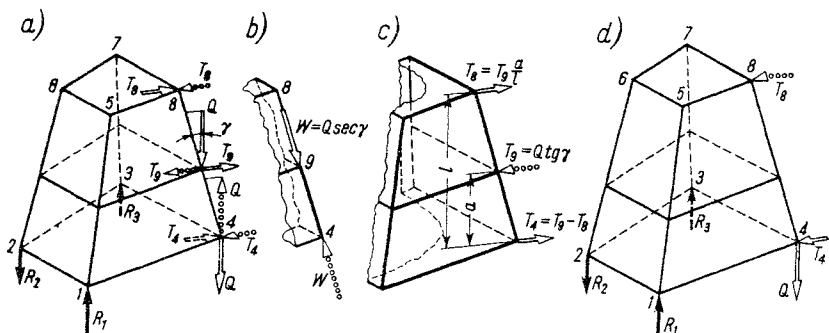
$$M = R h_1 - P_1 (\operatorname{tg} \gamma' + \operatorname{tg} \gamma'') b_1 = R h_2 - P_2 (\operatorname{tg} \gamma' + \operatorname{tg} \gamma'') b_2.$$

Zauważając zaś (rys. 3.6b), że $\operatorname{tg} \gamma' + \operatorname{tg} \gamma'' = (h_2 - h_1)/l$, mamy ostatecznie

$$M_s = (P_2 b_2 h_2 - P_1 b_1 h_1)/l.$$

{a}

Wreszcie w przypadku działania obciążeń prostopadłych do równoległych ścian i przyłożonych w dowolnych węzłach kratownicy (rys. 3.7), wprowadzenie zerowych grup sił T_8 , T_9 , T_4 i sił Q w węzle 4 pozwala na kolejne wydodrębnienie trzech zadań płaskich (rys. 3.7b, c) i zadania analogicznego do rozpatrzonych poprzednio (rys. 3.5, 3.6), gdy obciążenia prostopadłe działają tylko w węzłach jednej z płaszczyzn.



Rys. 3.7. Redukcja dowolnego obciążenia siłami równoległymi

a) układ obciążeń Q , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 prostopadłych do ściany (1, 2, 3, 4); b), c) płaskie zadania składowe; d) zadanie zredukowane. Dla prostoty w rysunkach opuszczono wykrzyżowania.

Ponieważ każdy układ sił można sprowadzić do rozważonych poprzednio przypadków prostszych, dla których stwierdziliśmy słuszność sformułowanej na początku tego artykułu reguły, widzimy, iż jedynym zagadnieniem wymagającym rozwiązania jest tylko zadanie skręcania. Analiza tego przypadku podana jest w art. 3.3.

3.3. Skręcanie kratownicy powłokowej

Rozpatrzmy jednogrodziową powłokową kratownicę, w której równoległymi ścianami są wręgi (rys. 3.8), poddaną działaniu dwóch par sił $Pa = P'b$ działających w płaszczyznach tych wręg. Wyznamy naprężenia siły w prętach pobocznych. W tym celu rozważmy równowagę jednego z węzłów, np. węzła 2. Zakładając, że $N_{2,7} > 0$, zauważmy, że wypadkowa W_2 z sił $N_{2,7}$ i $N_{2,6}$ musi leżeć w płaszczyźnie wręgi przedniej, inaczej bowiem nie mogłaby zrównoważyć siły W'_2 wypadkowej z sił $N_{2,1}$ i $N_{2,3}$. Obydwie wypadkowe muszą działać zatem wzdłuż krawędzi przecięcia się płaszczyzn (7, 2, 6) i (1, 2, 3, 4). Krawędź ta jest równoległa do (6, 7), gdyż obydwie wręgi są równoległe. Rysując teraz $\Delta 7, 2, 6$ (rys. 3.8b) i nanosząc na nim siły widzimy z podobieństwa trójkąta sił i trójkąta prętów, że:

$$N_{2,7}/l_{2,7} = N_{2,6}/l_{2,6},$$

a ponadto jeśli $N_{2,7} > 0$, to $N_{2,6} < 0$. Przechodząc do węzła 6 i prowadząc podobne rozważania dostajemy zależność

$$N_{2,6}/l_{2,6} = N_{1,6}/l_{1,6},$$

przy czym skoro $N_{2,6} < 0$, to $N_{1,6} > 0$. Identyczne postępowanie prowadzi do wniosku, że przy skręcaniu dla czynnych prętów poboczniczy stosunek wartości sił do długości pręta jest stały

$$N_{2,7}/l_{2,7} = N_{2,6}/l_{2,6} = N_{1,6}/l_{1,6} = \dots = N_i/l_i = \mu \text{ kG/cm}, \quad (3.1)$$

gdzie μ — nieoznaczony na razie współczynnik proporcjonalności.

Zastrzeżenie, że wzór (3.1) stosuje się tylko dla prętów czynnych wynika stąd, że niektóre pręty mogą być zerowe. W rozpatrywanym przykładzie takim prętem jest pręt (4, 9), co wynika z reguły 4 (art. 2.8). Zauważmy dalej, że pręty czynne tworzą na poboczniczy zamknięty obieg. Znaki sił w prętach idących po sobie w tym obiegu są zawsze przeciwnie. Tak więc założenie $N_{2,7} > 0$ wyznacza od razu znaki pozostałych sił: $N_{2,6} < 0$, $N_{1,6} > 0$, $N_{1,5} < 0$, $N_{5,4} > 0$ itd., przy czym końcowy pręt tego obiegu ($N_{3,7} < 0$) spotyka się znowu z $N_{2,7} > 0$.

Przechodząc do obliczenia współczynnika μ , poprowadźmy przekrój przez pręty poboczniczy i napiszmy równanie równowagi momentów względem osi prostopadłej do płaszczyzny wręg dla jednej z odciętych części (rys. 3.8c). W to równanie równowagi wchodzić będą tylko momenty od składowych sił N równoległych do płaszczyzny wręgi, tj. N' . Jeśli $\beta_{2,7}$ jest kątem między $N_{2,7}$ a płaszczyzną wręgi, to $N'_{2,7} = N_{2,7} \cos \beta_{2,7}$. Korzystając jednak z zależności (3.1) mamy:

$$N'_{2,7} = \mu l_{2,7} \cos \beta_{2,7} = \mu l'_{2,7},$$

gdzie $l'_{2,7}$ — długość rzutu pręta (2, 7) na płaszczyznę wręgi. Moment siły $N_{2,7}$ względem obranego punktu 0 wynosi

$$\mu l'_{2,7} Q_{2,7} = \mu 2F_{0,2,7},$$

gdzie $F_{0,2,7}$ — pole $\Delta 0,2,7$ na płaszczyźnie wręgi. Sumując podobnie obliczone momenty od wszystkich pozostałych sił wewnętrznych, mamy

$$2\mu(F_{0,2,7} + F_{0,2,6} + F_{0,6,1} + \dots + F_{0,3,7}) = 2\mu F,$$

gdzie F — pole figury zakreskowanej na rys. 3.8c ograniczonej rzutami czynnych prętów poboczniczy. Ten moment od sił wewnętrznych musi być w równowadze z momentem pary $M_s = Pa$, skąd

$$\mu = \frac{M_s}{2F}. \quad (3.2)$$

Dodatnia wartość współczynnika μ wynika stąd, że przy obranym znaku sił wewnętrznych moment ich ma zwrot przeciwny do zwrotu momentu pary M_s . Wzory (3.1) i (3.2) noszą nazwę wzorów Wagnera, a sam przypadek skręcania kratownicy jednogrodziowej — nazwę zadania Wagnera.

Wartość pola F wyznaczamy na ogół wykreślnie z rysunku rzutu kratownicy. W nielicznych przypadkach można podać wzory analityczne, na przykład dla kratownicy (rys. 3.6) pole F figury zakreskowanej na rysunku 3.6b jest

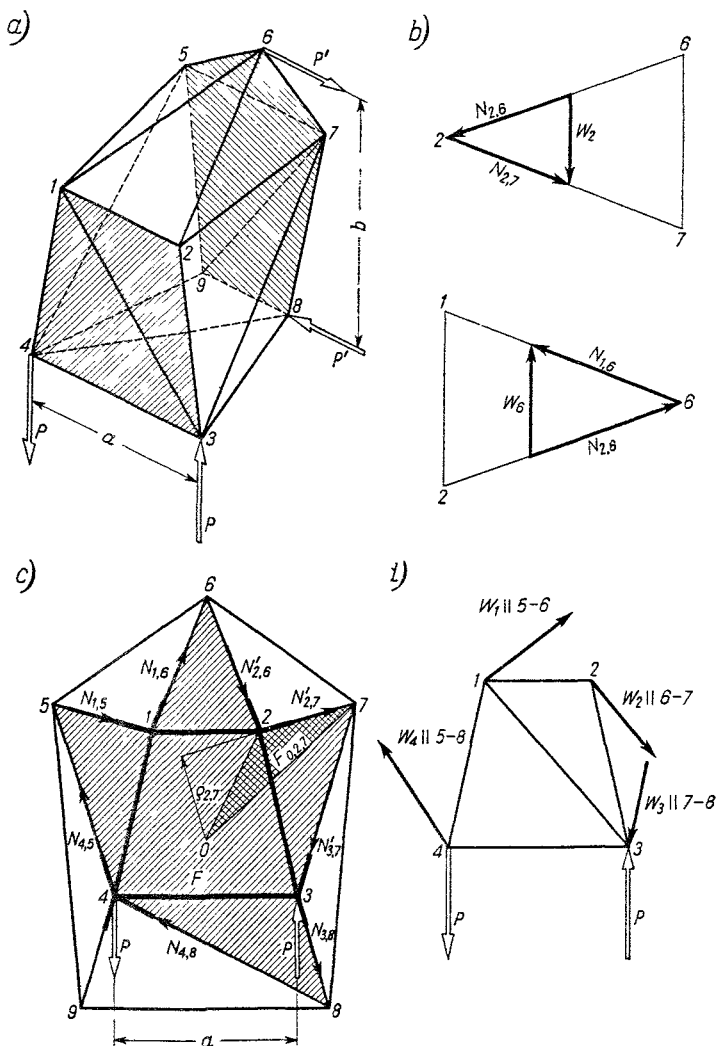
$$F = 0,5(b_1 h_2 + b_2 h_1). \quad (a)$$

Analizując bardziej szczegółowo sposób określenia wartości F (rys. 3.8) widzimy, że:

a. Pole F zależy na ogół od kształtu ścian równoległych i od układu prętów poboczniczy.

b. Rozsuniecie lub zbliżenie do siebie ścian równoległych nie zmienia wartości F , natomiast zmienia siły w prętach.

c. W kratownicy pryzmatycznej (rys. 3.5) pole F jest równe polu ściany równoległej (1, ..., 5) i nie zależy od układu wykrzyżowań.



Rys. 3.8. Skręcanie kratownicy jednogrodziowej

Część kratownicy zaznaczona na rys. c grubą linią jest tą, dla której rozpatruje się równowagę.

W niektórych przypadkach przy określeniu pola F napotykamy na dodatkową trudność. Biorąc przykładowo kratownicę (rys. 3.6), gdy kąt $\gamma'' < 0$, otrzymujemy obraz jej rzutu (rys. 3.9a), na którym pole F ograniczone czynnymi przy skręcaniu prętami ma pętlę w punkcie a . Jeśli wyciąć myślowo węgę

(1, 2, 3, 4) i założyć, że przy podanym obciążeniu parą sił $P_1 = P_4$ siła N_3 jest ściskająca, to rzuty pozostałych sił muszą tworzyć obieg zamknięty (rys. 3.9b). Momenty sił $N'_1, N'_6, \dots, N'_5$

$$2\mu F_{0,5,1}, \quad 2\mu F_{0,6,1}, \quad 2\mu F_{0,6,2}, \dots, \quad 2\mu F_{0,4,5}$$

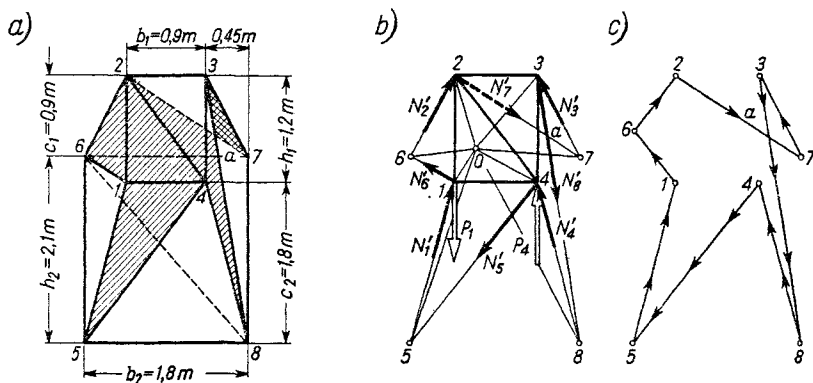
są z wyjątkiem momentów sił N'_3 i N'_4 jednakowego znaku.

Warunek równowagi

$$2\mu(F_{5,0,1} + F_{1,0,6} + F_{6,0,2} + F_{2,0,7} - F_{7,0,3} + F_{3,0,8} - F_{8,0,4} + F_{4,0,5}) = M = P_1 b_1$$

daje w rezultacie

$$\mu = \frac{M_s}{2(F_{1,6,2,a,3,4,5,1} - F_{a,7,2})} = \frac{M_s}{2F}.$$



Rys. 3.9. Określenie pola F

Wynika stąd reguła. W celu obliczenia pola F na rysunku rzutu prętów poboczniczy na płaszczyznę wręgi obieramy zwrot obchodzenia ciągu prętów. Pola, których obejście jest zgodne z przyjętym zwrotem, uważamy za dodatnie, pola, których obejście jest odwrotne — za ujemne. Tak więc na rys. 3.9a pole $F_{1,6,2,a,3,4,5,1} > 0$, pole $F_{a,7,2} < 0$. W danym przykładzie F wynosi:

$$F = b_1 h_1 + 0,5(b_2 - b_1) h_1 + 0,5 c_2 b_1 - 0,5 c_1 b_1 = (b_1 h_1 + b_2 h_1)/2, \quad (b)$$

a więc zachowuje wartość jak poprzednio (wzór a).

Mając wartości sił w prętach poboczniczy można wyznaczyć siły w prętach wręgi. Wręga przednia (rys. 3.8d) znajduje się pod działaniem pary zewnętrznej i wypadkowych W_k ($k = 1, \dots, 4$)

$$W_1 = \mu l_{5,6}, \quad W_2 = \mu l_{7,6}, \quad W_3 = \mu l_{7,8}, \quad W_4 = \mu l_{5,8}, \quad (3.3)$$

gdzie $l_{5,8}$ — długość odcinka na tylnej wrędze między węzłami 5 i 8. Ten ostatni wzór wynika stąd, że w węźle 4 jest $N_{4,9} = 0$, wobec czego wypadkowa z $N_{4,8}$ i $N_{4,5}$ jest równoległa właśnie do odcinka (5, 8). Jeszcze raz trzeba tu podkreślić, że wypadkowe W_k są równoległe do odpowiednich boków wręgi przeciwległej do tej, której równowagę rozważamy. Mając układ sił działających na wręgę, wyznaczenie sił w jej prętach przeprowadzamy, rozwiązując kratownicę płaską.

Dla kratownicy (rys. 3.6c) obciążonej momentem M_s (wzór a art. 3.2) otrzymujemy z wzoru (3.3) układ sił $W_1, \dots, W_s$ (rys. 3.10), gdzie μ ma wartość

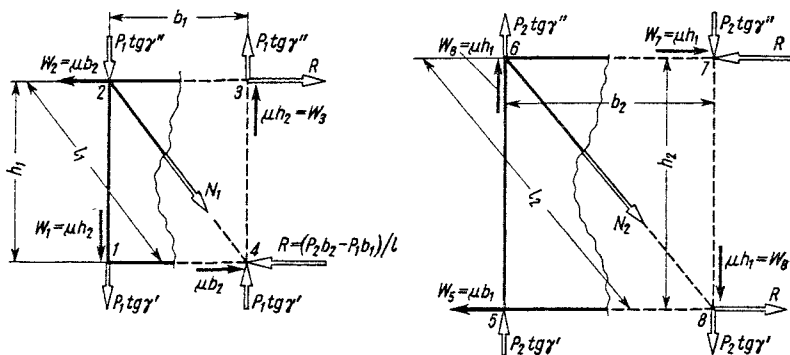
$$\mu = M_s/2F = (P_2 b_2 h_1 - P_1 b_1 h_2)/2Fl, \quad (c)$$

a F wyrażone jest wzorem (a). Rozwiązanie wręg daje następujące wyrażenia analityczne sił N_1 i N_2 odniesionych od odpowiednich długości l_1 i l_2 (rys. 3.10)

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= N_1/l_1 = (P_1 \psi_{1,1} - P_2 \psi_{1,2})/l, \\ n_2 &= N_2/l_2 = (P_2 \psi_{2,2} - P_1 \psi_{2,1})/l, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

gdzie l — długość kratownicy (rys. 3.6), a bezwymiarowe współczynniki* ψ (ważne tylko dla podanego na rys. 3.10 ustawienia wykrzyżowań) są:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1,2} &= b_2 h_2 / 2F, & \psi_{1,1} &= 1 - \psi_{1,2}, & \psi_{2,1} &= b_1 h_1 / 2F, \\ \psi_{2,2} &= 1 - \psi_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$



Rys. 3.10. Przykład rozpatrzenia statyki wręg kratownicy z rys. 3.6c

Kąt skręcenia Φ kratownicy zdefiniowany jako względny kąt obrotu ścian równoległych nie jest określony jednoznacznie, z uwagi na odkształcalność prętów tych ścian. Odkształcalność tę można jednak niekiedy pominąć i założyć, że ściany równoległe są nieskończenie sztywne. Postępując według ogólnych reguł (patrz rys. 2.29), przykładamy do równoległych ścian momenty skręcające $m_s = 1 \text{ kGem}$, wywołujące w pręcie „p” siłę $n_p = l_p/2F$. Obciążenie zewnętrzne wywołuje w tymże pręcie siłę $N_p = M_s l_p/2F$ i wydłużenie $u_p = M_s l_p^2/2FA_p E$. Podstawiając do wzoru (2.19) powyższe wyrażenia mamy kąt skręcenia Φ (w radianach)

$$\Phi = \frac{M_s}{4EF^2} \sum \frac{l_p^3}{A_p}, \quad (3.5)$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie czynne pręty poboczniey. W przypadku szczególnej konstrukcji pryzmatycznej (rys. 3.5), w której wszystkie podłużnice i wykrzyżowania są czynne

$$\Phi = \frac{M_s l^3 k}{4EF^2 A} \left(1 + \frac{A}{A_1 \cos^3 \beta} \right), \quad (e)$$

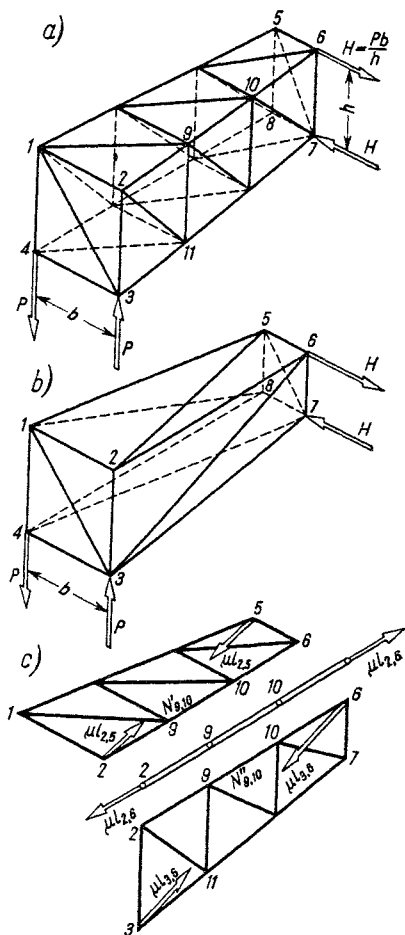
* Te współczynniki wpływowe ψ przedstawiają skutek działania odpowiednich jednostkowych obciążeń, przy czym pierwszy wskaźnik odnosi się do elementu (pręta), drugi oznacza miejsce (wręgę) przyłożenia siły P_1 lub P_2 .

przy czym zakładamy, iż równoległe ściany są wielokątami równobocznymi ($a = b = c = \dots$), przekroje podłużnie A i wykrzyżowań A_1 jednakowe, β — kąt między podłużnicą (np. 1, 6) a wykrzyżowaniem (1, 10), a k — liczba ścian (na rys. 3.5 $k = 5$). Wzór (e) ilustruje dobrze wniosek (art. 2.10) o wpływie wykrzyżowań na odkształcenia. Jeśli założymy $A/A_1 = 3$, $\beta = 45^\circ$, to drugi składnik w nawiasie przedstawiający wpływ wykrzyżowań wynosi $\sim 8,5$, a więc stanowi $\sim 90\%$ wartości całego nawiasu. Wynika stąd, iż w kratownicach sztywność na skręcanie uzyskuje się przez odpowiednie zwymiarowanie przekrojów wykrzyżowań.

Wykorzystując omówione zadanie Wagnera można rozwiązać przypadek skręcania powłokowej kratownicy wielogrodzowej, w której skrajne wręgi są do siebie równoległe* (rys. 3.11). Traktując układ prętów w ścianach bocznych jako konstrukcje wtórne (art. 3.1), wstawiamy zamiast nich pręty zastępcze (rys. 3.11b). Obliczywszy dla tak zmodyfikowanej kratownicy wartość μ (wzór 3.2) i siły we wszystkich prętach jej poboczniczy (wzór 3.1), wyznaczamy siły w prętach rzeczywistej kratownicy, obciążając każdą ze ścian płaskich siłą panującą w zastępczym przecię (rys. 3.11c). W omawianym przypadku siły w prętach zastępczych (2, 5), (3, 6), ... są ścisłujące i równe odpowiednio $-\mu l_{2,5}$, $-\mu l_{3,6}$, ... Tymi siłami trzeba więc obciążyć ściany boczne (1, 2, 5, 6), (2, 3, 7, 6) pełniące rolę zastępczych prętów. Tak obliczone siły są jednocześnie siłami całkowitymi dla wykrzyżowań i rozpórek ścian bocznych, natomiast w podłużnicach siły wypadkowe są sumą trzech składników, tj. dwóch pochodzących z rozwiązania ścian bocznych i jednego pochodzącego z rozwiązania kratownicy z prętami zastępczymi. Tak na przykład dla odcinka podłużnicy (9, 10) (rys. 3.11c)

$$N_{9,10} = N'_{9,10} + N''_{9,10} + \mu l_{2,6}.$$

Określenie sił w prętach wręg jest ostatnim etapem obliczenia. Otrzymawszy ostateczne wartości sił w prętach (2, 11) i (2, 9) wyznaczamy ich oddziaływanie W_2 na węzeł 2 i po-

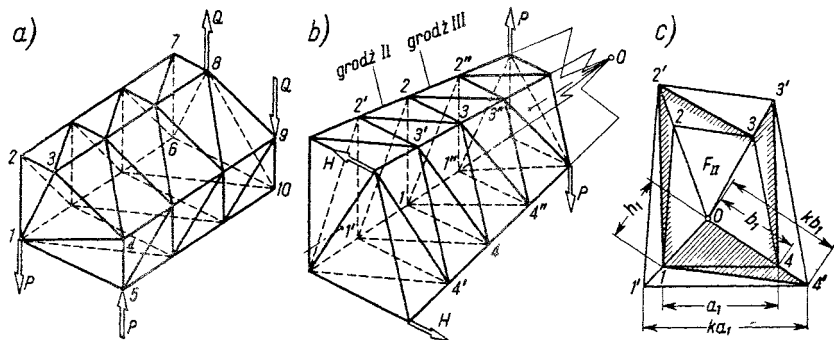


Rys. 3.11. Skręcanie kratownicy wielogrodzowej o ścianach płaskich

* Wręgi pośrednie mogą być zorientowane dowolnie.

dobnie na pozostałe węzły przedniej wręgi, a następnie rozwiązujemy tę wręgę jako kratownicę płaską.

Opisany sposób postępowania pozwala rozwiązać każdy przypadek skręcania kratownicy o płaskich ścianach bocznych i wręgach skrajnych równoległych do siebie. Należy jednak zwrócić uwagę, że rachunki muszą być przeprowadzone bardzo dokładnie, gdyż wyniki ostateczne dla prętów podłużnic otrzymuje się jako różnice dwóch dużych i bliskich sobie wielkości. Z tego powodu, tam gdzie to jest możliwe, posługujemy się sposobami dającymi odpowiedź bezpośrednią. Taka możliwość zachodzi dla wielogrodziowej kratownicy pryzmatycznej lub ostrosłupowej o równoległych do siebie wszystkich wręgach skrajnych i pośrednich (rys. 3.12). W takiej kratownicy obciążonej skręcającymi momentami w płaszczyźnie wręg skrajnych każdą z grodzi można obliczać oddzielnie (zadanie Wagnera).



Rys. 3.12. Kratownice z uproszczoną analizą skręcania

a), b) wielogrodziowe kratownice, pryzmatyczna i ostrosłupowa, O – wierzchołek ostrosłupa; c) geometria grodzi II i określenie pola F_{II} , pole $\Delta 104' = 0,5k_1$ ($kb_1 = k$ (pole $\Delta 104$)).

A oto dowód. Biorąc kratownicę ostrosłupową (rys. 3.12b) obliczamy wartość $\mu_{II} = M_s/2F_{II}$ i $\mu_{III} = M_s/2F_{III}$ dla kolejnych grodzi II i III. Z rzutu wręg (1, ..., 4) i (1', ..., 4') (rys. 3.12c) wynika, iż pole $F_{II} = kF$, gdzie $k > 1$ – stosunek długości odpowiadających elementów obu wręg (boków, promieni), a F – pole wręgi (1, 2, 3, 4). Analogicznie pole $F_{III} = k'F$, gdzie $k' < 1$ – stosunek długości odpowiadających elementów wręg (1'', 2'', 3'', 4'') i (1, 2, 3, 4). W wyniku otrzymujemy

$$\mu_{II} = M_s/2kF, \quad \mu_{III} = M_s/2k'F.$$

Wyznaczając reakcję prętów (2', 3) i (3', 3) na węzeł 3, a prętów (2, 3'') i (2, 2'') na węzeł 2 według wzorów (3.3), otrzymujemy

$$W_3 = \mu_{II}l_{2,3'} = \mu_{II}kl_{2,3} = M_sl_{2,3}/2F,$$

$$W_2 = \mu_{III}l_{2'',3''} = \mu_{III}k'l_{2,3} = M_sl_{2,3}/2F.$$

Stąd wynika, iż pręt (2, 3) znajduje się w równowadze, gdyż siły $W_2 = W_3$ są przeciwnie skierowane. Ten sam wynik otrzymamy dla pozostałych prętów wręgi (1, ..., 4). Wynika stąd, iż wręga ta będzie w równowadze pomimo tego, iż jest ona niesztynna. Ten sam dowód możemy przeprowadzić dla wszystkich wręg niesztynnych. Tak więc przy podanym sposobie obliczania sił zachowana będzie równowaga wszystkich elementów, a stąd na podstawie jednoznaczności rozwiązania wnioskujemy o słuszności reguły. Dowód słuszności reguły dla kratownicy pryzmatycznej wynika od razu jeśli założyć, że punkt O (rys. 3.12b) oddala się do nieskończoności.

Powyższa reguła nie może być stosowana do kratownicy, których podłużnice zbiegają się na klin.

Należy również podkreślić, że wszystkie te rozważania dotyczą kratownic o ścianach płaskich. Z punktu widzenia merytorycznego, błędne jest stosowanie tych rozwiązań do przypadku, gdy podłużnice wielogrodzowej kratownicy są skośne względem siebie, gdyż wtedy ściany nie są płaskie (rys. 3.13).

Przykład. Wyznaczyć siły w prętach 1, ..., 10 trójkątowej kratownicy ostrosłupowej (rys. 3.14), obciążonej dwoma parami sił przyłożonymi we wręgach pośrednich.

Rozwiązanie. Wprowadzając zerowe układy sił, rozdzielamy zadanie na dwa, z których pierwsze (rys. 3.14b) jest złożeniem czterech zagadnień płaskich, podczas gdy drugie (rys. 3.14c) jest zagadnieniem skręcania kratownicy wielogrodzowej momentem $M_s = Pa/4$. Rysując w kładzie te kratownice płaskie (rys. 3.14d), do których należą interesujące nas pręty (z wyjątkiem 10), rozwiązujemy je metodą Rittera, otrzymując odpowiedź podaną na tym rysunku. Przechodząc do rozwiązania przypadku skręcania (rys. 3.14c) zauważmy, że dzięki ostrosłupowemu ukształtowaniu kratownicy można obliczyć siły stosując wzór Wagnera do każdej z grodzi oddzielnie. Powierzchnie pola F są (patrz rys. 3.6b i wzór a)

$$F_I = 5a^2/6 = 3,33 \text{ m}^2, \quad F_{II} = 5a^2/9 = 2,22 \text{ m}^2, \quad F_{III} = a^2/3 = 1,33 \text{ m}^2,$$

skąd przy $M_s = Pa/4 = 5 \text{ tm}$ mamy:

$$\mu_I = M_s/2F_I = 0,75 \text{ t/m}, \quad \mu_{II} = M_s/2F_{II} = 1,13 \text{ t/m}, \quad \mu_{III} = M_s/2F_{III} = 1,87 \text{ t/m}.$$

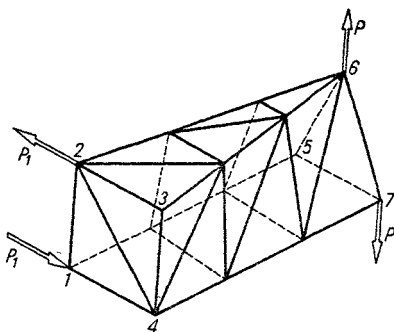
Biorąc z rys. 3.14d długości l_i otrzymujemy (według 3.1) wartości sił w interesujących nas prętach (rys. 3.14c) z wyjątkiem pręta 4.

Na omówienie przy tym zasługuje wyznaczenie sił w prętach 6 i 8. Otóż rozpatrując równowagę węzła 6 w płaszczyźnie ściany bocznej mamy (rys. 3.14e), iż od strony grodzi I działa nań wypadkowa $W = \mu_I l_{2,3} = 0,75 \cdot 2 = 1,5 \text{ t}$ skierowana do góry, podczas gdy w węźle 7 w tejże ścianie $W' = \mu_{II} l_{10,11} = 1,13 \cdot 1,33 = 1,5 \text{ t}$ skierowana do dołu. Tak więc pręt 6 łączący węzły 6 i 7 rozciągany jest siłą 1,5 t, co podano w odpowiedzi. Czytelnikowi zostawia się przeprowadzenie takiej analizy dla pręta 8.

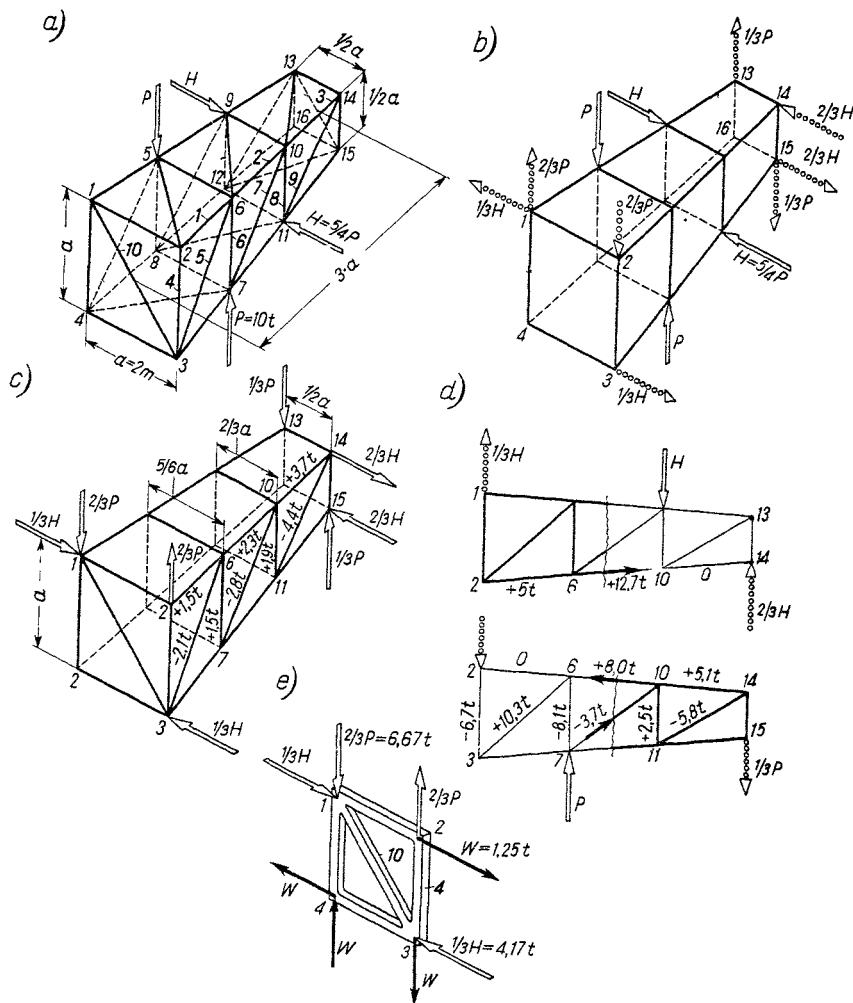
Pozostaje obliczenie sił w prętach 10 i 4. Rysując wręgę przednią (rys. 3.14e) z działającymi na nią obciążeniami $2P/3$; $1/3H$ i oddziaływaniem $W = \mu_I l_{5,6} = \mu_I l_{6,7} = \dots = 1,25 \text{ t}$, stwierdzamy, iż wręga jest w równowadze. Rozwiązując ją jako kratownicę płaską mamy $N_{2,3} = 2P/3 = 6,7 \text{ t}$, $N_{1,3} = -7,7 \text{ t}$. Zestawiając poszczególne wyniki mamy tabl. 3.1 (siły w tonach).

Z przykładu tego wynika, iż przyłożenie momentu skręcającego w nieszytywnej wrędze statycznie wyznaczalnej kratownicy powoduje duży wzrost sił. Gdyby usunąć pręty (1, 3) i (13, 15) wstawiając je we wręgi obciążone, to całkowite siły w prętach 2 i 7 byłyby równe wartościom wiersza trzeciego, tj. byłyby 2,3 t oraz -2,8 t zamiast 23,0 t i -6,5 t, a wszystkie pręty pobocznic w grodziach I i III byłyby zerowe. Tak duży wzrost siły powoduje również duży (kilkakrotny) wzrost odkształceń. Daje to wskazówkę praktyczną, aby w tego rodzaju obciążeniach usztywniać te wręgi, w których wprowadza się momenty skręcające.

Wynika stąd również przestroga dla prowadzących obliczenia, a mianowicie, że w przypadku wprowadzenia momentu skręcającego w płaszczyźnie wręgi nieszytywnej należy najpierw zredukować moment dla wręg skrajnych i potem dopiero stosować wzór Wagnera.



Rys. 3.13. Przykład kratownicy wielogrodzowej o prostych podłużnicach, lecz niepłaskich ścianach. Dla większej przejrzystości rysunku nie narysowano wykrzyżowań ściany dolnej i tylnej



Rys. 3.14. Przykład liczbowy kratownicy wielogrodziowej płaskościennnej

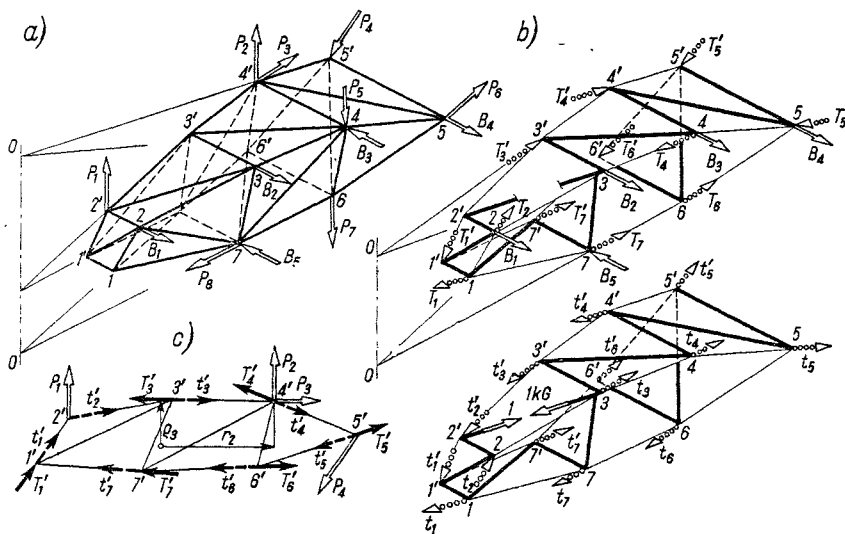
ROZWIĄZANIE KRATOWNICY PŁASKOŚCIENNEJ WIELOGRODZIOWEJ

Tablica 3.1

Pręt nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ściana górna	5,0	+12,7	0	—	—	—	—	—	—	—
ściana boczna	0	8,0	5,1	-6,7	+10,3	-8,1	-3,7	+2,5	-5,8	—
skręcanie	1,5	2,3	3,7	+6,7	-2,1	+1,5	-2,8	+1,9	-4,4	-7,7
całkowite N (t)	6,5	23,0	8,8	0	8,2	-6,6	-6,5	4,4	-10,2	-7,7

3.4. Kratownice z 4 łamanymi podłużnicami

Poza kratownicami o wszystkich ścianach płaskich (art. 3.2÷3.3) bardzo często stosuje się kratownice o czterech podłużnicach łamanych. Kratownice te dają się podzielić na dwie grupy a mianowicie: z podłużnicami płasko i przestrzennie załamanymi.



Rys. 3.15. 4-podłużnicowa kratownica o dwóch ścianach płaskich

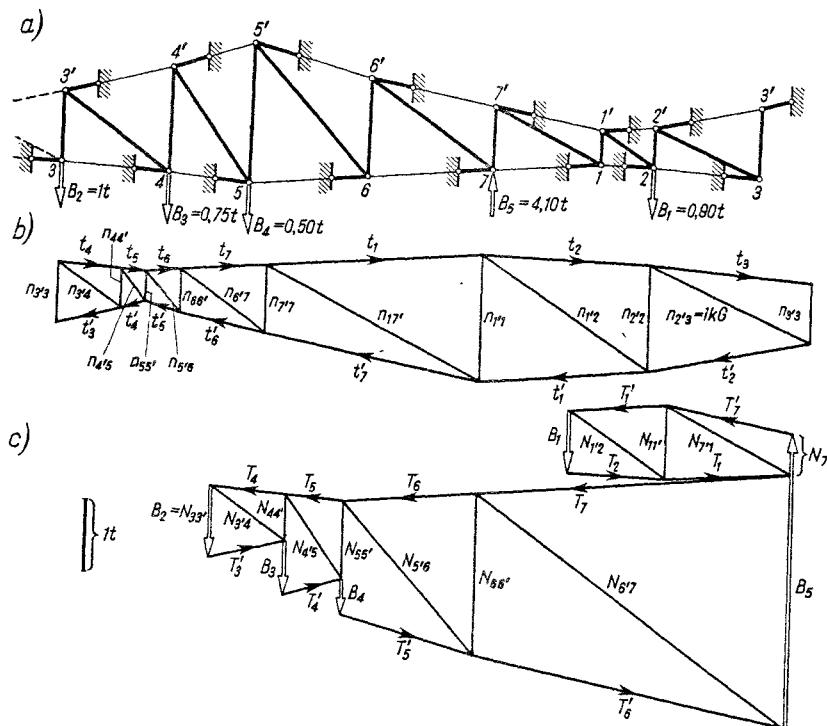
a) rozdział układu obciążeń; b) dwa zadania składowe przy określeniu sił w więzaniach ścian; c) układ obciążeń płaskiej ściany płasko obciążonej.

Analizę kratownic pierwszej grupy objaśnimy na przykładzie konstrukcji (rys. 3.15a), w której podłużnice (2, 3, 4, 5), (1, 7, 6, 5), (2', 3', 4', 5'), (1', 7', 6', 5') leżą w dwóch nierównoległych płaszczyznach głównych (1, ..., 7) i (1', ..., 7'), a rozpórki (1, 1'), ..., (7, 7') są wszystkie równoległe do siebie*.

Po wydzieleniu szeregu zadań płaskich (patrz art. 3.2) możemy ostatecznie sprowadzić obciążenie do dwóch układów (rys. 3.15a), z których pierwszy jest układem płaskim (siły $P_1, \dots, P_4$) działającym w płaszczyźnie jednej ściany głównej (ściana 1', ..., 7'), a tylko drugi układ (siły $P_5, \dots, P_8, B_1, \dots, B_5$) jest przestrzennym układem obciążeń przyczepionych do węzłów drugiej ściany głównej (ściana 1, ..., 7). Ten drugi układ dzielimy z kolei na zespół sił działających w płaszczyźnie tej drugiej ściany (siły $P_5, \dots, P_8$) i zespół równoległych sił działających wzdłuż rozpórek (siły $B_1, \dots, B_5$). Ten drugi zespół spełnia warunek równowagi momentów względem osi $O-O$ będący linią przecięcia się płaszczyzn ścian głównych.

* Kratownice te mogą nie mieć płaszczyzny symetrii. Zarówno układ wykrzyżowań na płaszczyznach głównych nie musi się pokrywać (np. wykrzyżowania 2, 7 i 1', 3'), jak i trapezy ścian (np. 2, 2', 3', 3) nie muszą być równoramienne.

Spróbujmy obecnie wyznaczyć siły w układzie prętów wiążących obie ściany główne. W tym celu izolujemy ten układ prętów obciążając go tylko układem sił B (rys. 3.15b) oraz reakcjami głównych ścian. Reakcje te działają wzdłuż linii przecięcia płaszczyzn ścian głównych z odpowiednimi ścianami układu wiążącego (analogia do sił W z art. 3.3). Tak na przykład reakcja w węźle 4 działać musi wzdłuż linii (3, 4) stanowiącej przecięcie płaszczyzny (3, 4, 4', 3') ze ścianą (1, ..., 7). Samo obliczenie sił w prętach i reakcji ścian przeprowadzamy w dwóch etapach. W etapie pierwszym przecinamy jeden pręt, np. (2', 3), i obliczamy kolejno siły w prętach pozostałych. Tak na przykład w przecię (3, 3') siła ta jest równa B_2 . Rozkładając następnie tę siłę na kierunek pręta (3', 4) i kierunek linii (3', 4') określimy reakcję T'_3 i siłę $N_{3',4}$. Przechodząc następnie do węzła 4 obciążonego znaną już siłą $N_{3',4}$ i siłą B_3 obliczamy siłę $N_{4,4'}$ i reakcję T'_4 itd. W drugim etapie w prze-



Rys. 3.16. Rozwiązanie składowych zadań określenia sił w wiązaniu ścian

a) geometria układu wiążącego w rozwinięciu; b) rozwiązanie przy obciążeniu $n_{3',4} = X = 1 \text{ kg}$; c) rozwiązanie przy obciążeniu siłami $B_1, \dots, B_7$.

ciętym przecię (2', 3) wprowadzamy jednostkowe siły i analogicznie jak poprzednio obliczamy siły $n_{3,3'}$, $n_{3,4}$, ... oraz reakcje t_2 , t'_3 , t_4 , ... itd. Opisane czynności przeprowadzamy zazwyczaj wykreślnie (rys. 3.16) rysując układ wiążących prętów w rozwinięciu i rozwiązując taką płaską kratownicę przy obciążeniu siłami jednostkowymi (rys. 3.16b)

bądź siłami B (rys. 3.16c). Linie działania reakcji T bądź t są przy tym rysowane na rys. 3.16a w postaci prętów. Rzeczywistą wartość siły w myślowo przeciętym przecie (2', 3) wyznaczamy z równania równowagi momentów* tej ściany głównej, na którą działa tylko płaski układ sił (rys. 3.15c).

W tym celu obierając dowolny punkt A obliczamy oddzielnie moment M_A obciążeń $P_1, \dots, P_4$ oraz reakcji $T'_1, \dots, T'_7$ jako

$$M_A = \sum P_i r_i + \sum T'_i \varrho_i \text{ kGem}, \quad (a)$$

oddzielnie zaś moment m_A od wszystkich sił $t'_1, \dots, t'_7$

$$m_A = \sum t'_i \varrho_i \text{ kGem/kG}, \quad (b)$$

gdzie r_i i ϱ_i — ramiona odpowiednich sił (rys. 3.15c). Wartość siły X w przeciętym przecie (2', 3) (analogia do metody z art. 2.7) obliczamy z równania

$$X m_A + M_A = 0, \quad (3.6)$$

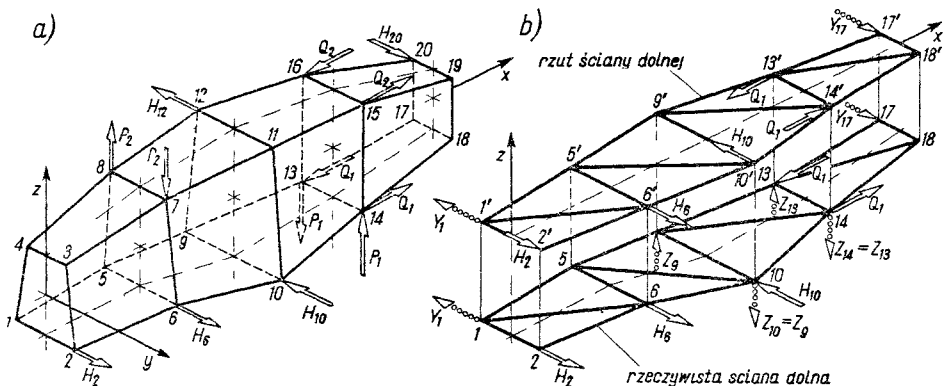
a wypadkowe siły W_i w prętach wiążących ściany główne z zależności

$$W_i = n_i X + N_i$$

analogicznej do (2.14). Na koniec rozwiązujemy obie główne ściany obciążone w swych płaszczyznach siłami P , T , tX (lub T'' , $t'X$).

* Opisaną metodę rozwiązania można uogólnić na przypadek, gdy rozpórki (1, 1'), ..., (7, 7') nie są równoległe**. Jedyną różnicą pojawia się w rysowaniu rozwinięcia układu prętów wiążących ściany główne i wyznaczeniu linii działania sił T i t .

Przechodząc do analizy drugiej grupy kratownic z podłużnicami przestrzennie załamanymi ograniczymy się do przypadku, gdy rozważana kratownica jest symetryczna i składa się z szeregu grodzi o równoległych wręgach skrajnych i pośrednich.



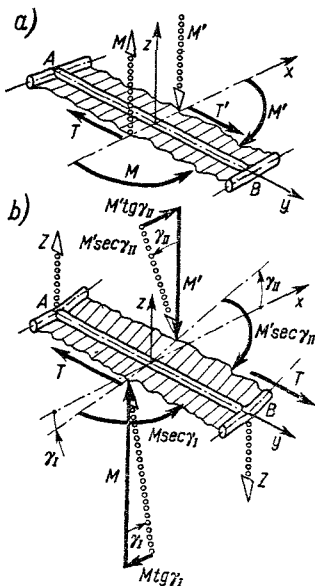
Rys. 3.17. Przykład kratownicy o podłużnicach przestrzennie załamanych

a) antysymetryczny układ obciążeń, siły P równoległe do osi z , Q do x , H do y ; b) redukcja statyki ściany dolnej do zadania płaskiego.

* Można udowodnić, iż przy spełnieniu tego warunku pozostałe warunki równowagi są tożsamościowo spełnione.

** Patrz artykuł A. Г. Иммерман, *Расчет пространственных конструкций*, II, Москва 1951.

Ponieważ dla takich kratownic działanie symetrycznych obciążeń było już omówione (rys. 2.23), zagadnienie redukuje się do analizy antysymetrycznych obciążeń (rys. 3.17a) złożonych z par sił P , Q , bądź z sił H prostopadłych do płaszczyzny symetrii xz . Podobnie jak w art. 3.2 tak i tutaj zadanie wyznaczenia sił w prętach rozdzielimy na dwa zagadnienia statyki ścian górnej i dolnej oraz zagadnienie skręcania kratownicy. Aby osiągnąć ten cel, rozważmy jedną ze ścian na przykład ścianę dolną (rys. 3.17b) obciążoną tylko siłami



Rys. 3.18. Określenie pary sił Z w zadaniu według rys. 3.17b
a) układ obciążeń rozpórki AB w zadaniu płaskim; b) przemiana obciążeń przy przejściu do ściany rzeczywistej.

Aby więc izolowana myślowo rozpórka AB była w równowadze, musimy dodać parę sił Z o wartości

$$Z = (M \operatorname{tg} \gamma_I - M' \operatorname{tg} \gamma_{II})/b, \quad (3.8a)$$

gdzie b — długości rozpórki AB .

W przypadku gdy w węzłach rozpórki nie działa para sił typu Q , wtedy $M' = M$ i

$$Z = M(\operatorname{tg} \gamma_I - \operatorname{tg} \gamma_{II})/b. \quad (3.8b)$$

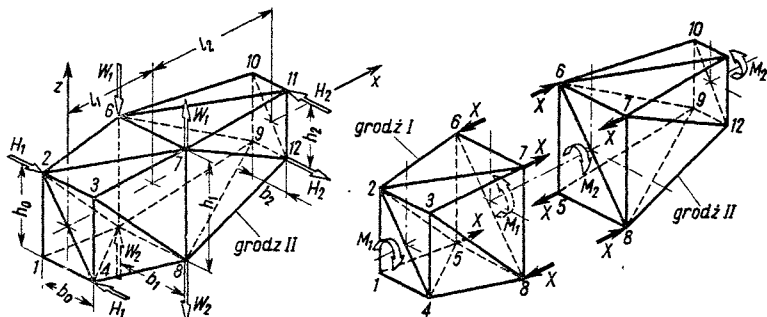
* Przekształcenie sił według (3.7) oznacza dodanie do siły N'_i siły $N'_i \operatorname{tg} \gamma_i$ prostopadłej do płaszczyzny xy . Suma tych sił $N'_i \operatorname{tg} \gamma_i$ dla prętów schodzących się w danym węźle musi być zrównoważona wprowadzoną siłą Z .

** Z uwagi na istnienie par sił typu Q i sił typu H momenty M i M' oraz siły tnące T i T' mogą nie być jednakowe.

Rozwiązując analogicznie górną ścianę wydzielamy drugie zadanie statyki ściany. Po wydzieleniu tych zadań pozostałe obciążenie kratownicy składa się z par sił typu P i wziętych z odwrotnym znakiem par sił Z określonych w poprzednio wydzielonych zadaniach. We wręgach skrajnych mogą działać siły typu Y_1 i Y_{17} tworzące w płaszczyznach każdej z nich też tylko pary sił*. Pozostałe obciążenie przedstawia więc skręcanie kratownicy. W porównaniu jednak z zadaniem rozpatrzonym w art. 3.2 obciążenie parami sił przyłożone jest nie tylko w płaszczyznach wręg skrajnych, lecz i w płaszczyznach wręg pośrednich. Rozwiązanie takiego zadania musi być zatem przeprowadzone odmiennie niż w art. 3.3 i 3.4.

3.5. Skręcanie kratownic o podłużnicach łamanych przestrzennie

Rozpoczynając od najprostszego przypadku rozważmy dwugrodziową kratownicę o prostokątnych, równoległych do siebie wręgach obciążoną parami sił w płaszczyznach wręg skrajnych i parami sił W w płaszczyźnie wręgi środkowej. Na skutek takiego układu



Rys. 3.19. Skręcanie kratownicy z jednym załomem przestrzennym podłużnic
a) geometria konstrukcji i układ obciążeń; b) układ obciążeń rozdzielonych grodzi, $M_1 = H_1 h_0$, $M_2 = H_2 h_0$.

obciążeń moment M_1 skracający grodzie I jest inny niż moment M_2 w grodzi II. Obliczenie sił dzielimy na dwa etapy. Przecinając mianowicie wręgę środkową** przy wprowadzeniu w niej fikcyjnego wykrzyżowania (6, 8) zakładamy w pierwszym etapie, iż między otrzymanymi przez ten podział grodziami nie ma oddziaływań wzdłuż osi x . W takim ujęciu skręcanie każdej grodzi przedstawia zadanie Wagnera (rys. 3.8), a wypadkowa siła w fikcyjnym wykrzyżowaniu (6, 8) jest algebraiczną sumą sił wynikających z rozwiązania każdej grodzi. Posługując się wskazówkami art. 3.3 otrzymujemy dla grodzi I

$$N'_{6,s} = -(M_1 b_0 l_{6,s}) / (2F_1 b_1),$$

gdzie $2F_1 = b_0 h_1 + b_1 h_0$. Podobnie dla grodzi II

$$N''_{6,s} = (M_2 b_2 l_{6,s}) / (2F_2 b_1),$$

* Dowód analogiczny jak w art. 3.2 (rys. 3.4).

** Ten podział dokonujemy przecinając wzdłużnie każdy z prętów wręgi środkowej. Otrzymujemy wtedy dwie wręgi, jedną przynależną do I grodzi, drugą do II grodzi.

gdzie $2F_2 = b_1 h_2 + b_2 h_1$. Siła wypadkowa n odniesiona do jednostki długości pręta (6, 8) jest więc

$$n = (N'_{6,s} + N''_{6,s})/l_{6,s} = [(M_2 b_2/2F_2) - (M_1 b_0/2F_1)]/b_1, \quad (3.9)$$

a zatem nie jest ona na ogół równa zero. Ponieważ w rzeczywistości wřęga środkowa nie ma takiego wykrzyżowania, więc jako konstrukcja nieszywna nie może ona przenosić takiej siły. Trzeba zatem zrewidować pierwotne założenie i dopuścić istnienie w węzłach wřęgi środkowej dwóch samozrównoważonych układów sił X (rys. 3.19b), przedstawiających oddziaływanie między grodziami*. Wyznaczamy teraz siłę $N_{6,s}$ wywołaną działaniem grup X na obie grodzie (drugi etap obliczeń). Utożsamiając w myśli jedną z grodzi np. grodz II z kratownicą (rys. 3.6) widzimy, iż działanie grupy sił X jest identyczne z działaniem grupy P_1 . Stosując zatem wzory (3.4), w których $P_1 = X$, $P_2 = 0$, mamy

$$N_{6,s}^* = X[1 - (b_2 h_2/2F_2)](l_{6,s}/l_2).$$

Postępując analogicznie z grodzią I określamy siłę $N_{6,s}^{**}$

$$N_{6,s}^{**} = X[1 - (b_0 h_0/2F_1)](l_{6,s}/l_1),$$

a następnie wypadkową siłę $N_{6,s} = N_{6,s}^* + N_{6,s}^{**}$. Ponieważ sumaryczna siła $N_{6,s} + n l_{6,s} = 0$, więc otrzymujemy

$$X = -n/\Psi_{1,1}, \quad (3.10)$$

gdzie współczynnik wpływowy

$$\Psi_{1,1} = \{[1 - (b_0 h_0/2F_1)]/l_1\} + \{[1 - b_2 h_2/2F_2]/l_2\} \quad (3.11)$$

przedstawia odniesioną do jednostki długości pręta (6, 8) sumaryczną siłę wywołaną działaniem grup sił $X = 1$ kG.

Jeśli ze wzoru (3.10) otrzymujemy $X < 0$, to rzeczywisty zwrot sił X jest przeciwny do założonego na rys. 3.19b. Wartość i zwrot grupy sił X nie należą przy tym od sposobu ustawienia wykrzyżowań. Jeśli $\Psi_{1,1} = 0$, to kratownica ma postać krytyczną i pod działaniem momentów skrecających staje się ona pseudomechanizmem** (art. 2.6).

Wyznaczwszy wartość sił X możemy obliczyć siły w prętach z superpozycji trzech zadań prostszych***, a mianowicie: zadania Wagnera przy obciążeniu momentami M_1 ub M_2 , płaskich zadań odpowiadających obciążeniom siłami X (rys. 3.6a) i wreszcie drugiego zadania Wagnera (rys. 3.6c) przy obciążeniu I grodzi momentem ($X b_1 h_0/l_1$), a II grodzi momentem ($-X b_1 h_2/l_2$) (patrz wzór (a) z art. 3.2).

Przechodząc do bardziej złożonego przypadku skrećania kratownicy z wieloma przestrzennymi załomami podłużnic, rozważmy symetryczną kratownicę (rys. 3.20) obciążoną parami sił typu P i parami sił Z wynikającymi ze statyki górnej i dolnej ściany (art. 3.4). W pierwszym etapie rozwiązania

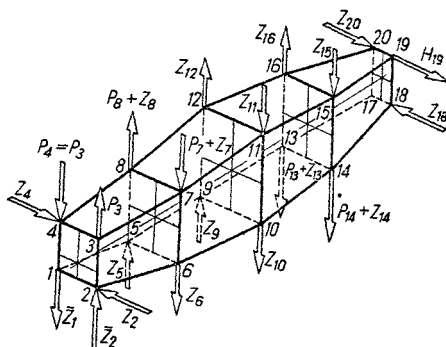
* Określone w pierwszym etapie (zadania Wagnera) siły zapewniają równowagę każdej grodzi. Jakikolwiek zatem dodatkowy układ sił musi być sam w równowadze.

** Dalszą dyskusję wzorów (3.9), (3.10) i (3.11) zostawia się czytelnikowi.

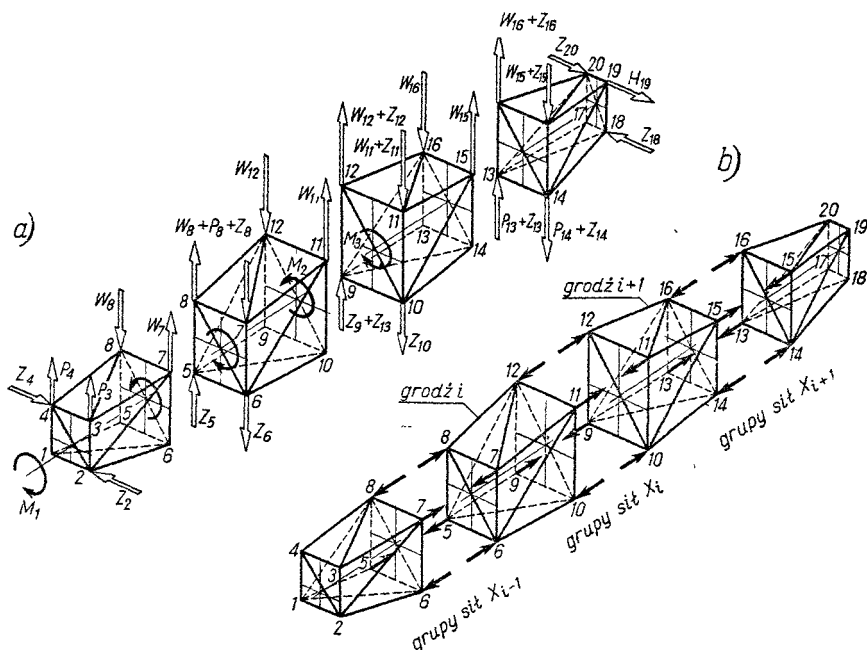
*** Ponieważ stosowanie formalne wzorów (3.9), (3.10) wymaga treningu, na początek zaleca się prowadzenie obliczeń przy zachowaniu jedynie przewodniej myśli. Tak więc zaleca się obliczenie sił $n_{6,s}$, $N_{6,s}$ według wskazówek art. 3.2 i 3.3 bez uciekania się do wzorów. Na koniec po obliczeniu X zaleca się przeprowadzenie superpozycji na konkretnych danych liczbowych.

podzielmy tę kratownicę na sześciąścienne grodzie, wprowadzając w każdej płaszczyźnie myślowego podziału fikcyjne wykrzyżowania oraz zerowe grupy par sił $W_i = W_8, W_{11} = W_{12}, \dots$ utrzymujące każdą z grodzi w równowadze (rys. 3.21a).

Obliczmy teraz siły w tych fikcyjnych wykrzyżowaniach, tak jak gdyby każda w grodzi pracowała oddzielnie. Oznaczając dla ogólności grodz II jako i , grodz III jako $i+1$, momenty skręcające te gro-



Rys. 3.20. Uogólnione skręcanie kratownicy wielogrodziowej



Rys. 3.21. Rozdział przypadku skręcania uogólnionego

a) skręcanie oddzielnych grodzi; b) układ grup sił X .

dzie jako M_i, M_{i+1} oraz biorąc wymiary według rys. 3.22, mamy powtórzenie przypadku z rys. 3.19b. W wykrzyżowaniu wręgi i otrzymujemy (wzór 3.9)

$$n_i = [(M_{i+1}b_{i+1}/2F_{i+1}) - (M_i b_{i-1}/2F_i)]/b_i. \quad (3.12)$$

Ponieważ siła ta^* nie jest na ogół równa zeru, zachodzi potrzeba wprowadzenia dodatkowych grup sił X , które by zredukowały tę siłę do zera (rys. 3.21b). Różnica w porównaniu z rozpatrzonym poprzednio przypadkiem (rys. 3.19) tkwi w tym, iż obecnie zamiast jednej grupy sił X działa ich więcej. Ponadto na wartość siły w fikcyjnym wykrzyżowaniu wręgi i mają wpływ nie tylko siły X_i , lecz również X_{i-1} (grodz i) oraz X_{i+1} i X_i (grodz $i+1$) (wzory 3.4). Przekształcając z odpowiednimi oznaczeniami wyniki (3.4) i dodając wartość n_i ze wzoru (3.12) mamy w rezultacie równanie

$$-\psi_{i,i-1}X_{i-1} + \Psi_{i,i}X_i - \psi_{i,i+1}X_{i+1} + n_i = 0 \quad (3.13)$$

wyrażające, iż wypadkowa siła (odniesiona do jednostki długości fikcyjnego wykrzyżowania wręgi i) jest równa zeru. Występujące w tym równaniu oznaczenia (patrz wzory 3.4 i 3.11) są

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,i-1} &= b_{i-1}h_{i-1}/2F_i l_i, & \psi_{i,i+1} &= b_{i+1}h_{i+1}/2F_{i+1} l_{i+1}, \\ \Psi_{i,i} &= (1/l_i) + (1/l_{i+1}) - (\psi_{i,i-1} + \psi_{i,i+1}). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

W równaniu (3.13) wchodzi wartości trzech grup sił X_i , przypomina więc ono równanie trzech momentów w zadaniu belki ciągłej. Istotna różnica jednak tkwi w tym, że współczynniki równania (3.13) zależą wyłącznie od ukształtowania kratownicy, podczas gdy w równaniu trzech momentów zależą one również od sztywności.

Rys. 3.22. Oznaczenia wymiarów grodzi

Liczba równań typu (3.13) wystarczy całkowicie do wyznaczenia niewiadomych X , jeśli bowiem kratownica ma k grodzi, to niewiadomych sił X jest $k-1$, tj. tyle, ile fikcyjnych wykrzyżowań. Pierwsze i ostatnie równanie zawierają tylko dwie niewiadome, gdyż w wręgach skrajnych $X=0$. Ta postać układu równań pozwala tak jak w przypadku belek ciągłych na łatwe jego rozwiązanie z dostateczną dokładnością nawet przy użyciu suwaka.

Mając wartość X można wyznaczyć siły w prętach wywołane działaniem tych grup, a następnie przez superpozycję obu przypadków (rys. 3.21a, b) wyznaczyć siły odpowiadające przypadkowi skręcania uogólnionego (rys. 3.20). Stosując dalej superpozycję z wynikami zadań (rys. 3.17) otrzymujemy odpowiedź ostateczną. Z rozwiązania szeregu przykładów liczbowych wynika, że grupy sił X mają duże wartości tylko wtedy, gdy pary sił typu $P_i = P_s$ (rys. 3.20) przyłożone są w płaszczyznach wręg nieszywnych. W przypadku gdy kratownica o łagodnie załamanych podłużnicach skracana* jest momentami przyłożonymi we wręgach skrajnych, siły X otrzymuje się znacznie mniejsze (rzędu paru procent sił P). Te wyniki dają podstawę do wniosku, że w przypadku kratownicy o łagodnym załamaniu podłużnic można w przybliżeniu rozwiązać skręcanie momentami przyłożonymi we wręgach skrajnych, traktując każdą z grodzi oddzielnie (zadanie Wagnera). Przybliżenie to nie jest dozwolone, jeśli moment skracający zmienia się raptownie wzdłuż konstrukcji.

Przeprowadzone rozważania dotyczyły najczęściej spotykanego przypadku konstrukcji z wręgami prostokątnymi. Gdy wręgi są trapezowe, metoda postępowania jest identyczna, a wynikiem jest znowu równanie (3.13). Różnica przejawia się w wyrażeniach (3.12) i (3.14). Drugą różnicę stanowi postać grupy sił X , które tym razem nie są równe sobie, lecz tworzą dwie pary sił o takim samym momencie (rys. 3.23a). Wprowadzając oznaczenia (rys. 3.23b) otrzymujemy** zamiast (3.12) i (3.14).

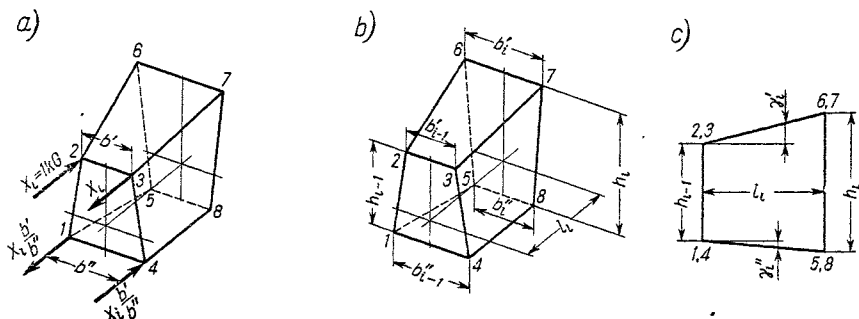
* Wyrażenie (3.12) można stosować tylko wtedy, gdy zgodnie z rys. 3.19 i 3.21 obciążenia wręgi są równoległe do osi symetrii. Nie można zatem stosować tego wzoru dla określenia sił w prętach (2, 4) lub (18, 20).

** Wyprowadzenie tej zależności, wyrażań dla współczynników, jak również sprawdzenie przypadku szczególnego, gdy $b'_i = b''_i$ zostawia się czytelnikowi.

$$n_i = \{M_{i+1}[1 - (b'_i h_{i+1}/2F_{i+1})]/(b'_i h_i)\} - \{M_i[1 - (b'_i h_{i-1}/2F_i)]/(b'_i h_i)\}, \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,i-1} &= b'_{i-1} h_{i-1}/2F_i l_i, & \psi_{i,i+1} &= b'_{i+1} h_{i+1}/2F_{i+1} l_{i+1}, \\ \Psi_{i,i} &= [(\operatorname{tg} \gamma'_i - \operatorname{tg} \gamma'_{i+1}) + (b'_i/b'_i) (\operatorname{tg} \gamma''_i - \operatorname{tg} \gamma''_{i+1}) + \\ &\quad + (b'_i h_{i-1}^2/2F_i l_i) + (b'_i h_{i+1}^2/2F_{i+1} l_{i+1})] h_i, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

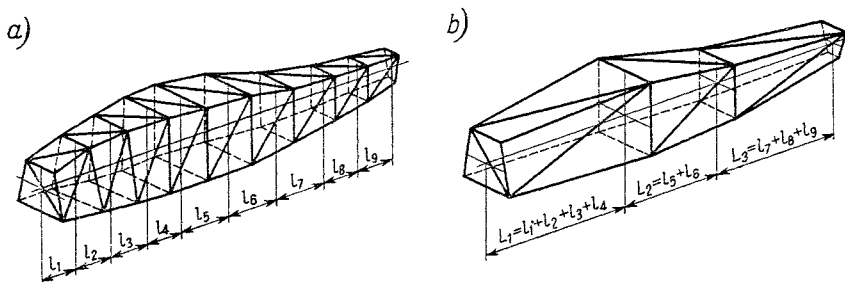
gdzie F_i powierzchnia pola (wzór 3.2) dla grodzi i rozpatrywanej oddzielnie od pozostałych. Przy stosowaniu równania (3.13) należy pamiętać, że kąty γ'_i , γ''_i traktuje się jako dodatnie, gdy są one zgodne z rys. 3.23c.



Rys. 3.23. Układ samozrównoważony dla konstrukcji 4-podłużnicowej o węzłach trapezowych

W odróżnieniu od konstrukcji o węzłach prostokątnych dla przypadku z rys. 3.23 siły zależą od ustawienia wykrzyżowań, gdyż od tego ustawienia zależą tym razem powierzchnie F_i .

W przypadku gdy liczba grodzi jest duża, wprowadza się uproszczenie. Polega ono na zastąpieniu w sposób przybliżony kilku grodzi przez jedną, z wprowadzeniem prętów zastępczych w ścianach. Tak więc w kratownicy 9-grodziowej (rys. 3.24a) mielibyśmy układ ośmiu równań typu (3.13). Zastępu-



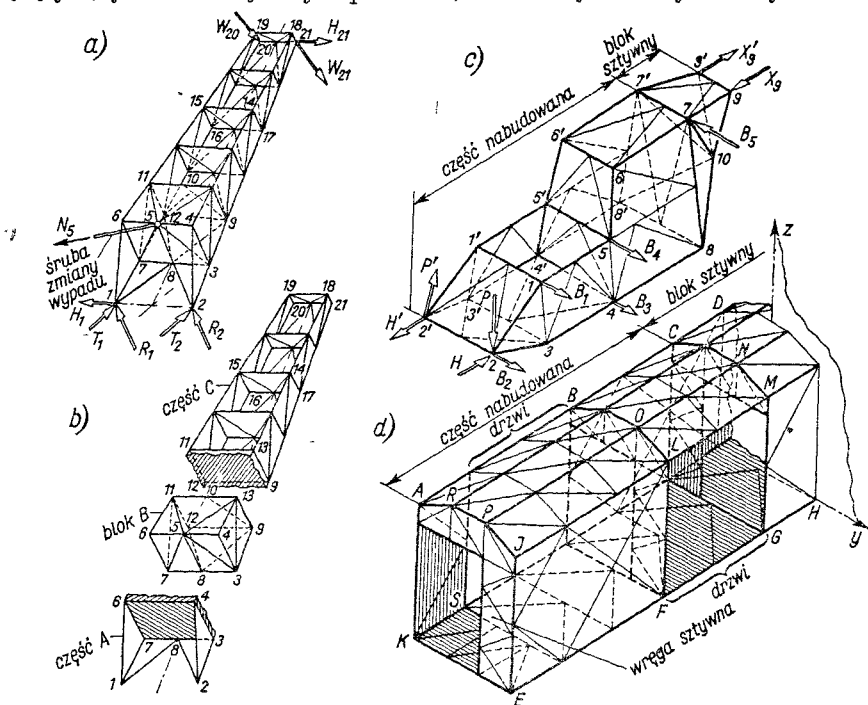
Rys. 3.24. Uproszczona konstrukcja zastępcza
a) kratownica rzeczywista; b) kratownica uproszczona.

jąc ją kratownicą 3-grodziową (rys. 3.24b), mamy układ tylko dwóch równań. Po wyznaczeniu sił w prętach kratownicy uproszczonej, odpowiednią część ściany obciążamy siłą w zastępczym wykrzyżowaniu (patrz art. 3.1), traktując ją jako płaską. Ten sposób nie jest ścisły, jednakże daje zadowalające dokładne rezultaty, zwłaszcza iż załamania ścian są na ogół łagodne.

3.6. Kratownice nabudowane na podłożu

Omówione kratownice powłokowe (art. 3.2÷3.5) należą do grupy ustrojów sztywnych samych w sobie (patrz art. 2.3). Równie często jednak spotyka się kratownice nabudowane na podłożu. Rozróżnia się przy tym dwa warianty ukształtowania w zależności od tego, czy podłożem dla kratownicy nabudowanej jest integralna część ustroju, czy podłoże jest elementem zewnętrznym w stosunku do kratownicy. Przykładem kratownicy pierwszego rodzaju tzw. *kratownic o budowie mieszanej* jest konstrukcja z rys. 2.8c, składająca się z powłokowej kratownicy (między węgami 1, ..., 4 i 5, ..., 8) i nabudowanej pozostałej części, dla której ta powłokowa kratownica stanowi sztywne podłoże. W rezultacie otrzymujemy ustrój sztywny jako całość, składający się z dwóch podzespołów różniących się funkcjonalnie między sobą. Analogiczne przykłady (rys. 3.25a, c) różnią się od poprzedniego ukształtowaniem, zasada jednak ich budowy zostaje ta sama.

Najbardziej charakterystyczną cechą omawianych konstrukcji (rys. 2.8c, 3.25a, c) będących, jak łatwo się o tym przekonać, konstrukcjami statycznie wyznaczalnymi*



Rys. 3.25. Przykłady kratownic o budowie mieszanej

a), b) wysięgnik żurawia; c) kadłub śmigłowca; d) kadłub wagonu, płaszczyzna y z jest płaszczyzną symetrii. Konstrukcje z rys. a i c są statycznie wyznaczalne z rys. d — jako całość 8-krotnie statycznie niewyznaczalna.

* Przypomina się, że sprawdzenie statycznej wyznaczalności przeprowadzamy zawsze dla ustroju pierwotnego (art. 3.1) analizując spełnienie kryteriów (2.12) bądź doprowadzając przez przestawianie prętów daną kratownicę do takiej postaci, o której wiemy, że jest statycznie wyznaczalna (rys. 2.14).

jest to, iż w swych nabudowanych częściach składają się z trzech głównych sztywnych ścian. Każda z tych ścian może być płaska jak ściana (9, 12, 20, 21) w części C (rys. 3.25a, b) bądź łamana jak ściana (1, 1', ..., 7, 7') kadłuba (rys. 3.25c). W tym drugim przypadku ważne jest, aby ta łamana ściana po rozwinięciu jej na płaszczyznę była ustrojem sztywnym*.

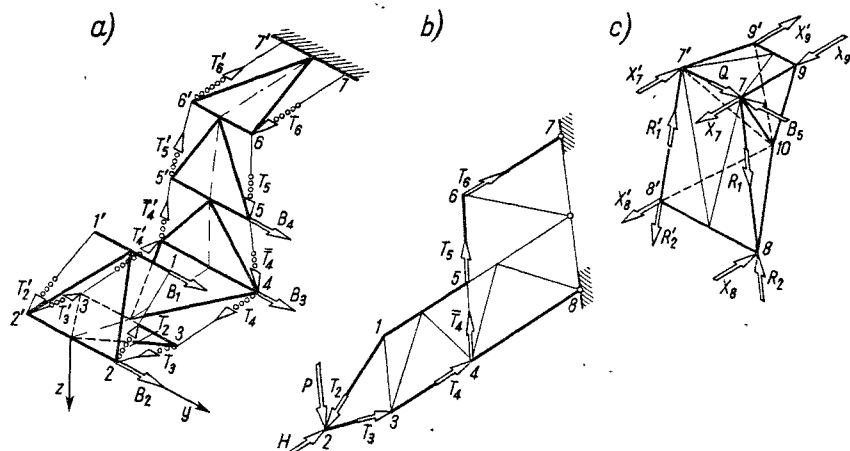
Te trzy główne ściany spełniają w kratownicy taką samą rolę jaką w belce o przekroju ceowym spełniają półki i środnik. Reszta elementów spełnia rolę pomocniczą polegającą na unieruchomieniu względem siebie węzłów ścian głównych. Tak na przykład wręga (14, ..., 17) (rys. 3.25a, b) usuwa swobodę względnych przemieszczeń węzła 14 i 15.

Konstrukcje, które w swej części nabudowanej mają więcej niż trzy ściany są z reguły statycznie niewyznaczalne. Tak na przykład w konstrukcji (3.25d) od razu widać, iż zarówno dach, jak i podłoga są kratownicami złożonymi z samych trójkątów. Bez liczenia prętów i węzłów widać również, iż ściana lewa na odcinku BCD, a prawa na odcinkach EF i GH są sztywne. Również sztywne, mimo wykrojów na drzwi, są ściany poprzeczne AIEK, BLF i GMC. Każda z nich jest przy tym funkcjonalnie równoważna trzem prętom, na przykład w ścianie AIEK prętom AE, RE, PE. Przebudowując tę kratownicę na powłokową należałoby dodać tylko dwa pręty BS i MF, usunąć natomiast sześć prętów (po trzy ze ścian BLF i GMC). Wynika stąd, iż rozważana połowa konstrukcji ma o cztery pręty za dużo w porównaniu z ustrojem statycznie wyznaczalnym, jest więc jako całość 8-krotnie statycznie niewyznaczalna.

Rozwiązanie kratownic o budowie mieszanej dzielimy na dwa etapy, a mianowicie w etapie pierwszym obliczamy siły w częściach nabudowanych wywołane działaniem obciążenia zewnętrznego, w etapie drugim rozwiązujemy kratownicę powłokową obciążoną przez siły zewnętrzne i oddziaływania części nabudowanych. Wykorzystujemy przy tym wszystkie znane sposoby ułatwień (art. 2.8 i 3.1), dzięki którym analiza konstrukcji z płaskimi ścianami nabudowanych części (rys. 3.25a, b) redukuje się wyłącznie do zadań płaskich.

Pewnego dodatkowego omówienia wymaga tylko przypadek, gdy jedna z trzech ścian głównych jest łamana (rys. 3.25b). Zakładając, iż ściany (1, ..., 8) i (1', ..., 8') nabudowanej części są płaskie, postępujemy tak jak to opisano przy kratownicy (rys. 3.15). Mianowicie po sprowadzeniu obciążeń do układu (P' , H') działającego w płaszczyźnie jednej ściany głównej (1', ..., 8') i drugiego (P , H , B_1 , ..., B_4) przyłożonego w węzłach ściany (1, ..., 8), izolujemy ścianę łamaną wraz z obciążeniem siłami typu B (rys. 3.26a). Obliczenie sił w prętach tej ściany jest zadaniem identycznym jak zadanie rozpatrzone na rys. 3.15b, 3.16a, c, przy czym odpada cała operacja poszukiwania sił w przeciętym (rys. 3.16b), którego teraz nie ma. Mając wyznaczone siły T i T' rozwiązujemy główne ściany nabudowanej części (rys. 3.26b), a na koniec blok (rys. 3.26c) obciążony oddziaływaniami ściany łamanej (siła Q_7) i ścian głównych (siły R_1 , R'_1 , ..., X_8). Jeśli kadłub jest symetryczny, to opisane postępowanie można ograniczyć tylko do analizy obciążeń niesymetrycznych, stosując do analizy obciążeń symetrycznych sposób uproszczony (rys. 2.23).

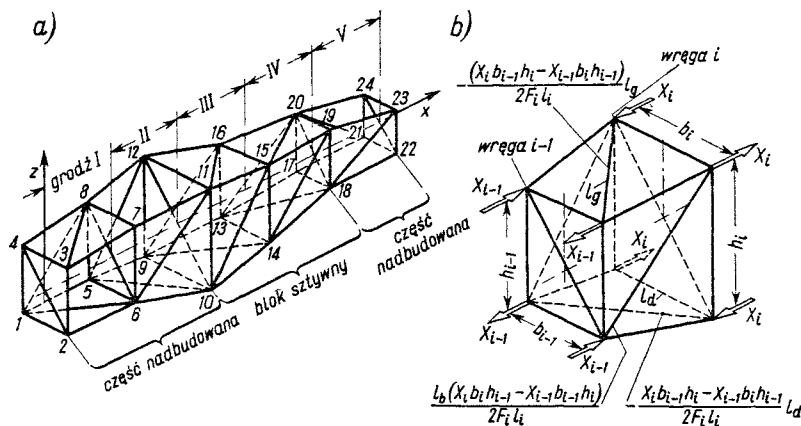
* Jeśli w konstrukcji (rys. 3.25c) zamienić np. wykrzyżowanie ściany (5, 6, 6', 5') prętami (1', 3), to taka konstrukcja nie byłaby prawidłowa. Mielibyśmy bowiem wtedy dodatkowy blok sztywny (1, 2, 3, 1', 2', 3') nieszywno związany z blokiem poprzednim (niemożność przeniesienia sił typu B).



Rys. 3.26. Rozwiązanie kadłuba

a) statyka ściany łamanej, kropkowane siły są oddziaływaniami ścian bocznych; b) statyka płaskiej ściany bocznej; c) statyka bloku.

W przypadku kratownicy o mieszanej budowie i łamanych przestrzennie podłużnicach (rys. 3.27), najłatwiej przeprowadzić analizę modyfikując rozumowanie, które doprowadziło do układu równań (3.13). Zakładając mianowicie, że kratownica jest powłokowa, to znaczy iż zamiast prętów (6, 8), (10, 12)



Rys. 3.27. Kratownica 4-podłużnicowa o mieszanej budowie

b) określenie sił w prętach pobocznych wywołanych grupami \$X\$, siły w ścianach bocznych są jednakowe.

i (18, 20) istnieją odpowiednio pręty (2, 7), (7, 12), (19, 24) obliczmy siły w prętach tej kratownicy według wskazówek art. 2.8 (obciążenia symetryczne) bądź art. 3.5 i 3.6 (obciążenia antysymetryczne*). Jeśli z tych obliczeń otrzymamy dla jednego z prętów, który został wstawiony np. (7, 12) całkowitą

* Dla obciążeń antysymetrycznych należy tylko rozwiązać etap statyki ścian górnej i dolnej (art. 3.5) i skręcanie rozdzielonych grodzi z zadania Wagnera (rys. 3.21a) bez rozwiązywania układu (3.13).

siłę N_g , to przechodząc teraz do konstrukcji rzeczywistej musimy tak dobrać grupy sił X (rys. 3.21), aby siła wypadkowa w tym przecie (7, 12) była równa zeru. Korzystając z podanych na rysunku 3.27b wyników rozwiązania 6-siennej grodzi (patrz również rys. 3.6 i wzory 3.4) i utożsamiając grodz II z grodzią i mamy w rezultacie dla pręta (7, 12)

$$-X_1(b_3h_1/2F_2) + X_2(b_1h_2/2F_2) = (N_g l_g / l_g), \quad (a)$$

gdzie l_g — długość pręta (7, 12), a pozostałe oznaczenia są podane na rysunku 3.22. Analogicznie dla nie istniejącego pręta (2, 7) mamy

$$X_1(b_1h_0/2F_1) = -(N_b l_b / l_b), \quad (b)$$

gdzie N_b — siła w przecie (2, 7) obliczona dla konstrukcji powłokowej z przedstawionymi prętami, a l_b — długość pręta (2, 7). Jak widać równania typu (a) i (b) mogą być kolejno rozwiązywane jako równania z jedną niewiadomą. Ta sama uwaga dotyczy grodzi V . W rezultacie po wyznaczeniu sił X dla obydwóch części nabudowanych otrzymujemy blok sztywny (grodzie III i IV) obciążony na wręgach (9, ..., 12) i (17, ..., 20) znanymi grupami sił X_2 i X_4 . Obliczenie grupy X_3 kasującej siłę w fikcyjnym skrzyżowaniu (14, 16) polega na rozwiązaniu równania (3.13), w którym $X_i = X_3$ ze znanymi już $X_{i-1} = X_2$ i $X_{i+1} = X_4$.

Analogicznie rozwiązujemy kratownice z wręgami trapezowymi (rys. 3.23), przy czym rezygnujemy z analitycznych wyrażeń dla sił (rys. 3.27b) i obliczenia prowadzimy od razu na liczbach szczególnych.

Drugim rodzajem kratownic nabudowanych są tzw. *kratownice niesztynne same w sobie*, w których podłoże jest elementem zewnętrznym. Kratownice te mają zastosowanie w tych przypadkach, w których dla zwiększenia stateczności urządzenia, tj. zabezpieczenia przeciwko wywróceniu się, pożądane jest podparcie konstrukcji na płaszczyźnie (torach jezdnych) w czterech punktach, przenoszących reakcje prostopadłe do tej płaszczyzny, *przy zachowaniu jednocześnie statycznej wyznaczalności konstrukcji*.

Rozwiązanie takiego ustroju w postaci konstrukcji sztywnej samej w sobie jest niemożliwe, można natomiast otrzymać je w postaci konstrukcji jednokrotnie niesztynnej samej w sobie, dla której czwarta reakcja pionowa odgrywać będzie rolę usuniętego pręta. Całkowite zatem unieruchomienie takiej konstrukcji jest zapewnione przez siedem reakcji, których obliczenie stanowi główną trudność analizy. Obliczenie to można by przeprowadzić metodą prętów zastępczych, w której jedna z siedmiu reakcji odgrywałaby rolę pręta zastępowanego przez inny pręt wprowadzony do konstrukcji (art. 2.7). Ponieważ takie postępowanie jest kłopotliwe, staramy się je ominąć. Tak na przykład w konstrukcjach typu kadłubowego (mosty przeładunkowe, kadłuby pojazdów) wykorzystujemy fakt, iż kratownice te mają z reguły dwie wzdłużne ściany płaskie związane trzecią ścianą płaską lub łamaną* (rys. 3.28a). Izolując tę trzecią ścianę łącznie z wszystkimi wręgami (rys. 3.28b) mamy przy obciążeniu jej siłami typu B zadanie identyczne z podanym na rys. 3.15b i 3.16a, c. Jeśli ściany wzdłużne są równoległe, to to zadanie znakomicie się upraszcza. Zważywszy bowiem, że reakcje B' i B'' są znane**, a więc że znana jest wypadkowa Q sił B w każdym przekroju (np. za poprzeczką AB $Q = B' - B_1 - B_2 - B_3$) wyznaczamy siłę N

$$N = Q \operatorname{cosec} \beta, \quad (c)$$

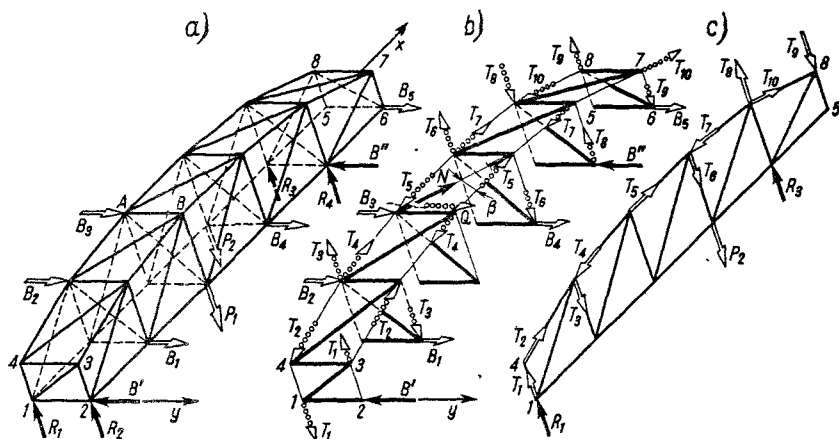
* Kratownica (rys. 3.28) podana jest w postaci ustroju pierwotnego z pominięciem konstrukcji wtórnych (rys. 3.2). Jest ona jednokrotnie niesztynna, gdyż sprowadzenie jej do kratownicy powłokowej wymagałoby dodania w dolnej ścianie pięciu prętów, podczas gdy możemy odjąć tylko cztery wykrzyżowania wręg pośrednich.

** Z warunku równowagi momentów względem osi (2, 3) i rzutów na oś y .

siły w rozpórkach (np. $N_{3,4} = -B'$) oraz siły T przedstawiające oddziaływania ścian bocznych

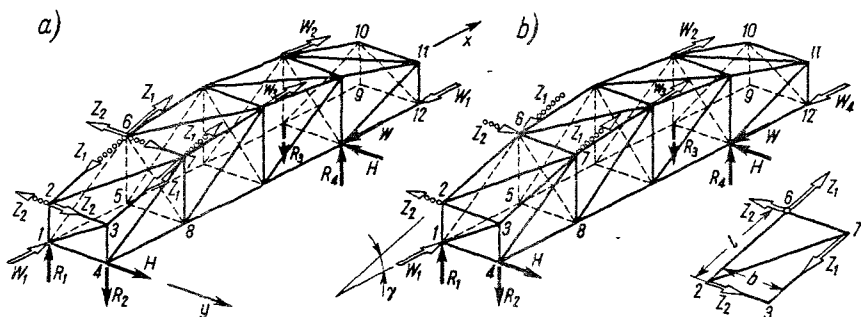
$$T = Q \operatorname{ctg} \beta. \quad (d)$$

Mając oddziaływania T możemy rozwiązać każdą z płaskich ścian bocznych wyznaczając przy tym odpowiednie reakcje R_1 i R_3 (rys. 3.28c). W podobny sposób rozwiązujemy



Rys. 3.28. Statyka jednokrotnie niesztynnej kratownicy obciążonej siłami pionowymi i poziomymi

a) układ obciążeń siłami $B_1, \dots, B_5$ i siłami P_1, P_2 , reakcje B', B'' oraz $R_1, \dots, R_4$; b) określenie sił w ścianie łamanej; c) statyka ściany bocznej.



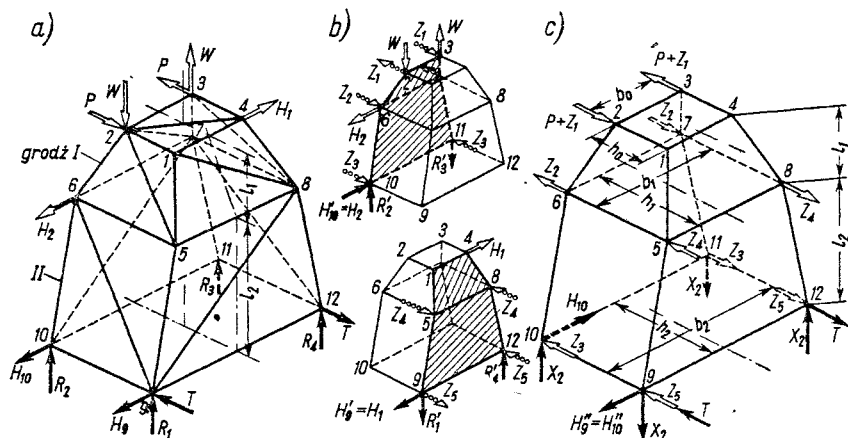
Rys. 3.29. Statyka jednokrotnie niesztynnej kratownicy obciążonej siłami wzdłużnymi

a) układ obciążeń siłami W_1, W_2, W_3, W_4 zrownoważonych reakcjami $H, W, R_1, \dots, R_4$; b) rozdział zadania.

przypadek działania sił wzdłużnych (rys. 3.29), których działanie jest niejednokrotnie wymiarujące (siły zderzakowe w pojazdach, siły wzdłużne w wysięgnikach). Wprowadzając mianowicie w jednej ze ścian np. (2, 3; 7, 6) dwie zerowe grupy sił Z_1, Z_2 , dobieramy

wartość sił Z_1 tak, aby suma rzutów na oś x dla każdej ściany wzdłużnej była równa zero*. Dobierając następnie $Z_2 = Z_1 l/b$ możemy zadanie rozdzielić (rys. 3.29b) na dwa, z których jedno jest zadaniem płaskim ściany (2, 3, 7, 6), drugie zaś zadaniem przestrzennym analogicznym do poprzedniego (rys. 3.28).

Podane rozwiązanie stanowiło przykład ominięcia metody prętów zastępczych, co nie zawsze jest możliwe. Tak na przykład w konstrukcji typu przesuwnej wieży (rys. 3.30a)



Rys. 3.30. Statyka jednokrotnie niesztynnej wieży

a) układ obciążeń H_1, H_2, P, W, T zrównoważonych reakcjami $H_9, H_{10}, R_1, \dots, R_4$; b) dwa zadania statyki ścian utrzymanych w równowadze odpowiednio dobranymi reakcjami; c) skręcanie niesztynnej kratownicy możliwe tylko dzięki odpowiednim reakcjom X_1 podłoża.

po wyeliminowaniu poprzednio już rozwiązanych zadań** pozostaje zadanie skręcania (rys. 3.30c) parami sił typu P . Jedyna różnica w porównaniu z rozpatrzonym w art. 3.5 przypadkiem polega na tym, że wobec braku wykrzyżowania (10, 12) pojawi się nie tylko grupa sił X_1 , przedstawiająca oddziaływanie między grodziami I a II, lecz również wystąpi grupa X_2 przedstawiająca oddziaływanie toru. Wartości X_1 i X_2 wyznaczamy z równań (3.13), które przyjmują postać

$$\begin{cases} \psi_{1,1} X_1 - \psi_{1,2} X_2 + n_1 = 0, \\ -\psi_{2,1} X_1 + \psi_{2,2} X_2 + n_2 = 0. \end{cases} \quad (e)$$

Występujące w tym układzie (e) wielkości wyznaczamy z wzorów (3.12) i (3.14), przy czym $M_1 = -(P+Z_1)b_0$, $M_2 = M_1 + (Z_2+Z_4)b_1$ (patrz umowa co do znaku na rys. 3.19).

* W omawianym przykładzie $Z_1 = (W_1 + W_2) \sec \gamma = (W + W_4 - W_3) \sec \gamma$, gdzie γ – kąt między płaszczyzną (2, 3, 7, 6) a płaszczyzną xy .

** Uwzględniając, że kratownice tego typu są z reguły symetryczne działanie obciążeń symetrycznych rozwiązujemy według rys. 2.23. Wyodrębniamy ponadto dwa zagadnienia statyki ścian łamanych (rys. 3.30b) analogiczne do rozpatrzonych poprzednio (rys. 3.17b). Pozostałe obciążenia dają skręcanie, przy czym siły T pojawiają się w przypadku niejednakowego działania hamulców jazdy, np. gdy jeden z hamulców ulega awarii.

Wyjątek stanowią $\Psi_{2,2}$ i n_2 , a mianowicie $\Psi_{2,2}$ obliczamy tak, jak gdyby nieistniejąca groź III była nieskończenie długa, to jest

$$\Psi_{2,2} = (1/l_2) - \psi_{2,1}. \quad (f)$$

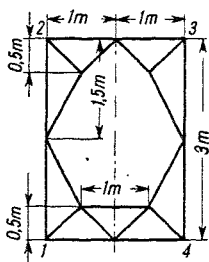
Wartość n_2 w fikcyjnym przecie $(10, 12)$ wyznaczamy z zadania Wagnera (art. 3.3) dla II grodzi przy obciążeniu jej momentem M_2 . Na skutek bowiem istnienia pary sił $H''_9 = H''_{10}$ nierównoległych do płaszczyzny symetrii, wzoru (3.12) nie można stosować*.

Kratownice nieszttywne same w sobie mają bardzo poważną zaletę, a mianowicie są one nieczułe na błędy montażowe torowiska. Jeśli na przykład podpora węzła 9 (rys. 3.30) ulegnie opuszczeniu w stosunku do płaszczyzny wyznaczonej przez węzły 10, 11, 12, to nieszttywność samej wieży na skręcanie powoduje, że węzeł 9 z powrotem oprze się o podłoże, przy czym siły w prętach są równe zeru**. Innymi słowy rozpatrywane kratownice dopasowują się swobodnie do podłoża. Zalety tej nie mają konstrukcje sztywne same w sobie, które przy 4-punktowym podparciu stają się konstrukcjami statycznie niewyznaczalnymi i w których każdy błąd montażowy (niedokładność torowiska) pociąga za sobą zmianę reakcji podporowych (patrz art. 4.4).

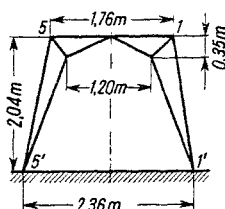
3.7. Zadania

1. W kratownicy (rys. 2.42) rzeczywiste rozwiązanie ściany (1, 2, 3, 4) podaje rys. 3.31. Wiedząc, że w pierwotnej konstrukcji $N_{2,4} = -2,18$ t, $N_{3,4} = 1,82$ t, $N_{1,2} = 3,64$ t, $N_{1,4} = 2,42$ t, $N_{2,3} = 1,20$ t, wyznaczyć siły w prętach rzeczywistej ściany.

2. Ilorotnie nieszttywna z punktu widzenia formalnego jest kratownica (rys. 2.42) z poprowadzoną według rys. 3.31 konstrukcją ściany?



Rys. 3.31.



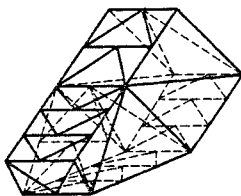
Rys. 3.32.

3. W kratownicy (rys. 2.47) dla zwiększenia przelotu rzeczywiste rozwiązanie ściany podaje w kładzie rys. 3.32. Wiedząc, że w pierwotnej konstrukcji $N_{1,8} = -3,2$ t, $N_{1,8'} = -3,5$ t, $N_{1,1'} = -19,0$ t, $N_{8,8'} = -7,0$ t, obliczyć zmianę sił w tych prętach wywołaną modyfikacją konstrukcji.

* Uwaga ta jest ostrzeżeniem przed nieogłdnym stosowaniem wzorów, jeśli nie są spełnione odpowiednie warunki. Przy wyprowadzaniu wzoru (3.12) warunkiem tym było, żeby siły P , Z , W były równoległe do płaszczyzny symetrii.

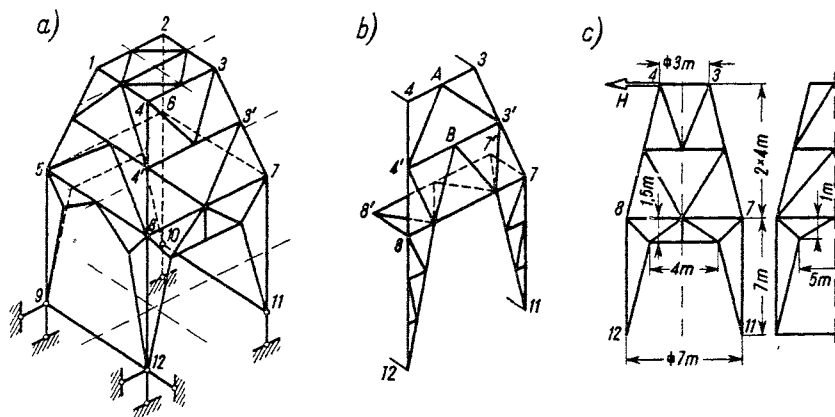
** Stwierdzenie to jest słuszne przy założeniu przegubowego połączenia prętów. W konstrukcjach rzeczywistych, gdy węzły są sztywne, takie zniekształcenie powoduje powstanie naprężeń wtórnych (art. 2.1).

4. Dla podanej konstrukcji fragmentu kratowego wysięgnika (rys. 3.33) odtworzyć ustrój pierwotny i orzec czy jest to konstrukcja statycznie wyznaczalna, a jeśli nie, to ilokrotnie jest ona przeszywniona.



Rys. 3.33.

5. Przesuwana podwójnie symetryczna wieża (rys. 3.34a) przymocowana jest do podłoża siedmioma więzami w węzłach 9, ..., 12. Traktując węzły 1, ..., 12 jako węzły pierwotnego ustroju orzec, czy podana konstrukcja jest sztywna i statycznie wyznaczalna.



Rys. 3.34.

5. W celu zwiększenia przełotu bramy w konstrukcji (rys. 3.34a) zmodyfikowano łamaną ścianę (3, 4, 7, 8, 11, 12) (rys. 3.34b) z wprowadzeniem w płaszczyźnie wręgi (5, 6, 7, 8) kratownicy (7, 8, 8', 7'). Orzec czy to rozwiązanie jest prawidłowe z punktu widzenia statyki, a jeśli tak, to czy słuszne jest rozumowanie prowadzące do wzorów (a) i (b) art. 3.1.

7. W ścianie (rys. 3.34b) zamieniono pręty (4', A) i (3', A) prętami (4, B) i (3, B). Jakie konsekwencje statyczne pociąga taka zamiana?

8. Zakładając, że kratownica (rys. 3.4) jest prostym graniastosłupem o trapezowej podstawie i jednakowych grodziach ($\angle 2, 1, 4 = 90^\circ$, $(1, 2) = (1, 4) = 2 \text{ m}$, $(2, 3) = 1 \text{ m}$, długość krawędzi $(2, 6) = 6 \text{ m}$), przeprowadzić analizę sił, gdy obciążenie stanowią dwie siły przyłożone w węzłach C i D równe i przeciwnie skierowane.

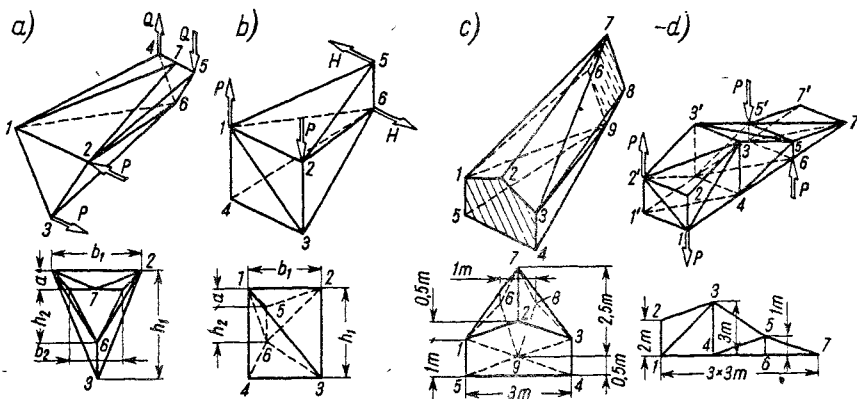
9. Zakładając wymiary kratownicy jak w zadaniu 8 wydzielić zadania płaskie i określić wartość momentu skręcającego, jeśli siła $Q_A = 6 \text{ t}$ jest równoległa do $(1, 2)$, $Q_B = 9 \text{ t}$ równoległa do $(2, 4)$, reakcja R_2 równoległa do $(1, 2)$, a reakcje R_1 i R_7 działając w płaszczyznach odpowiednich wręg mogą mieć dowolny kierunek.

10. W kratownicy (rys. 3.5) $a = 2$ m, $b = c = 1$ m, $l = 2$ m, a kąty w węzłach 3, 4, 5 wręgi są proste. Wydzielić zadania płaskie i obliczyć wartość momentu skręcającego, jeśli $Q_1 = 10$ t, $Q_7 = 2$ t, a równowagę zapewniają odpowiednio dobrane reakcje R_3 , R_4 i reakcja R_2 w węźle 2 ($R_{10} = 0$).

11. W kratownicy (rys. 3.6) $b_2 = 2b_1 = 2$ m, $h_2 = 1,5$ m, $h_1 = 3$ m, $l = 4$ m i pręt (3, 7) jest prostopadły do obydwóch wręg. Wydzielić zadania płaskie i przypadek skręcania, jeśli obciążenie stanowi jedna pionowa siła $P = 10$ t przyczepiona w węźle 1 zrównoważona trzema pionowymi reakcjami w węzłach 5, 6 i 8.

12. Powtórzyć zadanie 11 przy obciążeniu parą pionowych sił $P = 5$ t przyłożonych w węzłach 2 i 3.

13. Dla podanych kratownic (rys. 3.35) określić wartość pola F' występującego we wzorze Wagnera. Określić również pręty pobocznie nieczynne przy skręcaniu. Naszkicować statykę wręg.



Rys. 3.35.

14. W kratownicy (rys. 3.6a) ustawić wykrzyżowania bocznych ścian tak, aby przy jej skręcaniu (rys. 3.6c) podłużnice były nieczynne. Zakładając, że wręgi są nieskończenie sztywne i ustawione symetrycznie, a przekroje prętów nie zmieniają się, orzec czy takie ustawienie zmienia kąt skręcania w porównaniu z ustawieniem podanym na rys. 3.6.

15. Wyznaczyć siły w prętach ściany (2, 3, 14, 13) 3-grozdziowej skręcanie kratownicy (rys. 3.36).

16. Wyznaczyć siły w prętach 1, ..., 5 podanej regularnej kratownicy (rys. 3.37) skręcanie parami sił $H_1 = H_3$ i $H_5 = H_8$. Jak zmieniają się te siły, gdy pręt AB zamienić prętem OD.

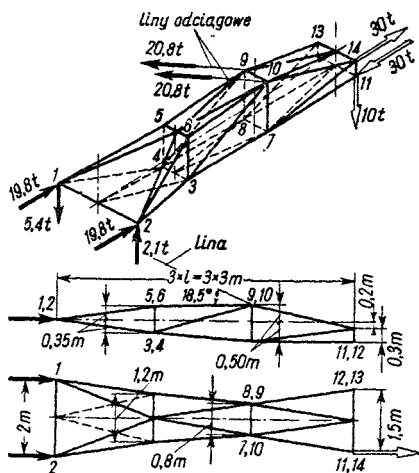
17. W kratownicy ostrosłupowej (rys. 3.12b) ustawić wykrzyżowania tak, aby przy jej skręcaniu parami sił przyłożonymi we wręgach skrajnych wszystkie pręty wręg pośrednich były nieczynne.

18. Czy można jednocześnie z postulatem zadania 17 spełnić dodatkowy warunek, aby przy skręcaniu były nieczynne też i podłużnice.

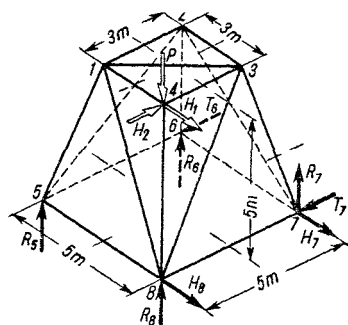
19. W kratownicy (rys. 3.37) parę sił $H_1 = H_3$ równoważy para sił $H_B = H_E$. Obliczyć siły w prętach 1, ..., 5.

20. W stalowej kratownicy (rys. 3.9) odległość wręg $l = 4$ m, $P_1 = P_4 = 10$ t, a przekroje wszystkich prętów są jednakowe $A = 15$ cm². Określić wartość kąta skręcania Φ wręgi (1, 2, 3, 4) względem wręgi (5, 6, 7, 8).

21. W kratownicy (rys. 3.15) wymiary są takie, jak podaje rys. 3.38. Obciążenie stanowią siły $B_1 = B_2 = 10$ t zrównoważone odpowiednio dobranymi siłami B_4 , P_4 i P_5 , przy czym reakcje P_4 i P_5 mogą mieć również składowe pionowe. Obliczyć siły w prętach kratownicy.



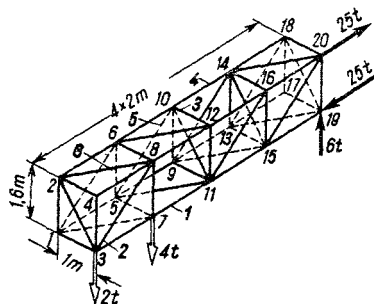
Rys. 3.40.



Rys. 3.41.

28. Wyznaczyć siły w prętach kratownicy (rys. 3.41) obciążonej w węźle 4 siłami $P = 20\text{ t}$, $H_1 = 4\text{ t}$, $H_2 = 3\text{ t}$ i utrzymanej w równowadze ośmioma reakcjami R , H , T , z których $T_6 = T_7$.

29. W przyrządowej kratownicy powłokowej usunięto pręty (7, 12) i (10, 16) (rys. 3.42) wstawiając w zamian dwa wykrzyżowania (10, 11) i (14, 15). Jak zmienia się wskutek tego siły w prętach 1, ..., 6.



Rys. 3.42.

30. Zamocowana w sztywnym bloku symetryczna kratowa noga (rys. 3.43) składa się z dwóch równoległych i jednakowych kratownic płaskich połączonych siatką prętów oraz wręgami b , c , d , e (wręga a jest niesztwna). Wyznaczyć siły w prętach znajdujących się między wręgami d i e , jeśli obciążenie stanowią podane reakcje koła jezdźnego. Typowa wręga d jest podana na rysunku.

31. W kratownicy (rys. 3.28) długości grodzi $l = 3\text{ m}$ są jednakowe, szerokość $(1, 2) = (3, 4) = \dots = 2\text{ m}$, wysokości słupków licząc od słupka $(2, 3)$ są kolejno 1 m , 2 m , $2,5\text{ m}$, $2,5\text{ m}$, 2 m , 1 m . Określić statykę ścian bocznych (rys. 3.28c), jeśli $B_1 = \dots = B_6 = 2\text{ t}$, a siły $P_1 = P_2 = 20\text{ t}$.

32. W kratownicy (rys. 3.29) długość każdej grodzi 2 m , szerokość kratownicy $1,2\text{ m}$, wysokości słupków licząc od słupka $(3, 4)$ są kolejno $0,5\text{ m}$, 1 m , $0,5\text{ m}$, 1 m , $0,5\text{ m}$. Określić statykę ścian bocznych, jeśli obciążenie stanowią siły $W_1 = W_4 = 100\text{ t}$ zrównoważone reakcjami R i H (siła $W = 0$).

4. KRATOWNICE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

4.1. Definicje. Metoda rozwiązania

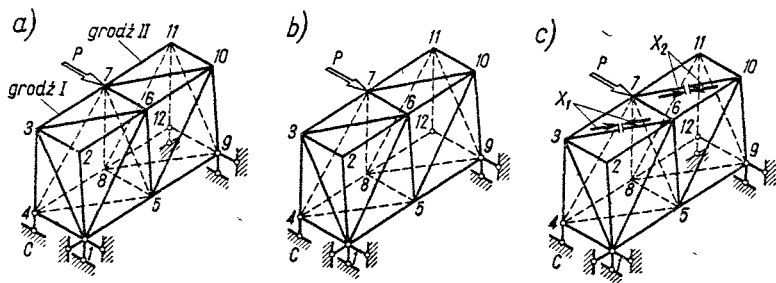
Rozpatrywane w rozdz. 2 i 3 kratownice były przestrzennymi ustrojami, w których liczba prętów i unieruchamiających więzów p (niezależnych reakcji) jest najmniejszą liczbą niezbędną do tego, aby utworzony ustrój o danej liczbie węzłów w był sztywny. Spełnienie warunku (2.12), to jest $p = 3w$ oznacza jednocześnie, że dana kratownica jest statycznie wyznaczalna (art. 2.6). Jeśli zachowując te same węzły utworzymy przestrzenny ustrój, w którym liczba p_1 prętów jest większa od p , to kratownica staje się statycznie niewyznaczalna, a stopniem statycznej niewyznaczalności m nazywamy różnicę

$$m = p_1 - p = p_1 - 3w \quad (4.1a)$$

Wzór (4.1) interpretujemy jako wprowadzenie do pierwotnego statycznie wyznaczonego ustroju ($p = 3w$) dodatkowych m elementów tzw. *przesztynniających* zasadniczą konstrukcję. Ponieważ jednak wzór ten jest kryterium sumarycznym, to nie precyzuje on, które pręty lub więzy są tymi elementami przesztynniającymi. W rezultacie dla danej konstrukcji statycznie niewyznaczalnej możemy otrzymać różne warianty w zależności od tego, które elementy uznamy za przesztynniające. Jedynym postulatem, który w tych różnych wariantach musi być zawsze spełniony jest ten, *aby po usunięciu elementów przesztynniających pozostała konstrukcja była rzeczywiście sztywna i statycznie wyznaczalna (nie stała się mechanizmem lub pseudomechanizmem)*. Przez usunięcie elementu rozumie się przy tym taką operację, dzięki której element ten staje się nieczynny w konstrukcji. W tym sensie równoznaczne jest zatem rzeczywiste usunięcie elementu jak i myślowe jego przecięcie tak, aby siła wewnętrzna w nim była równa zero.

Dla zilustrowania podanych uwag rozważmy kratownicę (rys. 4.1a), która, jak to wynika z wzoru (4.1a), jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalna. Przyjmując jako elementy przesztynniające pręt (5, 7) i reakcję pionową w węźle 12 otrzymujemy po ich usunięciu ustrój (rys. 4.1b) w postaci powłokowej kratownicy podpartej w sposób statycznie wyznaczalny (sześć więzów). Jeśli za elementy przesztynniające uznamy pręty (3, 6) i (7, 10), to po ich myślowym przecięciu, a więc wyeliminowaniu ich z pracy, otrzymujemy statycznie wyznaczalną kratownicę (rys. 4.1c) analogiczną do rozpatrywanych w art. 3.6. Obydwa zatem schematy spełniają zasadniczy postulat i z punktu widzenia analizy konstrukcji są prawidłowe i równouprawnione. Jeśliby natomiast wziąć jako przesztynniające elementy pręty (5, 10) i (8, 11), to pozostały po ich usunięciu ustrój staje się mechanizmem w obrębie drugiej grodzi, a więc niemożliwym do przyjęcia.

Niekiedy opisując daną kratownicę dodajemy określenia informujące w czym tkwi statyczna niewyznaczalność ustroju. Jeśli mianowicie liczba więzów unieruchamiających przestrzenną kratownicę jest tylko sześć, to źródłem statycznej niewyznaczalności jest wprowadzenie prętów przeszytniających, podczas gdy podparcie ustroju jest statycznie wyznaczalne (art. 2.4). W takim przypadku kratownicę nazywamy *wewnętrznie statycznie*



Rys. 4.1. Kratownica 2-krotnie statycznie niewyznaczalna

a) obraz konstrukcji; b) I wariant zasadniczej konstrukcji statycznie wyznaczalnej z usuniętymi elementami przeszytniającymi; c) II wariant zasadniczej konstrukcji z przeciętymi myślowo elementami przeszytniającymi.

niewyznaczalną. Jeśli sama kratownica izolowana od podłoża jest statycznie wyznaczalna, a liczba więzów unieruchamiających ją większa od sześciu, to kratownicę nazywamy *zewnętrznie statycznie niewyznaczalną*. Wreszcie w przypadku, gdy elementami przeszytniającymi są i pręty i więzy, kratownicę nazywamy po prostu statycznie niewyznaczalną*.

Identyczne rozważania można przeprowadzić dla kratownic płaskich. Jeśli mianowicie kratownica ma w' węzłów poza podłożem i p'_1 prętów, to stopniem statycznej niewyznaczalności jest różnica

$$m' = p'_1 - 2w', \quad (4.1b)$$

mająca tę samą interpretację co poprzednio. Analogicznie wprowadzamy pojęcia wewnętrznej i zewnętrznej statycznej niewyznaczalności, z tym tylko iż ilość niezbędnych więzów jest trzy.

Analizę statycznie niewyznaczalnych kratownic opieramy podobnie jak w art. 2.1 na podstawowym założeniu, że końce prętów łączą się ze sobą za pomocą idealnych przegubów. Dzięki temu założeniu jedynymi wielkościami statycznie niewyznaczalnymi mogą być tylko siły wzdłużne w przeszytniających konstrukcję prętach bądź reakcje dodatkowych więzów korygujące wartości naprężeń zasadniczych (art. 2.1) pierwotnego ustroju statycznie wyznaczalnego. Samo rozwiązanie zagadnienia przeprowadzamy stosując równania Maxwella—Mohra. Nie powtarzając rozważań nad genezą tych równań i etapami ich układania** (art. 1.3), omówimy tu tylko ich adaptację do konstrukcji kratowych. Pierwszy etap rozwiązania (rys. 1.11b, 1.12b) odpowiada w kratownicach omówionemu powyżej określeniu elementów przeszytniających (rys. 4.1b, c). Przyjmując

* Dwie ostatnie definicje nie są jednoznaczne i zależą od obioru elementów przeszytniających.

** Zaleca się czytelnikowi powtórne przestudiowanie treści art. 1.3 i 1.4 ze zwróceniem uwagi na istotę podanych tam rozważań.

jako zasadę wyłączenia tych elementów przez ich myślowe przecinanie (rys. 4.1c), równania Maxwella—Mohra interpretujemy jako warunki ciągłości przemieszczeń w miejscu dokonania myślowych przekrojów. Jeśli zatem w przekrojach przeciętego myślowo pręta (3, 6) istnieją oddziaływania X_1 , a w przekrojach pręta (7, 10) oddziaływania X_2 , to równania M—M (III etap rozwiązania)

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,0} &= 0, \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

wyrażają, iż w miejscach tych nie ma luzu między myślowo rozciętymi końcami prętów (3, 6) i (7, 10). Ogólnie biorąc w kratownicy m -krotnie statycznie niewyznaczalnej równanie M—M o postaci

$$a_{i,1}X_1 + \dots + a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + \dots + a_{i,m}X_m + a_{i,0} = 0 \quad (4.2)$$

wyraża warunek ciągłości w miejscu działania sił X_i , przy czym równań takich mamy m , to jest tyle, ile jest niewiadomych. Współczynnik $a_{i,j}$ przy niewiadomej X_j oznacza przy tym nieciągłość (luz) w miejscu działania X_i (pierwszy wskaźnik) wywołaną działaniem jednostkowego układu $X_j = 1$. Tak więc w równaniach (a) $a_{1,2}$ i $a_{2,2}$ są odpowiednio luzami w myślowych przekrojach wywołanymi przez układ sił $X_2 = 1$ kG. Wyraz wolny $a_{i,0}$ jest nieciągłością (luzem) w miejscu działania X_i wywołaną działaniem czynników zewnętrznych.

Uświadamiając sobie, iż przez wprowadzenie myślowych przekrojów w elementach przesztywniających, wyjściowa statycznie niewyznaczalna konstrukcja stała się statycznie wyznaczalną z nieoznaczonymi na razie siłami X w miejscach tych przekrojów, możemy dla obliczenia współczynników $a_{i,j}$ i wyrazów wolnych $a_{i,0}$ zastosować rozważania art. 2.10 bądź art. 2.11. W ujęciu analitycznym adaptujemy wzory (2.19) i (2.20). Jeśli mianowicie działanie obciążenia $X_j = 1$ kG (stan „j”) wywołuje w przecie p siłę $n_p^{(j)}$ kG/kG, a działanie $X_i = 1$ kG (stan „i”) siłę $n_p^{(i)}$, to zgodnie z wzorem (2.20) mamy

$$u_{p,i}^{(j)} = n_p^{(j)} l_p / E A_p. \quad (b)$$

Pamiętając o fizycznej interpretacji współczynnika $a_{i,j}$, po podstawieniu do (2.19) otrzymujemy

$$a_{i,j} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p^{(j)} = \sum_{p=1}^k (n_p^{(i)} n_p^{(j)} l_p / E_p A_p), \quad (4.3a)$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie k prętów kratownicy łącznie z prętami myślowo przeciętymi. Jeśli $i = j$, to układ $X_i = 1$ kG spełnia podwójną rolę, a mianowicie obciążenia zewnętrznego wywołującego wydłużenia prętów $u_p^{(i)} = n_p^{(i)} l_p / E_p A_p$ oraz dodatkowego obciążenia $P_{\text{dod}} = 1$ kG przyłożonego w tym miejscu, w którym szukamy przemieszczenia (art. 1.2). W rezultacie

$$a_{i,i} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p^{(i)} = \sum_{p=1}^k [(n_p^{(i)})^2 l_p / E_p A_p]. \quad (4.3b)$$

Powołując się na wzór (2.20) z wprowadzonymi tam oznaczeniami wydłużenia u_p stanu statycznie wyznaczalnego, gdy siły X są równe zeru (stan „0”), napiszemy w postaci

$$u_p = (N_p l_p / E_p A_p) + \lambda_p \Delta t_p l_p + \bar{d}_p, \quad (c)$$

przy czym N_p kG — siła wewnętrzna stanu „0” w przecie „p”. Podstawiając ten wynik do (2.19) otrzymujemy dla $a_{i,0}$ wyrażenie

$$a_{i,0} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p. \quad (4.4)$$

Wzory (4.3) i (4.4) obejmują te wszystkie przypadki, gdy unieruchamiające kratownicę więzy są absolutnie sztywne. Jeśli są one podatne (rys. 2.30), to wykorzystując wzory (2.21) i (2.22) mamy w zamian wzorów poprzednich

$$a_{i,j} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p^{(j)} + \sum_{q=1}^s (r_q^{(i)} r_q^{(j)} / C_q), \quad (4.5)$$

gdzie $r_q^{(i)}$ kG/kG — reakcja podpory „q” wywołana obciążeniem $X_i = 1$ kG. Analogicznie

$$a_{i,0} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p + \sum_{q=1}^s r_q^{(i)} [d_q + (R_q / C_q)], \quad (4.6)$$

gdzie R_q kG — reakcja podpory „q” ustroju statycznie wyznaczalnego (stan „0”), a sumowanie obejmuje wszystkie s podatnych podpór.

Wyprowadzone wzory (4.2)÷(4.6) można stosować *pod warunkiem, iż konstrukcja jest sprężysta i liniowa* (podlega zasadzie superpozycji). Ograniczenie to wynika z samego sformułowania równań M—M (superpozycja odkształceń) jak i z określenia współczynników $a_{i,j}$ (sprężystość materiału). W odróżnieniu zatem od kratownic statycznie wyznaczalnych, gdzie pod pojęcie d_p i d_q (wzory 2.20, 2.22) można podstawić odkształcenie trwale wywołane siłą N_p bądź R_q , figurujące we wzorach (4.4) i (4.6) człony d_p lub d_q oznaczają błędy wykonawcze o stałej i znanej z góry wartości.

Po rozwiązaniu układu równań M—M mając znane wartości X_i ($i = 1, \dots, m$), możemy obliczyć wypadkowe siły wewnętrzne W_p z zasady superpozycji, a mianowicie

$$W_p = n_p^{(1)} X_1 + n_p^{(2)} X_2 + \dots + n_p^{(i)} X_i + \dots + n_p^{(m)} X_m + N_p. \quad (4.7)$$

Na zakończenie ogólnych rozważań okreśmy jeszcze przemieszczenia konstrukcji statycznie niewyznaczalnej. Pamiętając, że po wyznaczeniu sił X konstrukcja jest już statycznie wyznaczalna, a siły wewnętrzne są W_p (wzór 4.7), stosujemy wszystkie wzory art. 2.10. Tak więc całkowite wydłużenie pręta „p” jest

$$U_p = (W_p l_p / E_p A_p) + \lambda_p \Delta t_p l_p + d_p, \quad (d)$$

a przemieszczenie

$$f = \sum_{p=1}^k \bar{n}_p U_p, \quad (4.8)$$

gdzie $\bar{n}_p$ [kG/kG] — siła w przecie „p” statycznie wyznaczalnej kratownicy (stan „0”) obciążonej taką siłą $P_{\text{oad}} = 1$ kG, dla której szukane przemieszczenie f jest uogólnioną współrzędną (art. 1.2).

Analogicznie obliczamy przemieszczenia, gdy statycznie niewyznaczalna konstrukcja ma podatne więzy. Po rozwiązaniu układu równań (4.2) z wstawionymi odpowiednio wartościami a ze wzorów (4.5) i (4.6) otrzymamy identyczne z (4.7) wyrażenie na siły W_p , a dla reakcji wypadkowych W_q

$$W_q = r_q^{(1)} X_1 + \dots + r_q^{(i)} X_i + r_q^{(m)} X_m + R_q, \quad (4.9)$$

1 całkowitego wydłużenia U_q więzów

$$U_q = d_q + (W_q/C_q). \quad (e)$$

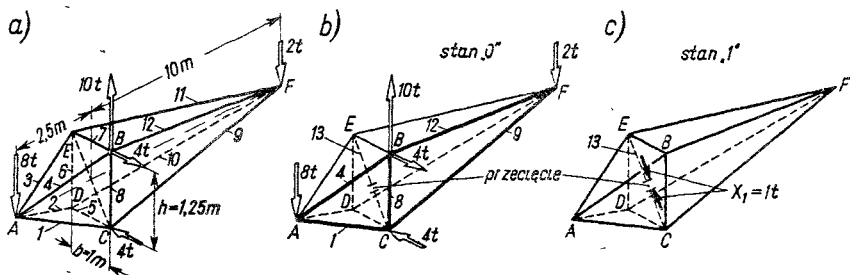
W rezultacie przemieszczenie f wyraża się wzorem

$$f = \sum_{p=1}^k \bar{n}_p U_p + \sum_{q=1}^s \bar{r}_q U_q, \quad (4.10)$$

gdzie $\bar{r}_q$ kG/kG — reakcja podpory „ q ” w statycznie wyznaczalnej kratownicy (stan „0”) ociążonej tą samą co poprzednio (wzór 4.3) siłą $P_{\text{dod}} = 1$ kG.

Podane ogólne wzory (4.2)÷(4.10) umożliwiają rozwiązanie wszystkich spotykanych w praktyce zagadnień. Wymiary wszystkich wielkości są takie, iż wszystkie wyniki otrzymujemy też w prawidłowych jednostkach*. Z uwagi na dużą liczbę składników we wzorach (4.3)÷(4.6) wszystkie wyliczenia wartości $a_{i,j}$ i $a_{i,0}$ przeprowadzamy tabelarycznie. Dla uniknięcia przy tym bardzo małych wartości niedogodnych rachunkowo z reguły zwiększamy wszystkie $a_{i,j}$ oraz $a_{i,0}$ mnożąc je przez dużą (rzędu 10^6) stałą wartość. Tą stałą wartością może być na przykład moduł E_p jednego z prętów.

Dla zilustrowania podanych rozważań rozwiążemy dwa przykłady. W pierwszym z nich (rys. 4.2a) jednokrotnie statycznie niewyznaczalny maszt ociążony jest pięcioma siłami utrzymującymi go w równowadze. Obierając pręt 13 za element przesztywniający otrzymujemy po jego przecięciu konstrukcję



Rys. 4.2. Maszt jednokrotnie statycznie niewyznaczalny

- a) geometria konstrukcji i obciążenia, przekroje $A_1 = A_2 = A_7 = A_8 = A_{13} = 5 \text{ cm}^2$ reszta prętów $A = \text{const} = 10 \text{ cm}^2$, $E = \text{const} = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$; b) stan „0” siły N_p ; c) stan „1” siły $n_p^{(1)}$.

statycznie wyznaczalną z nieznaną na razie siłą X_1 w tym przecię (I etap rozwiązania). Rozdzielając następnie obciążenia tej zasadniczej konstrukcji (z przeciętym prętem 13) na stan „0” i stan „1” (rys. 4.2b, c), wyznaczamy siły w prętach N_p i $n_p^{(1)}$ (II etap rozwiązania). Posługujemy się przy tym wskazówkami z rozdz. 2 i 3. I tak obliczenie sił N_p sprowadza się do obliczenia łamanej ściany $ABCF$ (patrz rys. 3.17), a obliczenie sił $n_p^{(1)}$ do rozwiązania kratownicy łączonej (rozdz. 2 zad. 15) bądź zespolowej (rozdz. 2 zad. 20). Wyniki tych obliczeń wpisujemy w kolumnach V i VI tabl. 4.1, w której już poprzednio wpisano dane geometryczne (kolumna II, III i IV). Układ równań (4.2) redukuje się w danym przypadku do jednego równania

$$a_{1,1}X_1 + a_{1,0} = 0 \quad (f)$$

* Jak łatwo sprawdzić, wymiar współczynników $a_{i,j}$ jest cm/kG, wyrazów wolnych $a_{i,0}$ — cm, skąd wymiar X_i jest kG. Podobnie wymiary W_p , U_p i f są odpowiednio kG, cm i cm, jak być powinno.

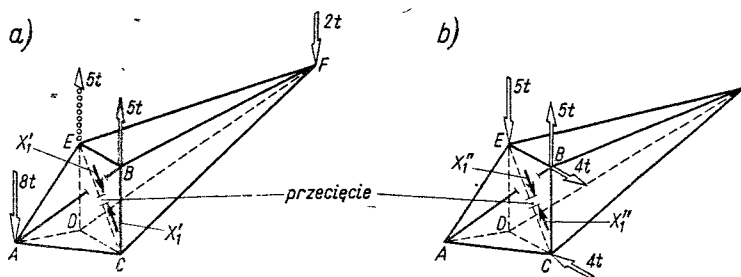
Tablica 4.1

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
p	l_p	A_p	l_p/A_p	N_p	$n_p^{(1)}$	$[n_p^{(1)}]^2 l_p/A_p$	$N_p n_p^{(1)} l_p/A_p$	$n_p^{(1)} X_1$	W_p	W'_p
	cm	cm ²	1/cm	t	t/t	1/cm	t/cm	t	t	t
1	262	10	26,2	-16,8	-1,312	45,0	578	7,9	-8,9	-8,4
2	262	10	26,2	0	+1,312	45,0	0	-7,9	-7,9	-8,4
3	262	10	26,2	0	-1,312	45,0	0	7,9	7,9	-8,4
4	262	10	26,2	+16,8	+1,312	45,0	578	-7,9	8,9	8,4
5	100	5	20,0	0	-0,312	1,9	0	1,9	1,9	2,0
6	125	5	25,0	0	-0,391	3,8	0	2,4	2,4	2,5
7	100	5	20,0	0	-0,312	1,9	0	1,9	1,9	2,0
8	125	5	25,0	+5,0	-0,391	3,8	-49	2,4	7,4	7,5
9	1003	10	100,3	-16,1	-1,253	157,6	2002	7,6	-8,5	-8,0
10	1003	10	100,3	0	+1,253	157,6	0	-7,6	-7,6	-8,0
11	1003	10	100,3	0	-1,253	157,6	0	7,6	7,6	8,0
12	1003	10	100,3	+16,1	+1,253	157,6	2002	-7,6	8,5	8,0
13	160	5	32,0	0	1,000	32,0	0	-6,0	-6,0	-6,4
$\Sigma =$						854	5150			

stanowiącego zamknięcie III etapu (art. 1.3). Wyznaczenie $a_{1,1}$ i $a_{1,0}$ według wzorów (4.3b) i (4.4) przeprowadzamy obliczając sumy kolumn VII i VIII, przy czym wszystkie składniki mnożymy od razu przez $E = \text{const.}$ Wynik rozwiązania równania (f)

$$X_1 = -a_{1,0}/a_{1,1} = -5150/854 \approx -6,0 \text{ t}$$

stanowi zakończenie IV etapu. Ostatnie dwie kolumny tablicy podają korektę sił wniesioną przez statyczną niewyznaczalność konstrukcji (kolumna IX) i wypadkowe siły W_p (kolumna X) obliczone z dodania pozycji kolumny V i IX (wzór 4.7). Porównując te siły W_p z siłami N_p widać redukcję tych ostatnich (z wyjątkiem pręta 8) o $\sim 50\%$. Wynik ten stanie się jasny, jeśli wprowadzić myślowo w węzle E zerową grupę pionowych sił 5 t i rozdzielić zagadnienie na dwa (rys. 4.3a, b). Pierwsze z nich (rys. 4.3a)



Rys. 4.3. Rozłożenie zadania z rys. 4.2. na zadania prostsze

a) zadanie symetryczne, $X_1' = 0$; b) obciążenie przenoszone prawie całkowicie przez węzeł.

jest zagadnieniem symetrycznym, w którym obydwie łamane ściany $ABCF$ i $ADEF$ pracują jednakowo, rozpórka 5 jest rozciągana, a rozpórka Z ściskana jednakową siłą (rys. 2.23). Wyras wolny $a_{1,0}$ jest przy tym równy zero, skąd wynika $X_1' = 0$. Zadanie drugie (rys. 4.3b) przy istnieniu pręta 13 przedstawia

obciążenie płaskiej wręgi $BCDE$ wzmocnionej dwoma ostrosłupowymi piramidami. Jasne jest, że takie wzmocnienie jest słabe i gdy je pominąć, to zadanie drugie sprowadza się do statyki wręgi statycznie wyznaczalnej. Obliczona przy tym założeniu siła w przecię 13 $X_3'' = -6,4$ t jest prawie równa X_1 obliczonej poprzednio. Jeśli otrzymane z obydwu zadań (rys. 4.3a, b) wartości złożymy, to przybliżone wartości W_p' (kolumna XI) są bardzo bliskie rzeczywistych potwierdzając przez to słuszność podanej interpretacji.

Analizując wartości liczbowe kolumny VII widzimy, iż składnik odpowiadający wykrzyżowaniu 13 jest bardzo mały w porównaniu do sumy reszty składników. Jeśliby zatem zmieniać jego sztywność, to nie należy oczekiwać żadnych poważniejszych zmian w przebiegu sił*. Ten fakt jest niezmiernie ważny w analizie kratownic i będzie wykorzystany w rozwiązaniach przybliżonych (art. 4.5).

Przechodząc do drugiego przykładu, rozważmy przypadek płaskiej kratownicy (rys. 4.4a) czterokrotnie statycznie niewyznaczalnej ($w' = 10$, liczba prętów łącznie z trzema wieżami** $p' = 24$). Uważając pręty (1, 4), (3, 6), (5, 8) i (7, 10) za elementy przeszytyniające otrzymujemy po ich myślowym rozcięciu i wprowadzeniu oddziaływań $X_1, \dots, X_4$ (rys. 4.4b) statycznie wyznaczalną konstrukcję zasadniczą (I etap rozwiązania). W etapie drugim (rys. 4.4c, ..., g) rozdzielamy obciążenia na poszczególne stany obciążeń, a następnie wyznaczamy siły N_p (kolumna druga tabl. 4.2) oraz $n_p^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Układ równań M—M napisany w ogólnej postaci (4.2)

$$\begin{aligned} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + a_{1,4}X_4 + a_{1,0} &= 0, \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,4}X_4 + a_{2,0} &= 0, \\ a_{3,1}X_1 + a_{3,2}X_2 + a_{3,3}X_3 + a_{3,4}X_4 + a_{3,0} &= 0, \\ a_{4,1}X_1 + a_{4,2}X_2 + a_{4,3}X_3 + a_{4,4}X_4 + a_{4,0} &= 0 \end{aligned}$$

upraszcza się, jeśli zauważymy, iż działanie poszczególnych układów jednostkowych zamyka się w obrębie jednej grodzi. Wskutek tego $a_{1,3}$, $a_{1,4}$ są równe zeru, gdyż nie ma ani jednego pręta, w którym jednocześnie $n_p^{(1)}$ i $n_p^{(3)}$ lub $n_p^{(4)}$ byłyby różne od zera. Oznacza to, że układ X_3 lub X_4 nie ma bezpośredniego wpływu na zbliżenie się przekrojów przeciętego pręta 1. W wyniku otrzymujemy ostatecznie układ

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + 0 + 0 + a_{1,0} &= 0, \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + 0 + a_{2,0} &= 0, \\ a_{3,2}X_2 + a_{3,3}X_3 + a_{3,4}X_4 + a_{3,0} &= 0, \\ a_{4,3}X_3 + a_{4,4}X_4 + a_{4,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

przypominający swą budowę równanie 3 momentów (art. 1.4).

Przechodząc do konkretnego obliczenia współczynników przy niewiadomych, założymy dla prostoty, że przekroje pasów podłużnych są A_0 , pozostałe zaś A . Wtedy

$$a_{i,i} = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{a}{EA_0} + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{a}{EA} + 2(1)^2 \frac{a\sqrt{2}}{EA} = \left(1 + 2\sqrt{2} + \frac{A}{A_0} \right) \frac{a}{EA},$$

a wszystkie pozostałe współczynniki przy niewiadomych X są:

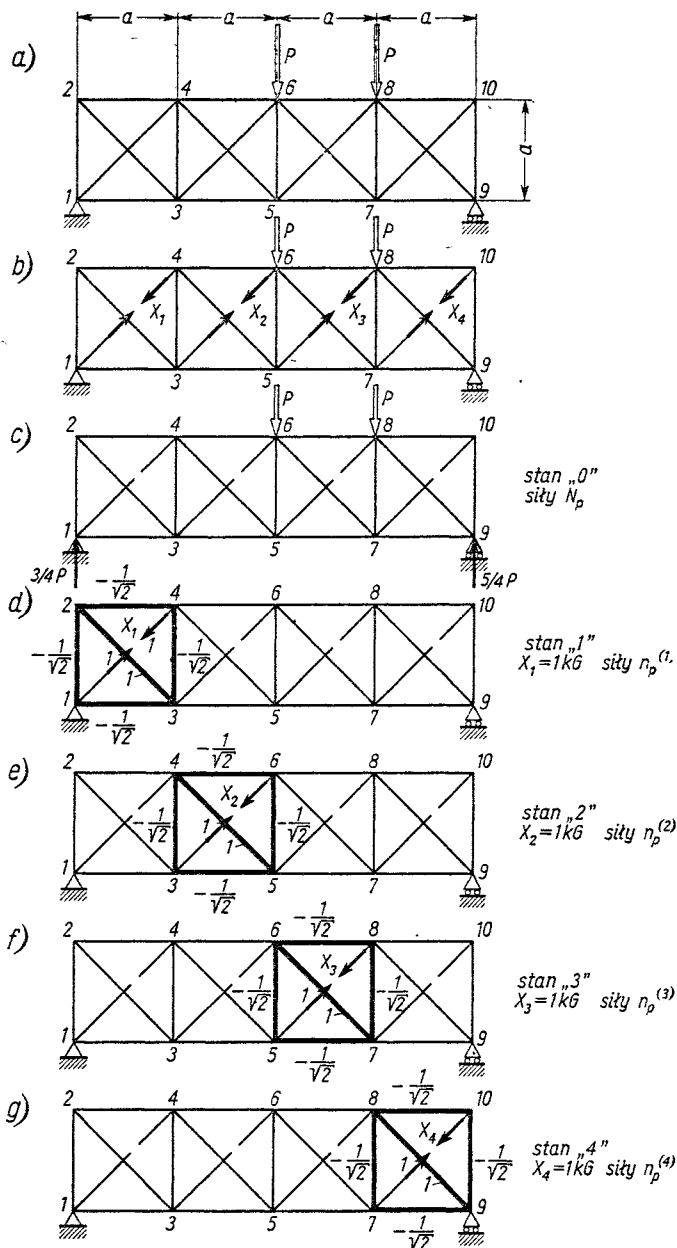
$$a_{1,2} = a_{2,1} = \dots = a_{4,3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{a}{EA} = \frac{a}{2EA}.$$

Podstawiając dane liczbowe z rys. 4.4 mamy

$$Ea_{i,i} = 86,6 \text{ cm}^{-1}, \quad Ea_{i,j} = 10 \text{ cm}^{-1} (i \neq j).$$

* Gdyby na przykład sztywność ta była bardzo duża ($A_{13} \rightarrow \infty$), to zmiana w wartości X_1 byłaby tylko $\sim 3,7\%$. Gdyby na odwrót zmniejszyć ją 5-krotnie ($A_{13} = 1 \text{ cm}^2$), to zmiana X_1 ($\sim 13\%$) też nie zmienia zasadniczo schematu pracy.

** W węźle 1 — dwie niezależne reakcje, w węźle 9 — jedna reakcja.



Rys. 4.4. Przykład kratownicy wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej

Dane liczbowe: $a = 2 \text{ m}$, $A_s = 20 \text{ cm}^2$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $P = 5 \text{ t}$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$.

Tablica 4.2

Pręt	l_p/A_p 1/cm	N_p t _y	$n_p^{(1)}$ kG/kG	$n_p^{(2)}$ kG/kG	$n_p^{(3)}$ kG/kG	$n_p^{(4)}$ kG/kG	$n_p^{(5)}$ kG/kG	$N_p^{(1)} l_p$ A_p t/cm	$N_p^{(2)} l_p$ A_p t/cm	$N_p^{(3)} l_p$ A_p t/cm	$N_p^{(4)} l_p$ A_p t/cm	W_p t
1-2	20	-3,750	-0,707					53,1				-1,65
1-3	10	0	-0,707					0				2,10
1-4	28,3	0	1,000					0				-2,97
2-3	28,3	5,310	1,000					150,1				2,34
2-4	10	-3,750	-0,707					26,1				-1,65
3-4	20	-3,750	-0,707	-0,707				53,1				0,43
3-5	10	3,750		-0,707				-26,6				1,66
3-6	28,3	0		1,000				0				-2,95
4-5	28,3	5,310		1,000				150,1				2,36
4-6	10	-7,500		-0,707				53,1				-5,41
5-6	20	-3,750		-0,707	-0,707			53,1	53,1			-1,79
5-7	10	+7,500			-0,707				-53,1			7,37
5-8	28,3	0			1,000				0			0,19
6-7	28,3	-1,770			1,000				-50,0			-1,58
6-8	10	-6,250			-0,707				44,1			-6,38
7-8	20	1,250			-0,707	-0,707			-17,7			-1,46
7-9	10	6,250				-0,707			-50,0			3,67
7-10	28,3	0				1,000						3,65
8-9	28,3	-8,830				1,000						-5,18
8-10	10	0				-0,707						-2,58
9-10	20	0				-0,707						-2,58
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Obliczając poszczególne pozycje kolumn 7,...10, po ich zsumowaniu otrzymujemy E -krotne wartości wyrazów wolnych i po podstawieniu do (g) mamy ostatecznie

$$\left. \begin{aligned} 86,6X_1 + 10,0X_2 + 0 + 0 + 282,9 &= 0, \\ 10,0X_1 + 86,6X_2 + 10,0X_3 + 0 + 282,9 &= 0, \\ 10,0X_2 + 86,6X_3 + 10,0X_4 - 23,6 &= 0, \\ 10,0X_3 + 86,6X_4 - 317,7 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Rozwiązanie układu daje

$$X_1 = -2,97 \text{ t}, \quad X_2 = -2,95 \text{ t}, \quad X_3 = 0,19 \text{ t}, \quad X_4 = 3,65 \text{ t}.$$

Wyznaczając wypadkowe siły (wzór 4.7.) podstawiamy wyniki do kolumny II. Interesujące jest przy tym porównanie sił w wykrzyżowaniach jednej i tej samej grodzi (wartości w obwódkach). Jak widać w wykrzyżowaniach lewej strony (grodzie I i II), bezwzględne wartości tych sił nie różnią się zbyt od siebie, natomiast poważniejsza różnica zachodzi po prawej stronie (grodzie IV). Daje to podstawę do wniosku potwierdzonego obliczeniami ustrojów o większej liczbie grodzi, że (w pierwszym przybliżeniu) obydwie wykrzyżowania w grodziach bardziej odległych od punktów przyłożenia sił skupionych przenoszą jednakową część siły poprzecznej.

4.2. Niektóre ułatwienia rozwiązań

Jakkolwiek wszystkie zagadnienia statyki kratownic statycznie niewyznaczalnych można rozwiązać według ogólnych reguł art. 4.1, w wielu przypadkach wyniki można otrzymać znacznie prościej, niekiedy nawet bez potrzeby przeprowadzania obliczeń. Poznanie tych uproszczeń stanowi cel tego artykułu.

Jedną z metod dającą znaczne ułatwienie jest zastosowanie zasady superpozycji. Jeśli na kratownicę statycznie niewyznaczalną działają dwa lub więcej układów obciążeń, to skutek ich łącznego działania (siły w prętach, przemieszczenia) jest równy sumie skutków wywołanych przez każdy układ z osobna*. Dzięki tej zasadzie możemy zadania złożone rozdzielić na szereg zadań prostszych, przy czym odpowiedź na niektóre z nich można otrzymać bez rachunków. Za przykład może służyć zadanie (rys. 4.2), w którym po rozłożeniu na zadania prostsze (rys. 4.3) możemy od razu przewidzieć wynik dla jednego z nich (rys. 4.3a). Stosowanie zasady superpozycji jest wskazane również wtedy, gdy obciążenie zewnętrzne składa się z kilku obciążeń niezależnych od siebie (np. ciężar własny i obciążenie przesuwne). W takich przypadkach mając skutki działania każdego z obciążeń oddzielnie można łatwo dokonać wyboru niebezpiecznej dla konstrukcji kombinacji tych obciążeń.

Szczególnie często stosujemy zasadę superpozycji do rozeznania skutków działania różnych przyczyn. W odróżnieniu bowiem od konstrukcji statycznie wyznaczalnych, w których jedyną przyczyną wywołującą siły w prętach jest działanie obciążeń zewnętrznych, w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych przyczynami tymi może być również wydłużalność prętów wywołana ogrzaniem jak i błędy montażowe, gdyż wszystkie one

* Słuszność tego wyniku z liniowości wyrażen określających u_p (wzór c, art. 4.1) i liniowości układu równań (4.2) określających siły X .

wpływają na wartość $\alpha_{i,0}$ (patrz wzory 4.4, 4.6 i wzór (c) art. 4.1). Rozkładają zatem całkowite wydłużenie u_p na składniki*

$$u_p = N_p l_p / E_p A_p, \quad u_p'' = \lambda_p \Delta t_p l_p, \quad u_p''' = d_p,$$

obliczamy oddzielnie trzy grupy wyrazów wolnych

$$\alpha'_{i,0} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p', \quad \alpha''_{i,0} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p'', \quad \alpha'''_{i,0} = \sum_{p=1}^k n_p^{(i)} u_p''' \quad (4.11)$$

i dla każdej z nich rozwiązujemy układ równań (4.2), w którym współczynniki $\alpha_{i,j}$ pozostają we wszystkich przypadkach te same. Otrzymane stąd niewiadome X'_i , X''_i , X'''_i pozwalają wyznaczyć z (4.7) wypadkowe siły wewnętrzne** W'_p , W''_p i W'''_p , a następnie naprężenia w prętach

$$\sigma_p = W'_p / A_p, \quad \sigma_p'' = W''_p / A_p, \quad \sigma_p''' = W'''_p / A_p. \quad (4.12)$$

Naprężenia σ_p'' i σ_p''' noszą odpowiednio nazwę *naprężeń termicznych* i *naprężeń montażowych*. Ich wartości mogą być tego samego rzędu co i wartości σ_p' , powodując niekiedy przeciążenie elementów. Całkowite bowiem naprężenie σ_p jest sumą

$$\sigma_p = \sigma'_p + \sigma_p'' + \sigma_p''' \quad (4.13)$$

i w przypadku, gdy wszystkie składniki są jednakowego znaku, to $\sigma_q > \sigma'_p$. Szczególnie deprymującym dla konstruktora jest fakt, iż na ogół określenie σ_p'' i σ_p''' jest bardzo problematyczne. Głównym bowiem źródłem powstania tych naprężeń są procesy technologiczne (spawanie, dokładność utrzymania wymiarów itp.), zależne od tak wielu czynników, że otrzymanie wiarygodnych danych wyjściowych (u_p'' , u_p''') jest praktycznie bardzo trudne***. Z tego powodu w praktyce rzadko kiedy prowadzimy obliczenie naprężeń cieplnych i montażowych i z reguły zadowalamy się określeniem tylko naprężeń σ'_p przyjmując w konsekwencji, iż

$$\sigma_p \approx \sigma'_p. \quad (a)$$

Wyjątek stanowią zagadnienia związane z niedokładnością ustawienia podpór (kół jezdnych), której nieprzekraczalna wielkość d_q jest unormowana przepisami****.

Dla zorientowania się w rzędzie wielkości przeprowadzimy obliczenie naprężeń termicznych w konstrukcji (rys. 4.4), gdy dolny pas (I,9) w czasie pracy został ogrzany o $\Delta t = 50^\circ\text{C}$. Przyjmując $\lambda = 12 \cdot 10^{-6} \text{ cm/cm}^\circ\text{C}$ mamy z wzoru (4.11), tabl. 4.2 i rys. 4.4

$$E\alpha'_{1,0} = E\alpha'_{2,0} = E\alpha'_{3,0} = E\alpha'_{4,0} = -169,6 \text{ t/cm},$$

a po podstawieniu do układu równań (h) (art. 4.1) i jego rozwiązaniu

$$X'_1 = 1,78 \text{ t}, \quad X'_2 = 1,57 \text{ t}, \quad X'_3 = 1,57 \text{ t}, \quad X'_4 = 1,78 \text{ t}.$$

* Przypomina się, że u_p' , u_p'' , u_p''' są dodatnie, gdy są wydłużeniem pręta. W przypadku podanych podpór uważamy je za dodatnie, gdy odpowiadają one wydłużeniu pręta wyobrażającego dany więz. Tak na przykład opuszczenie się węzła 4 (rys. 4.1) powoduje skrócenie pręta (4, C) i wtedy $d_q < 0$. Podobnie R_q lub r_2 uważamy za dodatnie, gdy są one rozciągającymi dla pręta wyobrażającego więz.

** Składnik N_p (wzór 4.7) wchodzi tylko do wyrażenia określającego W_p .

*** Niekiedy dla usunięcia naprężeń wynikających z procesów technologicznych stosuje się wyzaczanie całości konstrukcji lub jej części.

**** Tak jest w budowie dźwigów i pojazdów szynowych.

Jak widać wartości X_i są tego samego rzędu co i otrzymane poprzednio siły X . Ten sam wniosek wyciągniemy porównując dla rozpórek i wykrzyżowań siły W_p'' z siłami W_p (kolumna II tabelicy 4.2). Tak na przykład w kolejnych rozpórkach (1, 2), ..., (9, 10) otrzymujemy odpowiednio

$$-1,26 \text{ t}, \quad -2,37 \text{ t}, \quad -2,22 \text{ t}, \quad -2,37 \text{ t}, \quad -1,26 \text{ t},$$

w porównaniu z poprzednio obliczonymi siłami W_p

$$-1,65 \text{ t}, \quad +0,43 \text{ t}, \quad -1,79 \text{ t}, \quad -1,46 \text{ t}, \quad -2,53 \text{ t}.$$

Nieco odmiennie wypada porównanie dla podłużnic, w których W_p'' nie przekracza kilkunastu procent (17%) ekstremalnych wartości W_p . Jest to zrozumiałe jeśli zważyć, że podłużnice przy obciążeniu siłami P stanowią pasy kratowej belki i przenoszą duży moment zginający tę belkę.

Analogicznie rozwiązujemy zagadnienie naprężeń montażowych. Przypuśćmy na przykład, iż w kratownicy (rys. 4.2) pręt 13 wstawiono za długi o $d_{13} = 0,2 \text{ cm}$. Uwzględniając, iż $n_{13}^{(1)} = 1,0$ mamy według (4.11)

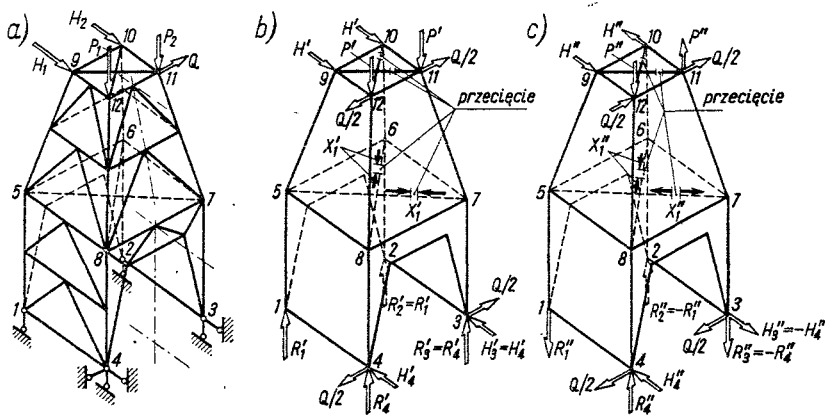
$$E\alpha_{1,0}''' = E n_{13}^{(1)} d_{13} = 2 \cdot 10^6 \cdot 1,0 \cdot 0,2 = 400 \text{ t/cm},$$

a po rozwiązaniu równania (f) (art. 4.1)

$$X_1''' = -400/854 \approx -0,47 \text{ t}.$$

Jak widać omawiana konstrukcja jest stosunkowo mało czuła na błędy montażowe, co wynika ze słabego stosunkowo usztywnienia węgry $BCDE$ przez dwie wysmukłe ostrosłupowe piramidy (analogia do przykadku z rys. 4.3b).

W wielu zagadnieniach znaczne uproszczenie otrzymujemy przez zastosowanie zasady jednoznaczności rozwiązania (art. 1.5). Dotyczy to zwłaszcza konstrukcji symetrycznych, w których dzieląc obciążenia zewnętrzne na symetryczne i antysymetryczne możemy



Rys. 4.5. Ułatwiona analiza kratownicy 3-krotnie statycznie niewyznaczalnej

a) ogólny układ obciążeń, pozioma reakcja w węźle 4 w kierunku (4, 3) jest znana i równa Q ; b) zadanie symetryczne 2-krotnie statycznie niewyznaczalne; c) zadanie antysymetryczne 1-krotnie statycznie niewyznaczalne.

podzielić ogólne zadanie na dwa prostsze. Biorąc na przykład wieżę (rys. 4.5a) unieruchomioną siedmioma więzami i mającą w obydwóch węzłach podwójne wykrzyżowania widzimy, iż jest ona 3-krotnie statycznie niewyznaczalna*. Obierając jako elementy

* Wprowadzając w ścianach płaskich (3, 4, 8, 7), (1, 5, 8, 4), (5, 9, 12, 8) itd. pręty funkcjonalnie równoważne (patrz art. 3.1) widzimy, iż kratownicę można sprowadzić do typu przedstawionego na rys. 3.30, jeśli są przecięte wykrzyżowania węgry (5, 6, 7, 3) i jedno z wykrzyżowań węgry górnej.

przesztyniające wykrzyżowania wręg zamieniamy konstrukcję na statycznie wyznaczalną przez ich przecięcie i wprowadzenie odpowiednich sił (analogia z rys. 3.30). Jeśli teraz wydzielimy symetryczne obciążenie i symetryczny układ reakcji (rys. 4.5b) i zauważymy, że w wykrzyżowaniach wręg siły wewnętrzne są parami równe, to zadanie jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalne (siły X'_1 i nie pokazane na rysunku siły X'_2 w górnej wrędze). Zadanie pozostałe (rys. 4.5c) jest, wbrew pozorom, jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, albowiem do zamiany tej konstrukcji na statycznie wyznaczalną wymagane jest myślowe przecięcie wykrzyżowań tylko jednej wręgi (5, 6, 7, 8). Zauważmy bowiem, że przy antysymetrycznym obciążeniu siły w symetrycznie położonych prętach muszą być przeciwne, tzn. $N_{9,11} = -N_{10,12}$. Jeśli więc pręty wręgi (5, 6, 7, 8) są nieczynne, to powyższa zależność umożliwia wyznaczenie $N_{9,11} = -N_{10,12}$ z samych tylko równań statyki (patrz rys. 3.30). W rezultacie jedynymi elementami przesztyniającymi są pręty (5, 7) i (6, 8), w których jednakże siły muszą być znowu przeciwne tak jak to podano na rys. 4.5c. Jak widać otrzymane zadania są znacznie prostsze niż pierwotne, przy czym dużym dodatkowym ułatwieniem jest możność znacznie prostszego obliczenia* współczynników $a_{i,j}$ oraz wyrazów wolnych $a_{i,0}$.

Innego rodzaju ułatwienie rozwiązania przestrzennych konstrukcji statycznie niewyznaczalnych daje redukcja do płaskich zagadnień. Jeśli mianowicie w przestrzennej kratownicy o ścianach płaskich statyczna niewyznaczalność wynika z przesztynienia jednej ze ścian sztywnej już w pierwotnej konstrukcji, to przesztynienie to nie wpływa na przebieg sił wewnętrznych w prętach należących do ścian pozostałych. Jako ilustrację tej reguły rozpatrzmy bliżej kratownicę (rys. 4.5b), o której a priori wiemy, iż układ symetrycznych reakcji w węzłach 1, 2, 3, 4 jest znany. Załóżmy na chwilę, że pręty (5, 7) i (9, 11) nie są przecięte, podczas gdy pozostałe dwa wykrzyżowania są nadal nieczynne (przecięte). Taka kratownica jest statycznie wyznaczalna (patrz rys. 2.23, 3.25a, c), przy czym obie wręgi są sztywne. Jeśli teraz przesztynimy jedną z nich, np. wręgę (5, 6, 7, 8), to działające w przecię (6, 8) siły X'_1 wyznaczymy z równania

$$a_{1,1}X'_1 + a_{1,0} = 0. \quad (b)$$

Zauważmy przy tym, iż działanie siły X'_1 zamyka się w obrębie tej wręgi (reguła 5 art. 2.8), a więc jest zadaniem płaskim. W rezultacie korekta sił wniesiona przez X'_1 (wzór 4.7) dotyczyć będzie tylko prętów wręgi, natomiast nie wpłynie na wartości sił w prętach pozostałych ścian. Ten sam wniosek otrzymamy dla wręgi (9, ..., 12), przy czym wartość siły X'_2 (nie pokazanej na rysunku) nie zależy od X'_1 . W rezultacie omawiane zadanie dzieli się na dwa zadania płaskie, każde jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, których rozwiązanie jest bardzo proste**.

Dodatkowe ułatwienie rozwiązania daje reguła zamiany stanu „0” (art. 1.4). W zastosowaniu do kratownicy statycznie niewyznaczalnych oznacza to, że siły wewnętrzne N_p stanu „0” możemy obliczać dla kratownicy o innym schemacie statycznym niż ten, który

* W obydwu zadaniach (rys. 4.5b, c) siły n_p i N_p oraz wszystkie tablice obliczamy tylko dla jednej połówki konstrukcji.

** Prostota ta wynika z małej liczby składników wchodzących do wyrażenia na $a_{i,j}$ oraz $a_{i,0}$, gdyż odpowiada ona liczbie prętów kratownicy płaskiej.

został przyjęty do określenia sił wewnętrznych pozostałych stanów. Dla przykładu w kratownicy (rys. 4.4) stwierdzenie powyższe uprawnia do przyjęcia w stanie „0” (rys. 4.4c) schematu, w którym myślowo przeciętymi byłyby pręty podłużnicy dolnej (1, 9) a nieprzeciętymi wykrzyżowania (1, 4), ..., (7, 10). Równie dobrze można przyjąć jakikolwiek inny schemat, jeśli tylko spełnimy wymagania reguły zamiany. Tak na przykład jako stan „0” można by przyjąć wartości sił N_p odpowiadające założeniu, iż siły w prętach (1, 4), ..., (7, 10) są odpowiednio równe* siłom w prętach (2, 3), ..., (8, 9). Inne przykłady zastosowania tej reguły podane będą w następnych artykułach.

Na zakończenie podamy jeszcze jedną zasadniczą uwagę odnośnie zamiany prętów. W odróżnieniu od konstrukcji statycznie wyznaczalnych, gdzie pojęcie prętów zastępczych jest stosowane w dwojakim znaczeniu, a mianowicie jako pewien sposób obliczeń (art. 2.7) i jako pomoc w analizie statycznego schematu konstrukcji (art. 3.1), w kratownicach statycznie niewyznaczalnych nieograniczone stosowanie pojęcia prętów zastępczych dozwolone jest tylko w znaczeniu prętów funkcjonalnie równoważnych ułatwiających zrozumienie pracy konstrukcji (patrz rys. 3.25d). Nie jest natomiast dopuszczalne bez spełnienia dodatkowych warunków stosowanie prętów zastępczych do obliczania sił wewnętrznych. Rzeczywisty bowiem układ prętów wpływa na wartość wolnych wyrazów $a_{i,0}$ jak i współczynników $a_{i,j}$, a w konsekwencji na wartości sił X układu równań (4.2) i wypadkowych sił W_p (wzór 4.7). Jeśli by zatem wprowadzić pojęcie prętów zastępczych jako elementów w obliczeniach wartości sił, to musi być spełniony warunek, aby taki pręt zastępczy był tak samo podatny jak zastępowany przez niego rzeczywisty układ prętów. Okazuje się, iż ścisłe spełnienie tego wymagania jest na ogół niemożliwe i dlatego wszystkie obliczenia konstrukcji statycznie niewyznaczalnych wykorzystujące pojęcie prętów zastępczych mają charakter przybliżony. Stwierdzenie to nie dyskwalifikuje bynajmniej takich obliczeń, stanowi jedynie ostrzeżenie przed bezkrytycznym stosowaniem pojęcia prętów zastępczych w takim sensie jak to było całkowicie dopuszczalne w art. 2.7.

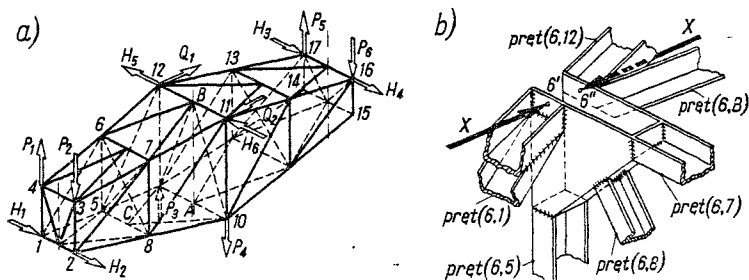
4.3. Konstrukcje 4-podłużnicowe z przeszytwnionymi wręgami

Konstrukcje takie (rys. 4.6a) są typowymi rozwiązaniami w różnego rodzaju kratowych kadłubach, wysięgnikach, słupach itp. Rozważając na razie przypadek, gdy wszystkie zewnętrzne ściany kratownicy składają się z trójkątów, widzimy, że kratownice takie są statycznie niewyznaczalne na skutek wykrzyżowania więcej niż dwóch wręg, a stopień statycznej niewyznaczalności jest równy liczbie wykrzyżowanych wręg zmniejszonej o 2.

Rozwiązanie takich kratownic można prowadzić w różnoraki sposób. Jednym z nich jest uogólnienie poprzedniego sposobu (rys. 4.2), polegające na przyjęciu wykrzyżowań

* Przyjęcie tego założenia jest równoznaczne z wprowadzeniem „a priori” (patrz art. 1.4) wartości sił X równych odpowiednio $X'_1 = X'_2 = -2,67$ t, $X'_3 = 0,18$ t, $X'_4 = 4,42$ t. Nie powtarzając zatem rachunków z art. 4.1 możemy od razu odpowiedzieć, że wartości X''_1 , które wypadną z rozwiązania zmienionego układu równań (h) będą $X''_1 = X_1 - X'_1 = -0,30$ t, $X''_2 = -0,35$ t, $X''_3 = 0,01$ t, $X''_4 = -0,77$ t. Jak widać przez takie intuicyjnie uzasadnione założenie osiągamy kilkakrotne zmniejszenie statycznie niewyznaczalnych sił X , osiągając przez to spełnienie drugiego podstawowego postulatu art. 1.4.

wręg pośrednich za elementy przesztynniające konstruując. Okazuje się jednak, iż sposób ten nie spełnia postulatów* art. 1.4 i dlatego posługujemy się innym bardziej racjonalnym schematem jednakowym dla wszelkich konstrukcji 4-podłużniowych. Załóżmy mianowicie na chwilę, że w kratownicy (rys. 4.6a) węzły 6, 12 i 13 zostały wykonane tak, jak



Rys. 4.6. Kratownica powłokowa trzykrotnie statycznie niewyznaczalna
a) układ obciążeń; b) modyfikacja węzła 6.

to dla węzła 6 podaje rys. 4.6b. Rozwiązanie to umożliwia swobodną zmianę odległości odpowiadających sobie punktów 6' i 6'' w kierunku prostopadłym do płaszczyzny wręgi (5, 6, 7, 8), nie pozwalając jednak na swobodne przesunięcia tych punktów w płaszczyźnie wręgi. Tak zmodyfikowana konstrukcja jest statycznie wyznaczalną kratownicą łączoną** (patrz art. 2.5), a działanie obciążenia zewnętrznego spowodowałoby w węzłach 6, 12 i 13 zmianę odległości odpowiadających sobie punktów. W konstrukcji rzeczywistej takich zmian nie ma. Jest to możliwe tylko dlatego, że między tymi punktami zmodyfikowanego węzła działają odpowiednie siły X prostopadłe do płaszczyzny danej wręgi. Te właśnie siły przyjmujemy za wielkości statycznie niewyznaczalne. Są one różne w węzłach 6, 12 i 13, tak że w wyniku otrzymujemy tyle niewiadomych, ile jest przesztynnionych wręg pośrednich.

* Przy większej liczbie niewiadomych otrzymujemy niewygodną postać układu równań $M-M$ oraz trudności natury rachunkowej przy obliczeniu wartości współczynników $a_{i,j}$ oraz $a_{i,0}$. Wynika to stąd, iż każda ze statycznie niewyznaczalnych sił wywołuje wewnętrzne siły we wszystkich prętach kratownicy.

** „Bryłami” sztywnymi są wręgi, elementami łączącymi — pręty pobożniczy. Wbrew pozorom liczba niewiadomych sił w zespole prętów łączących dwie kolejne wręgi jest tylko sześć. Tak na przykład w zespole dziesięciu prętów między wręgami (5,...,8) i (9,...,12) tymi niewiadomymi są

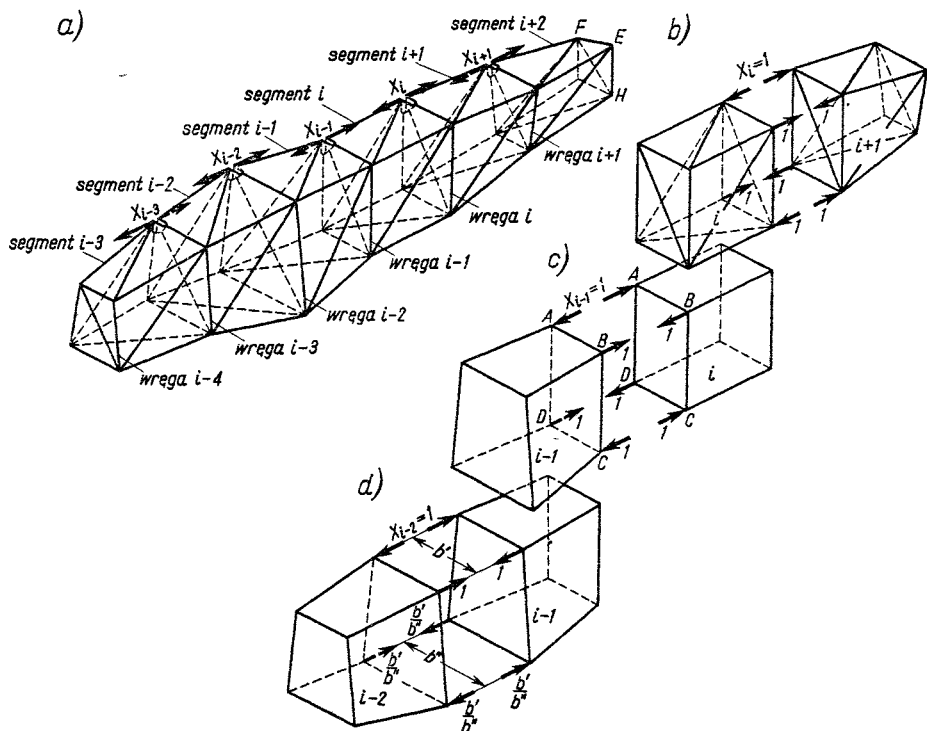
$$N_{7,11}, N_{8,11}, N_{8,10}, N_{10,C}, N_{7,B}, N_{5,9},$$

natomiast siły w pozostałych prętach są już przez te niewiadome określone. Jeśli na przykład wręgi są równoległe a kratownica symetryczna, to $N_{10,C} = -N_{9,C}$ (patrz rys. 2.13), a dzięki podanemu ukształtowaniu węzłów 6 i 12

$$N_{7,B}/l_{7,B} = -N_{6,B}/l_{6,B} = N_{6,12}/l_{6,12} = -N_{5,12}/l_{5,12}$$

(patrz rys. 3.8).

Przechodząc do obliczenia sił X w przypadku ogólnym (rys. 4.7a) zauważmy najpierw, że działanie sił X_i wywołuje siły wewnętrzne tylko w prętach segmentu* i oraz $i+1$. Wynika to stąd, że konstrukcja ze zmodyfikowanymi węzłami (rys. 4.6b) jest statycznie wyznaczalna**. Wartości sił wywołane siłami X_i najłatwiej obliczamy dzieląc myślowo wręgę i , tak że powstają dwie wręgi przynależne do segmentów $i-1$ oraz i . Obliczając wzajemne oddziaływania między tymi segmentami (rys. 4.7b) sprowadzamy zadanie do



Rys. 4.7. 4-podłużnicowa konstrukcja wielokrotnie statycznie niewyznaczalna.

a) obiór wielkości statycznie niewyznaczalnych, b), c), d) odpowiednie stany obciążeń jednostkowych: stan i , $i-1$, $i-2$.

rozpatrzonych poprzednio (rys. 3.6a). Na skutek tego w ogólnym równaniu (4.2) wszystkie współczynniki $\alpha_{i,j}$, dla których $j \leq i-3$ lub $j \geq i+3$, są równe zero, albowiem nie ma

* Termin „segment” oznacza podzespół ograniczony z obydwóch stron sztywnymi wręgami, podczas gdy termin „grodz” oznacza zespół prętów między kolejnymi wręgami. Tak więc segment „ i ” obejmuje pręty grodzi „ i ” oraz pręty wręg „ $i-1$ ” oraz „ i ”.

** Jeśli działają tylko siły X_i , to w przekroju między wręgami $i-1$ oraz $i-2$ obciążenie zewnętrzne jest równe zero. Wynika stąd, że każda z sześciu sił niezależnych w prętach łączących jest równa zero (wzory 2.5 i uwaga do rys. 4.6). To samo obowiązuje dla każdego innego segmentu znajdującego się na lewo od segmentu $i-1$ i na prawo od segmentu $i+1$. W konsekwencji zerowe są również pręty wszystkich wręg oprócz $i-1$, i oraz $i+1$.

ani jednego pręta, w którym jednocześnie $n_p^{(i)}$ oraz $n_p^{(j)}$ byłyby różne od zera. Korzystając z tej uwagi upraszczamy równanie (4.2) do postaci (1.16), to jest

$$a_{i,i-2}X_{i-2} + a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,i+2}X_{i+2} + a_{i,0} = 0. \quad (4.14)$$

Sprężenie między X_i a X_{i-2} (lub X_{i+2}) pojawia się tylko na skutek odkształcalności wręgi ($i-1$)-ej (lub $(i+1)$ -ej), w której jednocześnie $n_p^{(i)}$ oraz $n_p^{(i-2)}$ (lub $n_p^{(i+2)}$) są nie-równe zeru, i jest ono z reguły małe, to znaczy $a_{i,i-2} \ll a_{i,i}$ (lub $a_{i,i+2} \ll a_{i,i}$). W wielu przeto zagadnieniach sprężenia te pomijamy, co daje możliwość uproszczenia równania (4.14a) do postaci

$$a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,0} = 0. \quad (4.14b)$$

Ogólna postać równania (4.14) ulega zmianie przy rozpatrywaniu segmentów skrajnych. Jeśli jako konkretny przykład wziąć konstrukcję 6-segmentową (rys. 4.7a) swobodną na dwóch końcach, to mamy w niej pięć niewiadomych $X_1, X_2, \dots, X_5$ działających w płaszczyznach odpowiednich wręg. Ponieważ dla segmentu 1 $X_0 = 0$, a segment o wskaźniku (-1) nie istnieje, to równanie dla wręgi 1 ($i=1$) przyjmuje postać

$$a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + 0 + 0 + a_{1,0} = 0.$$

Dla wręgi 2 ($i=2$) mamy $X_{1-2} = X_0 = 0$, więc

$$a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,4}X_4 + a_{2,0} = 0.$$

Analogiczną postać będą miały równania dla wręg 4 i 5, gdyż $X_6 = 0$, a segment 7 nie istnieje. W rezultacie dla rozpatrywanej konstrukcji układ równań (4.14a) ma postać:

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + 0 + 0 + a_{1,0} &= 0, \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,4}X_4 + 0 + a_{2,0} &= 0, \\ a_{3,1}X_1 + a_{3,2}X_2 + a_{3,3}X_3 + a_{3,4}X_4 + a_{3,5}X_5 + a_{3,0} &= 0, \\ a_{4,2}X_2 + a_{4,3}X_3 + a_{4,4}X_4 + a_{4,5}X_5 + a_{4,0} &= 0, \\ a_{5,3}X_3 + a_{5,4}X_4 + a_{5,5}X_5 + a_{5,0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Gdyby konstrukcja miała więcej grodzi, to symboliczne przedstawienie układu równań byłoby takie jak podaje rys. 1.13a.

Wartości współczynników $a_{i,j}$ wyznaczamy z ogólnych wzorów (4.3) prowadząc obliczenia tabelaryczne na konkretnych danych liczbowych. Wehódzące do tych wzorów siły $n_p^{(i)}$ bądź $n_p^{(j)}$ otrzymujemy z rozwiązania zadań analogicznych do podanego na rysunku 3.6. W przypadku wręg trapezowych odpowiedni układ oddziaływań podaje rys. 4.7d.

W przypadku regularnej konstrukcji pryzmatycznej (rys. 4.8) zbudowanej z identycznych segmentów ($l_i = \text{const} = l$), zamiast obliczeń tabelarycznych dla $a_{i,j}$ można zastosować następujące wzory

$$Ea_{i,i-2} = Ea_{i,i+2} = \frac{w^3}{4l^2A_w},$$

$$Ea_{i,i-1} = Ea_{i,i+1} = -\frac{1}{l^2} \left(\frac{w^3}{A_w} + \frac{b^3 + h^3}{2A_r} + \frac{s^3 + g^3}{2A_s} - \frac{l^3}{2A'} - \frac{l^3}{2A''} \right),$$

$$Ea_{i,i} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{3}{2} \frac{w^3}{A_w} + \frac{l^3 + h^3}{A_r} + \frac{s^3 + g^3}{A_s} + \frac{l^3}{A'} + \frac{l^3}{A''} \right), \quad (b)$$

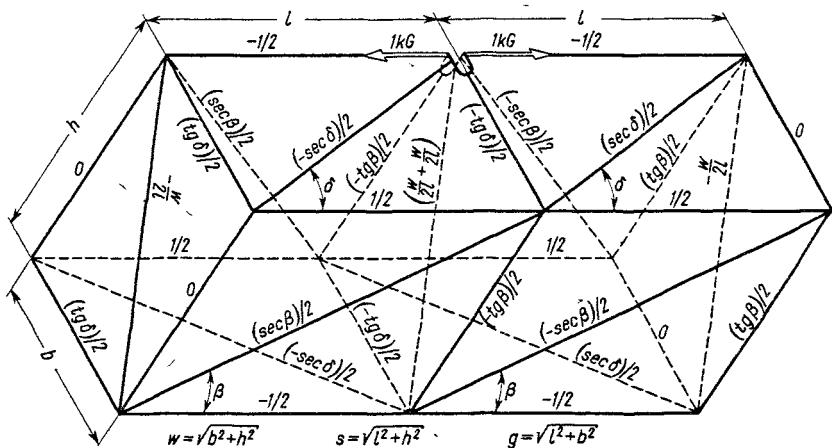
gdzie

A_w, A_r, A_s — przekroje wykrzyżowań wręg (A_w), rozpórek (A_r), wykrzyżowań ścian bocznych i poziomych (A_s),

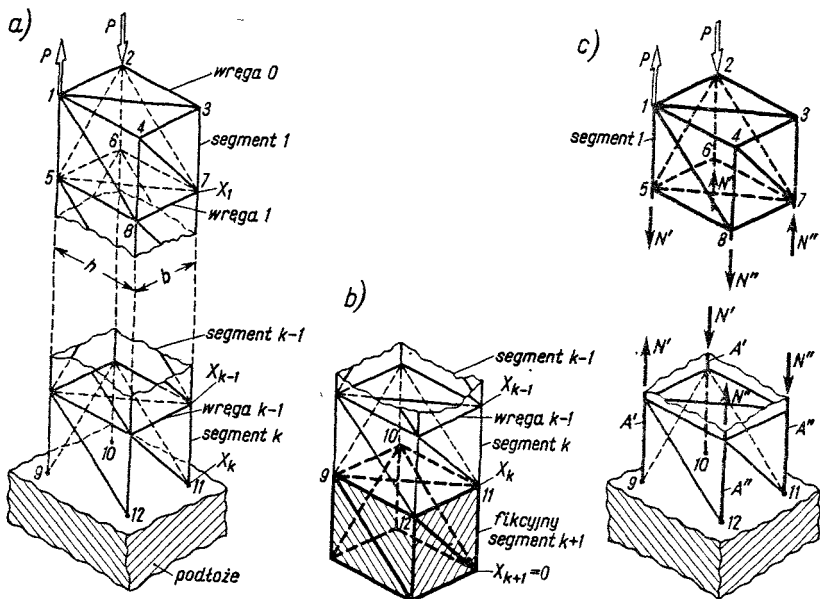
A' — przekrój podłużnicy ściany przedniej,

A'' — przekrój podłużnicy ściany tylnej.

W przypadku wsporników lub stałych słupów zamocowanych jednym końcem w bardzo sztywnym (nieodkształcalnym) podłożu (rys. 4.9a) węzły kratownicy w miejscu styku z podłożem nie mogą doznawać przemieszczeń wzdłużnych, co powoduje, iż w tym przekroju siła $X_k \neq 0$. Zachodzi zatem potrzeba ułożenia jeszcze jednego równania wyrażającego ciągłość przemieszczeń między konstrukcją a podłożem. Równanie to najprościej otrzymujemy przez wprowadzenie fikcyjnego segmentu ($k+1$) o nieskończenie wielkiej sztywności wszystkich jego prętów (rys. 4.9b), przy czym zakładamy $X_{k+1} = 0$.



Rys. 4.8. Wartości sił wywołanych przez $X_i = 1 \text{ kG}$ w segmentach $i, i+1$



Rys. 4.9. 4-podłużnicowy statycznie niewyznaczalny stały słup

a) obraz konstrukcji; b) wprowadzenie fikcyjnego segmentu; c) racjonalny obiór stanu „0” (art. 4.5).

Jeśli na przykład rozpatrujemy konstrukcję (rys. 4.7a), w której zamocowana wrga EFH ma numer 6, to znaczy $k = 6$, to $X_6 \neq 0$ i zamiast dwóch ostatnich równań układu (a) pojawiają się trzy równania:

$$\left. \begin{aligned} a_{4,2}X_2 + a_{4,3}X_3 + a_{4,4}X_4 + a_{4,5}X_5 + a_{4,6}X_6 + a_{4,0} &= 0, \\ a_{5,3}X_3 + a_{5,4}X_4 + a_{5,5}X_5 + a_{5,6}X_6 + a_{5,0} &= 0, \\ a_{6,4}X_4 + a_{6,5}X_5 + a_{6,6}X_6 + a_{6,0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Przedstawiony schemat statyczny spełnia pierwszy postulat art. 1.4, gdyż jak widzimy z (4.14) każde z równań zawiera mało niewiadomych, obliczenie współczynników $a_{i,j}$ nie jest zbyt trudne (niewielka liczba składników) i wreszcie same równania mają postać dającą się łatwo rozwiązać z dużą dokładnością nawet przy użyciu najprostszych środków (np. suwaka). Nie oznacza to jednak, że schemat ten ma być konsekwentnie stosowany do określenia stanu „0”. Korzystając z *reguły zamiany* (art. 1.4 i 4.2), siły stanu „0” wyznaczamy na ogół z innego schematu statycznego, którego obiór zależy od postawionego sobie celu. Jeśli na przykład zależy nam na jak najdalszym ułatwieniu obliczenia wyrazów wolnych $a_{i,0}$, to stan „0” wybieramy tak, aby liczba czynnych w tym stanie prętów była możliwie mała. Ilustracją tego może być konstrukcja (rys. 4.9a) przy obciążeniu jej parą sił P . Najprostszym stanem „0” będzie ten, w którym założymy, że pracują tylko podłużnice (1, 9) i (2, 10), przy czym siły we wszystkich odcinkach tych podłużnic są jednakowe i równe $N = \pm P$. Obliczenie wyrazów $a_{i,0}$ jest wtedy szczególnie proste, gdyż we wzorze (4.4) dla danego $a_{i,0}$ mamy tylko cztery składniki. Uogólniając ten przykład możemy powiedzieć, że w przypadku układu obciążeń równoważących się w płaszczyźnie jednej z sztywnych ścian płaskich najprostszym stanem „0” jest stan wynikający z rozwiązania tej ściany płaskiej izolowanej od reszty konstrukcji*. Idąc dalej możemy przez zastosowanie zasady superpozycji rozdzielić zagadnienie wyznaczenia sił stanu „0” na kilka prostszych, z których każde operuje innym schematem.

Jeśli na przykład w kratownicy (rys. 4.6a) wykrzyżowania ścian bocznych oraz ściany górnej i dolnej są symetrycznie ustawione, to po rozdzieleniu obciążenia na symetryczne i antysymetryczne można zaproponować następujące etapy wyznaczenia sił stanu „0”.

a. rozwiązanie działania obciążeń symetrycznych według wskazówek podanych na rys. 2.23 przy założeniu, że wykrzyżowań wrgę pośrednich nie ma;

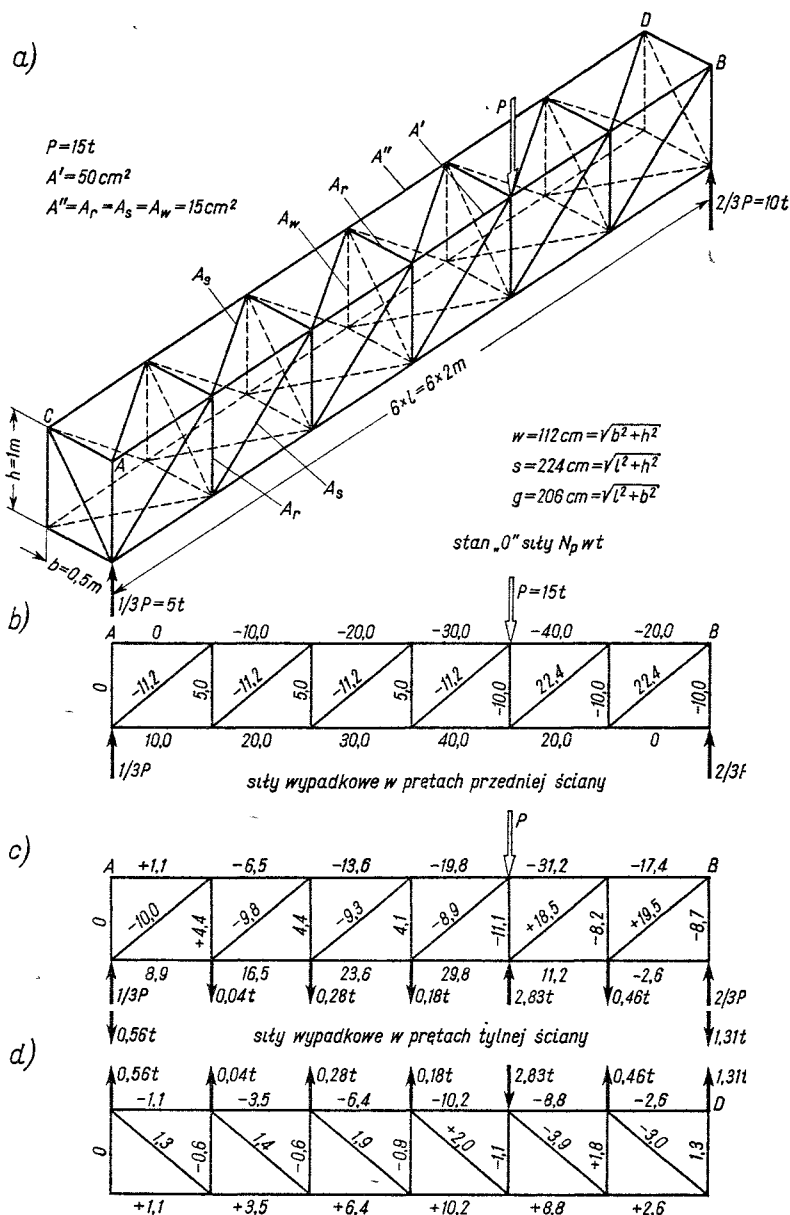
b. rozwiązanie działania antysymetrycznych obciążeń $H_5 = H_6$, $Q_1 = Q_3$ itd. jako dwóch zadań statyki ścian łamanych górnej i dolnej (analogia do rys. 3.17b) przy założeniu, że wykrzyżowań wrgę pośrednich nie ma;

c. rozwiązanie działania antysymetrycznych obciążeń typu $P_1 = P_2$, $P_3 = P_4$ itd., bądź par sił Z uzupełniających zerowe grupy sił z poprzednich zadań (b) (porównaj art. 3.4 wzory 3.8), dających w sumie skręcanie poszczególnych segmentów (zadania Wagnera).

W tych ostatnich zadaniach zakładamy, iż pręty wrgę pośrednich np. (10, B) i (8, 6) istnieją, a siły w nich są równe algebraicznej sumie wyników otrzymanych z rozwiązania stykających się na danej wrgę segmentów (analogia do wzoru 3.9).

Przykład. 6-grozdziowy most suwnicy (rys. 4.10) obciążony jest układem trzech sił, równoważących się w płaszczyźnie dźwigara głównego. Wyznaczyć siły w prętach dźwigara głównego i pomocniczego.

* Nie oznacza to bynajmniej, że siły X są małe. Sposób bardziej racjonalnego doboru stanu „0” podano w art. 4.5.



Rys. 4.10. Przykład rozwiązania statycznie niewyznaczalnej kratownicy

Rozwiązanie. Kratownica jest 5-krotnie statycznie niewyznaczalna i ma układ prętów pokrywający się z rys. 4.8, przeto dla obliczenia współczynników α można zastosować wzory (b), otrzymując:

$$Ea_{i,i-2} = Ea_{i,i+2} = 0,58 \text{ cm}^{-1}, \quad Ea_{i,i-1} = Ea_{i,i+1} = -11,17 \text{ cm}^{-1}, \\ Ea_{i,i} = 55,75 \text{ cm}^{-1}.$$

Przystępując do obliczenia wyrazów wolnych $a_{1,0}, \dots, a_{5,0}$ wyznaczamy układ sił N_p (rys. 4.10b), traktując płaską ścianę przednią jako odizolowaną od pozostałych. Biorąc siły $n_p^{(i)}$ (rys. 4.8) i $\sec \beta = 1,12$, $\operatorname{tg} \beta = 0,50$ wyznaczamy $a_{i,0}$ z wzoru (44). Tak na przykład

$$Ea_{1,0} = \frac{-30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200}{50} + \frac{-40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200}{50} + \frac{40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 200}{50} + \frac{20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 200}{50} + \\ + \frac{-11,2 \cdot 0,56 \cdot 224}{15} + \frac{22,4 \cdot (-0,56) \cdot 224}{15} = -541 \text{ t/cm}.$$

Obliczone podobnie wyrazy wolne są: $Ea_{1,0} = -80 \text{ t/cm}$, $Ea_{2,0} = -160 \text{ t/cm}$, $Ea_{3,0} = -265 \text{ t/cm}$, $Ea_{5,0} = -160 \text{ t/cm}$.

Stosując schemat (a) mamy układ równań:

$$\begin{aligned} 55,75X_1 - 11,17X_2 + 0,58X_3 + 0 + 0 - 80 &= 0, \\ -11,17X_1 + 55,75X_2 - 11,17X_3 + 0,58X_4 + 0 - 160 &= 0, \\ 0,58X_1 - 11,17X_2 + 55,75X_3 - 11,17X_4 + 0,58X_5 - 265 &= 0, \\ 0,58X_2 - 11,17X_3 + 55,75X_4 - 11,17X_5 - 541 &= 0, \\ 0,58X_3 - 11,17X_4 - 55,75X_5 - 160 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu daje

$$X_1 = 2,28 \text{ t}, \quad X_2 = 4,64 \text{ t}, \quad X_3 = 8,12 \text{ t}, \quad X_4 = 12,35 \text{ t}, \quad X_5 = 5,27 \text{ t}.$$

Otrzymane wartości są dodatnie, co wskazuje, że siły X_i mają zwroty jak na rys. 4.7. Stosując teraz superpozycję stanu „0” i poszczególnych obciążeń $X_1, X_2, \dots, X_5$ otrzymujemy po złożeniu odpowiedzi (rys. 4.10c, d). Na rysunkach tych zaznaczone również pełnymi strzałkami pionowe składowe oddziaływań wykrzyżowań.

Siła W_i w wykrzyżowaniu wręgi

$$W_i = (-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1})w/2l, \quad (d)$$

a jej składowa pionowa W'_i

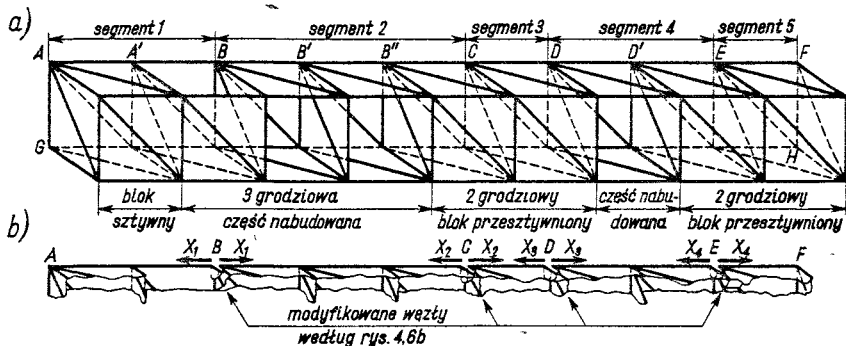
$$W'_i = (-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1})h/2l. \quad (e)$$

Z rozwiązanego przykładu wynika schemat odciążenia, jakie powstaje w dźwigarze głównym, dzięki istnieniu dźwigara pomocniczego. Odciążenie to w odniesieniu do maksymalnych sił w podłużnicach ($40 \text{ t} - 29,8 \text{ t}$)/ $40 \text{ t} \approx 0,25$ jest prawie równe $A''/(A' + A'') \approx 0,23$, tj. procentowemu udziałowi pasa dźwigara pomocniczego w ogólnej sumie przekroju pasów. To spostrzeżenie, które ma głębsze podstawy, może służyć przy szacowaniu wpływu dźwigara pomocniczego, o ile tylko rozpórki i wykrzyżowania wszystkich ścian są mniej więcej jednakowo sztywne.

4.4. Inne przypadki konstrukcji 4-podłużnicowych

Poza omówionymi konstrukcjami powłokowymi (rys. 4.6, 4.7) spotyka się przypadki, gdy statycznie niewyznaczalna kratownica ma budowę mieszaną. W kratownicach statycznie wyznaczalnych (rys. 3.25a, c) podstawową cechą tego typu była obecność jednego

bloku (segmentu) sztywnego w sobie, na którym, jako na podłożu, nabudowana była pozostała 3-ścienna część konstrukcji. W kratownicach statycznie niewyznaczalnych zasada budowy zostaje ta sama, z tą różnicą, że sztywnych w sobie bloków jest więcej niż jeden. Tak na przykład w kratownicy (rys. 4.11a) narysowanej dla prostoty jako pryzmatycznej dają się wyodrębnić trzy sztywne w sobie bloki i dwie nieszttywne w sobie nabudowane części. Dwa z tych bloków są 2-grozdziowe i przeszttywnione na skutek wykrzyżowań



Rys. 4.11. Statycznie niewyznaczalna kratownica o budowie mieszanej
a) szkic konstrukcji; b) układ sił statycznie niewyznaczalnych.

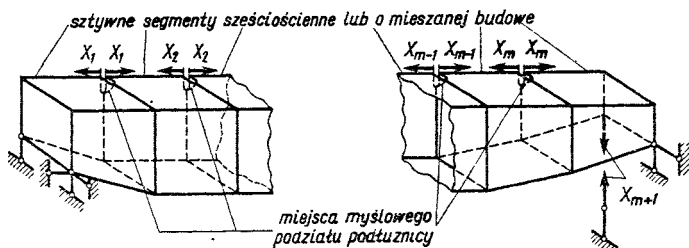
we wręgach C i E . Części nabudowane mogą być jednogrozdziowe jak części między wręgami D i D' lub wielogrozdziowe jak część między wręgami A' i B'' .

Przechodząc do rozwiązania takich kratownic omówimy naprzód kwestię stanu „0”. Dzięki regule zamiany (art. 1.4) siły tego stanu wyznaczamy według wskazówek art. 3.6, przyjmując jakikolwiek schemat statyczny. Jeśli na przykład obciążenie kratownicy wraz z towarzyszącymi reakcjami równoważy się w płaszczyźnie sztywnej ściany $AFHG$, to najprościej będzie założyć, iż w stanie „0” pracują pręty tylko tej ściany. Inne podobne przykłady są podane w art. 4.5. Jako wielkości statycznie niewyznaczalne przyjmujemy jak poprzednio (rys. 4.6b, 4.7) siły X , działające w miejscu fikcyjnego rozcięcia jednej z podłużnic. Jedyna różnica polega na tym, iż poprzednio segmenty były 6-ściennymi kratownicami (rys. 4.7), obecnie zaś mogą mieć one budowę bardziej złożoną. Tak na przykład w kratownicy (rys. 4.11a) można zaproponować podział, w którym segmenty pierwszy AB , drugi BC , czwarty DE mają budowę mieszaną, segmenty trzeci CD i piąty EF są 6-ściennymi kratownicami. Równie dobrze jednak można rozważać inny schemat, w którym segment pierwszy będzie 6-ścienną kratownicą ograniczoną wręgami A i A' , drugi segment o-mieszanej budowie ciągnąć się będzie od wręgi A' aż do C itd. Przyjmując pierwszy wariant podziału i zakładając, iż czwartą podłużnicą fikcyjnie rozdzieloną jest podłużnica AF , otrzymujemy układ sił statycznie niewyznaczalnych $X_1, \dots, X_4$ (rys. 4.11b). Podobnie jak w wielogrozdziowej konstrukcji powłokowej (rys. 4.7) tak i tu działanie każdego układu X obejmuje tylko dwa segmenty, dzięki czemu układ równań $M-M$ ma niezmienną ogólną postać (4.14). Współczynniki i wyrazy wolne tych układów oblicza się znowu z ogólnych wzorów (4.3) i (4.4). Jedyna różnica polega na odmiennym od po-

sił w stanie k podaje rys. 4.13. Wszystkie współczynniki równań M—M są wyrażone za pomocą wzorów (b) art. 4.3, z wyjątkiem podanych poniżej, które ulegają modyfikacji, a mianowicie

$$\left. \begin{aligned} E a_{k,k-1} &= E a_{k,k+1} = -\frac{1}{l^2} \left(\frac{3}{4} \frac{w^3}{A_w} + \frac{b^3 + h^3}{2A_r} + \frac{g^3 + s^3}{2A_s} - \frac{l^3}{2A'} - \frac{l^3}{2A''} \right), \\ E a_{k,k} &= \frac{1}{l^2} \left(\frac{w^3}{A_w} + \frac{b^3 + h^3}{A_n} + \frac{g^3 + s^3}{A_s} + \frac{3l^3}{A'} + \frac{3l^3}{A''} \right), \\ E a_{k-1,k+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Z innym rodzajem zagadnień spotykamy się w przypadku przesuwnej konstrukcji opartych w czterech punktach na podłożu*, przy czym same konstrukcje mogą być typu mostów lub typu wież. Pierwszy wariant konstrukcji był już w zasadzie omówiony (patrz rys. 4.1) i jedynie co wymaga uzupełnienia, to podanie racjonalnego wyboru wielkości statycznie niewyznaczalnych. Jak wykazują przeliczenia, najodpowiedniejszy jest schemat (rys. 4.14), w którym poza znanym już podziałem podłużnicy i wynikającymi stąd nie-



Rys. 4.14. Układ statycznie niewyznaczalnych sił w konstrukcji przeszywnionego przesuwnego mostu

wiadomymi $X_1, \dots, X_m$ występuje jako dodatkowa niewiadoma reakcja czwartej podpory, tj. X_{m+1} . Równania układu M—M dla niewiadomych $X_1, \dots, X_m$ są w zasadzie 7-członowe, przy czym sześć członów jest identycznych jak w (4.14a), a siódmy człon odpowiada sile X_{m+1} , to jest

$$a_{i,i-2} X_{i-2} + a_{i,i-1} X_{i-1} + a_{i,i} X_i + a_{i,i+1} X_{i+1} + a_{i,i+2} X_{i+2} + a_{i,m+1} X_{m+1} + a_{i,0} = 0. \quad (4.15a)$$

Ostatnie natomiast równanie dla niewiadomej X_{m+1} zawiera na ogół wszystkie $(m+1)$ niewiadomych, to jest

$$\sum_{j=1}^{j=m+1} a_{m+1,j} X_j + a_{m+1,0} = 0. \quad (4.15b)$$

Ta postać równań wynika stąd, że w stanie „ $(m+1)$ ” siły wewnętrzne wywołane przez X_{m+1} działają we wszystkich prętach konstrukcji**.

* Konstrukcja, o ile tylko jest prawidłowa, zawsze opiera się na tych punktach, tak że na żadnej z podpór nie ma szczeliny między podłożem a podporą.

** Równania typu (4.15a) dla niewiadomych X_1, X_2 oraz X_{m-1}, X_m ulegają modyfikacji w taki sam sposób jak to opisano w układzie równań (a) (art 4.3). Najprostszy sposób rozwiązania układu równań (4.15), gdy liczba niewiadomych jest duża ($m \geq 7$), polega na dwukrotnym rozwiązaniu układu (4.15a),

Podsumowując podane opisy rozwiązań formułujemy następujące stwierdzenia:

- a) przy rozwiązywaniu wszelkich statycznie niewyznaczalnych konstrukcji 4-podłużnicowych operuje się jednolitym schematem statycznym, w którym jako niewiadome siły X występują oddziaływania w obranej jednej podłużnicy;
- b) szczególne ułatwienie rozwiązań daje zastosowanie reguły zamiany stanu „0”, pozwalającej operować innym schematem dla określenia sił N_p niż schemat dla określenia sił X ;
- c) równania $M-M$ układu, którego rozwiązanie daje wartości sił X , korygujących stan „0” mają w zasadzie postać równań (4.14).

Przykład. Obliczyć zmianę sił, jaką spowoduje usunięcie w konstrukcji (rys. 4.10) wykrzyżowania przedniej ściany trzeciej grodzi, jeśli obciążenie zostało bez zmian.

Rozwiązanie. Usunięcie pręta powodując zmianę schematu statycznego (cztery niewiadome grupy sił X zamiast poprzednich pięciu) (rys. 4.16), zmienia układ równań $M-M$ do postaci:

$$a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + 0 + a_{1,0} = 0,$$

$$a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,4}X_4 + a_{2,0} = 0,$$

$$a_{3,1}X_1 + a_{3,2}X_2 + a_{3,3}X_3 + a_{3,4}X_4 + a_{3,0} = 0,$$

$$a_{4,2}X_2 + a_{4,3}X_3 + a_{4,4}X_4 + a_{4,0} = 0,$$

przy czym grupa sił X_2 odpowiada grupie X_k (rys. 4.13), skąd $k = 2$. Po podstawieniu danych liczbowych mamy z wzorów (b) art. 4.3 (por. przykład z tego art.):

$$Ea_{1,1} = Ea_{3,3} = Ea_{4,4} = 55,75 \text{ cm}^{-1},$$

$$Ea_{3,4} = Ea_{4,3} = -11,17 \text{ cm}^{-1},$$

$$Ea_{2,4} = 0,58 \text{ cm}^{-1}.$$

Z wzorów (a) możemy obliczyć

$$Ea_{2,2}, \quad Ea_{2,1} = Ea_{1,2}, \quad Ea_{1,3} = Ea_{3,1} = 0.$$

Podstawiając do wzoru (a) dane liczbowe z przykładu (art. 4.3) mamy

$$Ea_{2,2} = \frac{1}{200^2} \left(\frac{112^3}{15} + \frac{50^3 + 100^3}{15} + \frac{206^3 + 224^3}{15} + \frac{3 \cdot 200^3}{50} + \frac{3 \cdot 200^3}{15} \right) = 89,25 \text{ cm}^{-1}$$

i podobnie

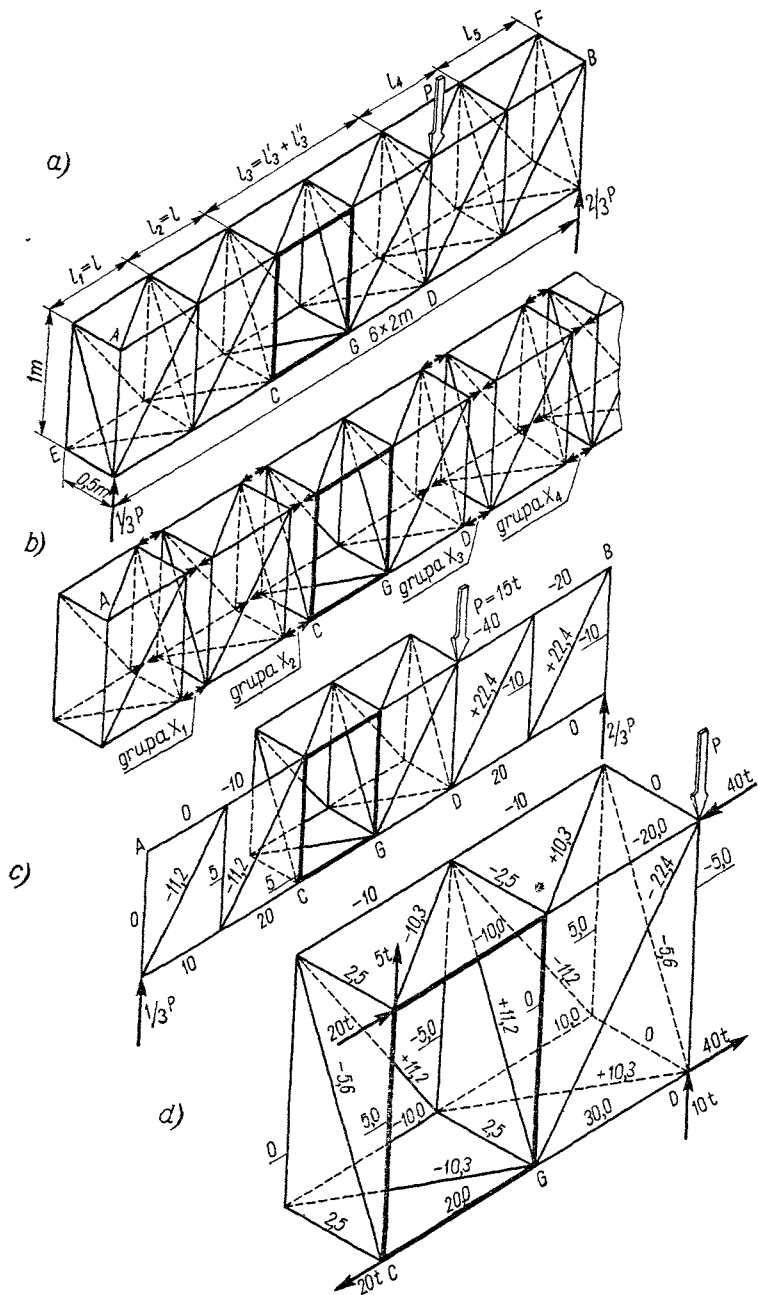
$$Ea_{2,1} = Ea_{1,2} = -10,61 \text{ cm}^{-1}.$$

Przechodząc do analizy stanu „0”, wyodrębniamy układ prętów czynnych przy myślowym przecięciu wykrzyżowań wręg 0, 1, 4 i 5 (rys. 4.16c). W porównaniu z rys. 4.10 układ sił N_p nie zmienia się w czterech zewnętrznych segmentach, natomiast w segmencie odpowiadającym grodziom l'_2 i l'_3 ma wartości podane na rys. 4.16d. Z porównania (rys. 4.10b i 4.16c) widać, że wyrazy wolne odpowiadające X_1 i X_4 nie ulegają zmianie z tym tylko, że zachodzi zmiana numeracji, tj. $(a_{1,0})_{\text{obecne}} = (a_{1,0})_{\text{poprzednie}}$.

Zmianie natomiast ulegają $a_{2,0}$ i $a_{3,0}$, które należy obliczyć, posługując się dla $a_{2,0}$ rys. 4.13 i 4.16c, d, dla $a_{3,0}$ rys. 4.8 i 4.16c, d. Zauważyć należy, że grupa sił X_3 wywołuje siły wewnętrzne tylko w segmencie 4 i sztywnej w sobie części segmentu 3.

Przeliczenia dają $Ea_{2,0} = +471 \text{ t/cm}$, $Ea_{3,0} = -451 \text{ t/cm}$, co w połączeniu z niezmiennymi wartościami $Ea_{1,0} = -80 \text{ t/cm}$, $Ea_{4,0} = -160 \text{ t/cm}$, prowadzi do układu

$$\begin{aligned} 55,75X_1 - 10,61X_2 + 0 + 0 - 80 &= 0, \\ -10,61X_1 + 89,25X_2 - 10,61X_3 + 0,58X_4 + 471 &= 0, \\ -10,61X_2 + 55,75X_3 - 11,17X_4 - 451 &= 0, \\ 0,58X_2 - 11,17X_3 + 55,75X_4 - 160 &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 4.16. Przykład rozwiązania kratownicy osłabionej przez usunięcie wykrzyżowania ściany

pokazana jest poniżej na kilku przykładach 4-podłużnicowych kratownice o prostokątnych (dla uproszczenia rozważań) wręgach.

Jako pierwszy przykład weźmy wielosegmentową kratownicę (rys. 4.9a) o wydłużonej postaci (liczba segmentów $m \geq 5$ przy wymiarach segmentu zbliżonych do sześciu). Zasadniczym spostrzeżeniem opartym na wynikach wielu przeliczeń jest to, iż *praca takiej statycznie niewyznaczalnej konstrukcji tylko nieznacznie różni się od pracy litej belki o przekroju pokrywającym się z poprzecznym przekrojem kratownicy*. W omawianym przypadku (rys. 4.9a) ta pseudobelka jest wspornikowa i zginana jest stałym momentem $M = Pb$. Elementami spełniającymi w tej pseudobelce rolę wzdłużnych pasów są wszystkie cztery podłużnice rozstawione w narożach prostokąta o wymiarach $b \times h$. Wszystkie pozostałe pręty wiążą podłużnice w jedną całość, spełniającą zatem w pseudobelce rolę taką samą, jak w belce litej wzdłużne ścianki względnie poprzeczne żebra i nie są czynne przy przenoszeniu momentu gnącego. Oś pseudobelki pokrywa się więc z linią łączącą środki ciężkości pól przekrojów podłużnic, a moment bezwładności J przekroju pseudobelki jest

$$J = 0,5(A' + A'')b^2, \quad (a)$$

gdzie A' , A'' — pola przekrojów podłużnic parami jednakowych (5, 9), (6, 10) i (7, 11), (8, 12). Obliczając następnie jak dla litej belki siły N' i N'' (rys. 4.9c) w tych podłużnicach, otrzymujemy wartości

$$\left. \begin{aligned} N' &= (M/J)(A'b/2) = PA'/(A' + A''), \\ N'' &= (M/J)(A''b/2) = PA''/(A' + A'') \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

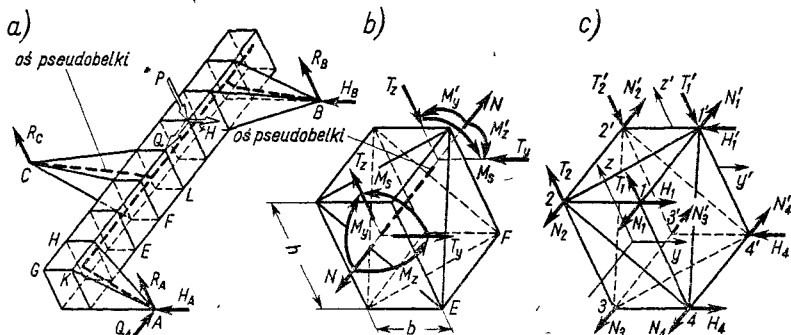
spełniające na odcinku między wręgami (5, ..., 8) i (9, ..., 12) wszystkie warunki równowagi, a zatem nadające się do przyjęcia jako siły stanu „0”.

Pozostaje do omówienia szczególnie ważna rola segmentu 1 (rys. 4.9c). Zadanie jego polega na zamianie obciążenia parą sił P przyłożonych w węzłach 1 i 2 na dwie pary sił N' i N'' . Przy tej zamianie we wszystkich prętach segmentu 1 powstaną siły, których obliczenie sprowadza się do rozwiązania znanego zadania Wagnera (art. 3.3), jeśli tylko za wręgi uważać będziemy ściany (1, 2, 6, 5) i (3, 4, 8, 7). Jak wykazują szczegółowe przeliczenia przyjęcie takiego schematu dla stanu „0” w typowych rozwiązaniach daje w wyniku korekty przez siły X rzędu niewielu procent sił stanu „0”. Na wynik taki wpływa i sam konstruktor. Jeśli bowiem przyjmie on przedstawioną koncepcję pracy ustroju, to jasne jest, że będzie się on starać o wzmocnienie wykrzyżowań i rozpórek segmentu 1 jako zespołu istotnego dla realizacji zamierzonego przekształcenia pary sił P na dwie pary sił N' i N'' . To wzmocnienie, czyli innymi słowy zwiększenie sztywności prętów tego zespołu pociąga za sobą zmniejszenie wyrazów wolnych, a w konsekwencji zmniejszenie sił X . Mamy więc tu przykład sterowania przez konstruktora przebiegu sił wewnętrznych.

Opisany model pseudobelki można uogólnić na inne bardziej złożone ustroje. Z uwagi na odmienną budowę litej belki i kratownicy, jako najmniejszy podstawowy element pseudobelki przyjmujemy segment ograniczony kolejnymi sztywnymi wręgami (rys. 4.18a, b). Płaszczyzny tych wręg utożsamiamy z poprzecznymi przekrojami pseudobelki. Rozpatrując taki wyizolowany segment obciążony oddziaływaniami reszty konstrukcji w przekrojach wręg ograniczających zakładamy, że rozkład oddziaływań N_i normalnych do

płaszczyzny odpowiedniej wregi jest taki sam jak w litej belce. Tak więc dla segmentu EF (rys. 4.18b) wypadkowe obciążenia M_y , M_z , N (lub M'_y , M'_z , N') rozkładamy (rys. 4.18c) na siły N_i (lub N'_i) według elementarnych wzorów

$$\left. \begin{aligned} N_i &= (NA_i/A_c) - (M_y/J_y)(A_i z_i) - (M_z/J_z)(A_i y_i) \\ N'_i &= (N'A'_i/A'_c) - (M'_y/J'_y)(A'_i z'_i) - (M'_z/J'_z)(A'_i y'_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$



Rys. 4.18. Racjonalny dobór stanu „0”

- a) wprowadzenie pseudobelki zastępującej rzeczywistą konstrukcję; b) układ wypadkowych obciążeń segmentu;
 c) rozłożenie wypadkowych obciążeń tegoż segmentu na obciążenia węzłów.

gdzie

osie y , z — główne centralne osie bezwładności przekroju* w płaszczyźnie wregi obejmującego tylko podłużnice,

$A_c = A_1 + \dots + A_4$ — suma pól przekrojów $A_1, \dots, A_4$ wszystkich czterech podłużnic,

J_y, J_z — momenty bezwładności względem osi y i z przekrojów samych tylko podłużnic,

y_i, z_i — współrzędne przekroju podłużnicy i , a dodanie znaczka (') oznacza iż dana wielkość odnosi się do drugiej wregi (F) rozpatrywanego segmentu.

Przechodząc do rozłożenia wypadkowych obciążeń T_y , T_z i M_s (lub T'_y , T'_z , M'_s) na składowe T_1, T_2, H_1, H_2 (lub T'_1, T'_2, H'_1, H'_2) zauważmy, że ich wpływ na siły wewnętrzne jest stosunkowo mały, o ile tylko kratownica ma postać wydłużoną. Bez wielkiego zatem błędu można zaproponować dowolny rozkład tych obciążeń. Jednym z nich jest rozłożenie sił T_z i T_y według prawa dźwigni z dołączeniem do każdego takiego rozkładu połowy momentu M_s . Jeśliby zatem środek ciężkości przekrojów podłużnic znajdował się w punkcie przecięcia przekątnych, to otrzymalibyśmy

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= (T_z/2) + (M_s/2b), & T_2 &= (T_z/2) - (M_s/2b), \\ H_1 &= (T_y/2) - (M_s/2h), & H_2 &= (T_y/2) + (M_s/2h). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Mając tak rozłożone siły możemy rozwiązać segment jako kratownicę statycznie wyznaczalną (art. 3.2 i 3.3) i obliczyć siły w prętach pobocznic oraz obydwóch wreg. Wypadkowe siły w prętach wreg otrzymujemy przez superpozycję wyników rozwiązania dwóch sąsiednich segmentów.

* Na rysunku 4.18b narysowano osie y i z równoległe do boków wreg. Na ogół tak nie jest i położenie tych osi określa się jak dla belek o niesymetrycznym przekroju.

Analogicznie rozpatrujemy segmenty narożne jak GHK (rys. 4.18a). Jedyna różnica w porównaniu z poprzednim przypadkiem (rys. 4.18b, c) polega na tym, iż obciążenia wyizolowanego segmentu działają w przekrojach wręgi H i ściany K nierównoległych do siebie. Stosując więc wzory (4.16) lub (c), przyjmujemy raz za podłużnice pręty takie jak GH (przekrój H) lub GK (przekrój K). To samo dotyczy segmentów krzyżowych jak FL , z tym tylko, iż obciążenie działa na trzech ścianach tego segmentu.

Przedstawione opisy dotyczyły konstrukcji ze sztywnymi w sobie wszystkimi segmentami. W przypadku konstrukcji z segmentami o budowie mieszanej (rys. 4.11a) zasadniczy model pseudobelki zostaje bez zmian. Jedyna dodatkowa wskazówka dotyczy podziału konstrukcji na segmenty. Jak okazuje się z przeprowadzonych obliczeń podział najracjonalniejszy otrzymujemy, gdy części nabudowane (np. $A'B''$) dzielimy mniej więcej na pół i przyłączamy do obydwóch sąsiadujących sztywnych bloków (AA' i $B''C$). Tak więc zaproponowany podział (rys. 4.11b) jest bardziej racjonalny niż podział, w którym jednym z segmentów byłby segment AA' , a drugim $A'C$. Stwierdzenie to staje się oczywiste, jeśli zauważyć, iż podstawą, na której nabudowana jest niesztynna w sobie część $A'B''$, jest w tej samej mierze blok AA' co i $B''C$.

Przykład. Operując wskazówkami (rys. 4.18), wyznaczmy siły w prętach ścian pionowych AB i CD kratownicy (rys. 4.10a). Ponieważ przekroje podłużnic są parami jednakowe, więc oś pseudobelki biegnie na połowie wysokości h , w odległości $bA''/(A'+A'') = 0,115$ m od ściany AB . Zredukowane do tej osi obciążenie siłą $P = 15$ t i reakcjami ($P/3$) oraz ($2P/3$) daje układ wypadkowych sił wewnętrznych (M_y, T_z, M_z) pokazany na rys. 4.19a. Rozkładając następnie te siły według poprzednich wskazówek, otrzymujemy dla jednego z wybranych segmentów (np. trzeciego od wręgi AC) układ oddziaływań, a następnie wartości sił w prętach (rys. 4.19b). Przeprowadzając analogiczne obliczenia dla pozostałych segmentów otrzymujemy wyniki podane na rys. 4.19c. Porównując je z wynikami rozwiązania (rys. 4.10c, d) widzimy, że w prętach należących do segmentów bardziej oddległych od obciążonej wręgi zgodność jest zdumiewająco dobra. W segmentach I i II (od strony lewej) różnice nie ujawniają się w drugiej cyfrze znaczącej, w segmentach III i IV odchylenia w ścianie bezpośrednio obciążonej nie przekraczają 7%. Nieco większe odchylenia zaobserwować można w kratownicy ściany tylnej i tam jednak charakter zmienności jest oddany dość wiernie.

Zaobserwowana w przytoczonym przykładzie (rys. 4.19) duża zgodność wyników obliczeń opartych na modelu pseudobelki z wartościami ostatecznymi wynikającymi z rozwiązania równań $M-M$ potwierdza się w wielu innych zagadnieniach. Daje to podstawę do przyjęcia takich obliczeń jako *metody przybliżonego rozwiązania kratownic statycznie niewyznaczalnych*, o ile tylko dają się one sprowadzić do modelu pseudobelki. Wartość tej metody polega nie tylko na tym, iż daje ona możliwość prawidłowego doboru przekrojów prętów*, lecz także na tym, iż daje ona konstruktorowi dobrą orientację w konsekwencjach, jakie pociąga zastosowanie ustroju statycznie niewyznaczalnego.

* Jak wiadomo z Wytrzymałości Materiałów w zagadnieniach statycznie niewyznaczalnych dobór przekrojów jest kwestią kolejnych przybliżeń. Po wstępnym założeniu sztywności poszczególnych elementów wyznaczamy rzeczywiste wartości sił wewnętrznych (rozwiązanie równań $M-M$), obliczamy naprężenia i korygujemy założone przekroje tak, aby materiał ustroju był dobrze wykorzystany. Ta zmiana sztywności elementów pociąga za sobą konieczność dokonania powtórnych obliczeń sił, naprężeń itd. Na tym tle możliwość trafienia od razu na właściwe wymiary elementów nabiera szczególnego znaczenia.

głoszącego, iż wartość siły W_p w przecie jest zawsze algebraiczną sumą siły N_p i sił X_i zredukowanych w stosunku $n_p^{(i)}$. W zastosowaniu do linii wpływowych jedyną różnicą tkwi w tym, iż N_p oraz X_i są funkcjami położenia jednostkowej siły obciążającej konstrukcję. Zmienność N_p oraz X przedstawiamy zazwyczaj pod postacią oddzielnych linii wpływowych tych wielkości. W rezultacie zmienna wartość W_p , to jest rzędna linii wpływowej siły w przecie p , jest algebraiczną sumą:

- 1) rzędnej wpływowej linii siły w przecie p obliczonej dla stanu „0”
- 2) rzędnych wpływowych linii statycznie niewyznaczalnych sił X mnożonych przez współczynniki równe $n_p^{(i)}$.

Ponieważ zasada superpozycji stosuje się nie tylko do sił, lecz i do innych wielkości fizycznych, przeto podana powyżej definicja słowna bądź wzór (4.7) stanowi ogólną regułę wyznaczania rzędnych linii wpływowych. Przy takim uogólnieniu należy tylko pamiętać o zmianie

fizycznego sensu wielkości N_p i $n_p^{(i)}$. Jeśli zadanie nasze polegało na wyznaczeniu wpływowej linii przemieszczenia danego punktu A w obranym kierunku, to rolę N_p pełniłoby przemieszczenie f_A odpowiadające stanowi „0”, rolę zaś współczynników $n_p^{(i)}$ przemieszczenia $f_A^{(i)}$ tegoż punktu w obranym kierunku wywołane jednostkowymi siłami X_i .

Przykład. Wyznaczyć linie wpływowe sił w prętach (6, 7) i (4, 6) kratownicy płaskiej (rys. 4.20a) zakładając, że $h = 2,60$ m, $\beta = 60^\circ$ oraz pola przekrojów wszystkich prętów są jednakowe $A = 10$ cm², a jednostkowa siła P może się przesuwać po pasie (2, 11).

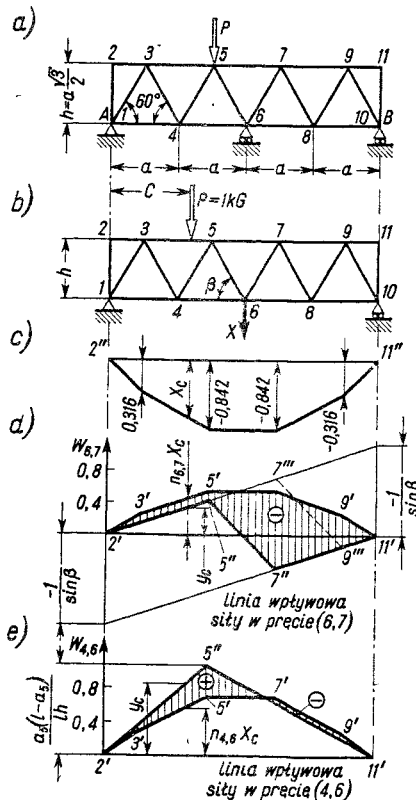
Rozwiązanie rozpoczynamy od wyznaczenia linii wpływowej reakcji X środkowej podpory, którą przyjmujemy jako wielkość statycznie niewyznaczalną (rys. 4.20b). Jak wynika z wzoru (4.2) wartość X jest

$$X = -a_{1,0}/a_{1,1}.$$

Przy przesuwaniu się po pasie górnym siły $P = 1$ kG zmienia się tylko $a_{1,0}$, gdyż $a_{1,1}$ (wzór 4.3) nie zależy od położenia siły P . Przykładając kolejno siłę $P = 1$ kG w węzłach 2, ..., 11 i obliczając za każdym razem siły w prętach N_p [kG/kG] wyznaczamy wydłużenia u_p (wzór c art. 4.1) tych prętów, a następnie odpowiednie wartości $a_{1,0}$ (wzór 4.4). Jeśli siła P przemieszcza się od jednego do drugiego węzła, to wartości $a_{1,0}$ zmieniają się liniowo.

Wynikiem tego etapu rozwiązania jest linia wpływowa (rys. 4.20c), której rzędne dają wartości

siły X w funkcji współrzędnej c . I tak jeśli siła P przyłożona jest kolejno w węzłach 2, 3, 5, ..., to rzędne 0, -0,316, -0,842, ... [kG/kG] są odpowiadającymi wartościami siły X . Drugi etap zadania polega na zastosowaniu wzoru (4.7). Ponieważ przy działaniu $X = 1$ kG siła w przecie (6, 7) jest $n_{6,7} = 0,577$, więc mnożąc rzędne wykresu (rys. 4.20c) przez tę wartość otrzymujemy linię (2', 3'... 11') (rys. 4.20d), do której algebraicznie dodajemy rzędne y_c (linia 2' 5'' 7'' 11') otrzymane według wskazówek art. 2.9 i przedstawiające wartość $N_{6,7}$, gdy $X = 0$. Na tymże wykresie naniesiona jest linia wpływowa siły



Rys. 4.20. Linie wpływowe sił w prętach kratownicy statycznie niewyznaczalnej

w przecie (8, 9), co jest ułatwione przez to, że $n_{8,7} = n_{8,9}$. W tym drugim wykresie nie ulega zatem zmianie linia (2', 3'... 11') a tylko linia (2' 5'' 7'' 11'), która zmienia się na (2' 7''' 9''' 11') (patrz rys. 2.25). Zupełnie podobnie wyznaczamy linię wpływową siły w przecie (4, 6) (rys. 4.20e), dla którego $n_{4,6} = 0,866$.

4.7. Dobór sztywności prętów

Wynikiem rozważań art. 4.1÷4.5 jest możność analizy kratownic, których wymiary i kształt są zadane. Równie ważne jednak jest pytanie jak dobrać przekroje prętów, aby materiał prętów był najlepiej wykorzystany. Dla kratownic statycznie wyznaczalnych odpowiedź na to pytanie jest prosta, gdyż wartości sił w prętach określone są z równań równowagi i nie zależą od sztywności prętów. Dobór przekrojów jest w tych kratownicach czynnością odrębną i można go zawsze dokonać tak, aby naprężenia w prętach miały z góry zadaną wartość, na przykład jedną, jednakową we wszystkich prętach rozciąganych, i drugą, jednakową w prętach ściskanych.

Analogiczne zadanie doboru przekrojów prętów kratownic statycznie niewyznaczalnych *nie może być na ogół rozwiązane*. Innymi słowy nie można dobrać tak przekrojów, aby *naprężenia we wszystkich prętach miały z góry zadaną wartość*. Aby tego dowieść, przypuśćmy, że w kratownicy (rys. 4.2) przez stosowny dobór przekrojów prętów osiągnęliśmy zadane z góry naprężenia σ_{0p} we wszystkich dwunastu prętach, w których działają siły $W_p = N_p + n_p^{(1)} X_1$ (wzór 4.7), z wyjątkiem pręta 13, w którym działa siła X_1 . Wyraźmy teraz warunek, iż w miejscu myślowego przecięcia pręta 13 nie ma względnych przemieszczeń. Zgodnie z wzorem (4.8) i wzorem (d) (art. 4.1) warunek ten wyraża się

$$[\sum (W_p l_p / EA_p) n_p^{(1)}] + (X_1 l_{13} / EA_{13}) = 0 \quad (p = 1, \dots, 12), \quad (a)$$

gdzie $\bar{n}_p = n_p^{(1)}$, $W_{13} = X_1$, $\bar{n}_{13} = n_{13}^{(1)} = 1$. Uwzględniając, że zgodnie z założeniem $W_p / A_p = \sigma_{0p}$ jest z góry zadane, a $X_1 / A_{13} = \sigma_{13}$ jest naprężeniem w przecie 13, mamy z wzoru (a)

$$\sigma_{13} + \sum (\sigma_{0p} n_p^{(1)} l_p / l_{13}) = 0 \quad (p = 1, \dots, 12), \quad (b)$$

przy czym założono, iż $E = \text{const}$. Jak widać przy zadanych z góry σ_{0p} ($p = 1, \dots, 12$), naprężenie σ_{13} nie może być obrane dowolnie, co dowodzi słuszności sformułowanej na początku tezy.

Opisany dowód można uogólnić na przypadek kratownicy wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej (rys. 4.4). Zakładając, że we wszystkich prętach z wyjątkiem przeciętych myślowo (1, 4), (3, 6), (5, 8) i (7, 10) działają naprężenia z góry zadane σ_{0p} i uwzględniając, iż $n_{3,8}^{(1)} = n_{5,8}^{(1)} = n_{7,10}^{(1)} = 0$ (rys. 4.4d), mamy następującą postać warunku ciągłości w przekroju pręta (1, 4)

$$[\sum (W_p n_p^{(1)} l_p / EA_p)] + (X_1 l_1 / EA_1) = 0, \quad (c)$$

gdzie W_p określone jest wzorem (4.7), $l_{1,4} = l_1$, $A_{1,4} = A_1$. Uwzględniając, że $W_p / A_p = \sigma_{0p}$ i oznaczając $X_1 / A_{1,4} = \sigma_1$, mamy

$$\sigma_1 + [\sum (\sigma_{0p} n_p^{(1)} l_p / l_1)] = 0 \quad (d)$$

i ogólnie dla przeszytniającego pręta k

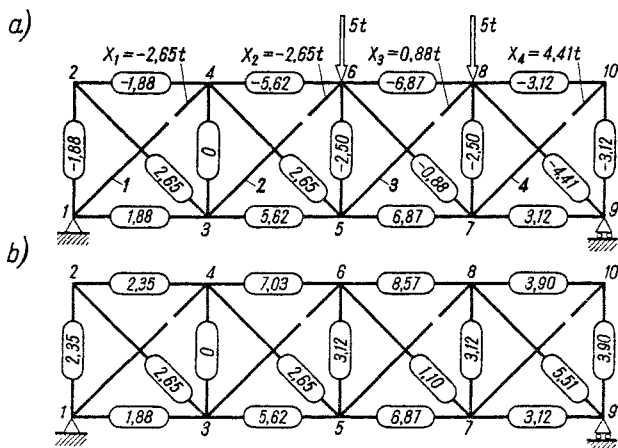
$$\sigma_k + [\sum (\sigma_{0p} n_p^{(k)} l_p / l_k)] = 0, \quad (4.17)$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie pręty z wyjątkiem prętów uznanych za przeszytniające, a wchodzące wielkości są wielkościami algebraicznymi (rozciąganie odpowiada wartościom σ_{0p} lub $n_p^{(k)}$ dodatnim). Jak widać zadane z góry wartości naprężeń można zrealizować we wszystkich prętach z wyjątkiem prętów przeszytniających.

Zastosowanie wzorów (4.17) pokazemy na przykładzie kratownicy (rys. 4.4), gdy $P = 5$ t. Etap pierwszy polega na założeniu *a priori* wartości sił $X_1, \dots, X_4$. Można to dokonać na nieskończenie wiele sposobów. Żądając na przykład, żeby siły w wykrzywieniach danej grodzi były jednakowe i różniły się tylko znakiem, otrzymujemy

$$X_1 = X_2 = -3\sqrt{2}P/8 = -2,65 \text{ t}, \quad X_3 = 0,88 \text{ t}, \quad X_4 = 4,41 \text{ t}.$$

Dla tych wartości sił X oraz znanych obciążeń P , wyznaczamy siły W_p (rys. 4.21a) w prętach ustroju statycznie wyznaczalnego. Zakładając następnie wartości naprężeń σ_{0p} w tychże prętach, dobieramy od-



Rys. 4.21. Dobór sztywności prętów

a) stan sił W_p (w tonach) przy zadanych siłach X ; b) dobór przekrojów, podane liczby oznaczają pole przekroju (cm²)

powiednie ich przekroje* (rys. 4.21b) (II etap rozwiązania). Wreszcie w etapie III obliczamy naprężenia w prętach przeszytniających (wzór 4.17). Dla pręta 1 biorąc z rysunku 4.4d siły $n_p^{(1)}$ otrzymujemy

$$\sigma_1 + \left[\underbrace{(-800)(-0,707)(0,707)}_{\text{pręt } (2, 4)} + \dots + \dots + \dots + \underbrace{(1000)(1,0)(1,0)}_{\text{pręt } (2, 3)} \right] = 0,$$

skąd $\sigma_1 = -1300 \text{ kG/cm}^2$. Analogicznie obliczamy naprężenia w pozostałych przeciętych myślowo prętach, w wyniku czego mamy

$$\sigma_1 = -1300 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_2 = -1300 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_3 = 300 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_4 = 300 \text{ kG/cm}^2$$

* W omawianym przykładzie założono, iż we wszystkich rozciąganych prętach $\sigma'_0 = 1000 \text{ kG/cm}^2$, a w ściskanych $\sigma'_0 = -800 \text{ kG/cm}^2$ (z wyjątkiem prętów 1, 2, 3, 4).

Otrzymane wartości są merytorycznie prawidłowe, gdyż mamy całkowitą zgodność* znaków σ i znaków założonych wartości X w przesztywniających prętach. Z punktu widzenia praktycznego odpowiedź jest niezadowolająca, gdyż pręty 1 i 2 są znacznie przeciążone a pręt 4 niedociążony. Można temu zaradzić przez pewne odstępstwo od pierwotnych założeń. I tak zakładając w prętach (1, 2), (2, 4) i (2, 3) naprężenia równe odpowiednio -600 kG/cm^2 , -600 kG/cm^2 i 700 kG/cm^2 otrzymamy z wzoru (4.17) $\sigma_1 = -800 \text{ kG/cm}^2$. Podobnie zakładając w prętach (7, 8), (8, 10) i (9, 10) naprężenia -600 kG/cm^2 zamiast poprzedniej wartości -800 kG/cm^2 otrzymamy $\sigma_4 = 600 \text{ kG/cm}^2$, co jest już do przyjęcia. Oczywiście tej modyfikacji naprężeń towarzyszy zmiana obranych przekrojów prętów (rys. 4.21b).

Każde z równań (4.17) zawiera tylko jedną niewiadomą, co znacznie ułatwia pracę rachunkową. Tak więc kształtowanie konstrukcji (racjonalny dobór przekrojów) jest zadaniem znacznie łatwiejszym niż analiza danej konstrukcji (równania Maxwella—Mohra). Znajduje ono zastosowanie w tych wszystkich przypadkach, gdy obciążenie jest stałe, bądź gdy z szeregu wariantów obciążeń jeden jest wyraźnie niebezpieczniejszy od pozostałych.

Zadaniem pokrewnym do rozpatrzonego jest racjonalny dobór naprężeń własnych, tak aby przy danym obciążeniu naprężenia we wszystkich prętach ustroju miały zadaną z góry wartość (np. jednakową). Odpowiedź na to daje wzór (e), jeśli tylko założymy istnienie określonych błędów montażowych d_p (wzór (d) art. 4.1). Analogicznie jak poprzednio rozumowanie prowadzi do wzoru

$$\left[\sum (W_p n_p^{(1)} l_p / E A_p) + \sum n_p^{(1)} d_p \right] + (X_1 l_1 / E A_1) + d_1 = 0 \quad (e)$$

lub po prostych przekształceniach

$$\sigma_1 + (E d_1 / l_1) + \left[\sum (\sigma_{0p} n_p^{(1)} l_p / l_1) + \sum (E d_p n_p^{(1)} / l_1) \right] = 0$$

i ogólnie

$$\sigma_k + (E d_k / l_k) + \left[\sum (\sigma_{0p} n_p^{(k)} l_p / l_k) + \sum (E d_p n_p^{(k)} / l_k) \right] = 0, \quad (4.18)$$

gdzie dodatnie d_p odpowiada zwiększeniu długości pręta p w porównaniu z teoretyczną. Jak widać mamy nieograniczoną liczbę wariantów doboru wielkości d_p dla zrealizowania zamierzonego celu. W szczególności można założyć wszystkie $d_p = 0$ z wyjątkiem prętów uznanych za przesztywniające.

4.8. Zadania

1. Jak zmienia się siły w prętach stalowej ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$) kratownicy (rys. 4.22) przymocowanej do nieodkształcalnego podłoża, jeśli przed przyłożeniem obciążenia wstawić pręt AB . Przekroje $A_1 = A_2 = A_3 = A_7 = 20 \text{ cm}^2$, reszta prętów łącznie z prętami AB ma jednakowe przekroje $A = 10 \text{ cm}^2$.

2. Jak zmieniają się siły w prętach kratownicy (rys. 4.22) z wstawionym prętami AB , jeśli pręty 3 i 6 ogrzano o 100°C ? ($\lambda = 12 \cdot 10^{-6} \text{ cm/cm}^\circ\text{C}$).

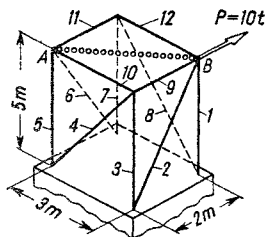
3. W kratownicy (rys. 4.22) z wstawionym prętami AB pręt 3 wykonano za krótki o 1 cm . Jakie naprężenia wstępne pojawiają się w kratownicy?

4. Wyznaczyć wypadkowe poziome przesunięcie punktu B kratownicy (rys. 4.22), przed wstawieniem i po wstawieniu pręta AB .

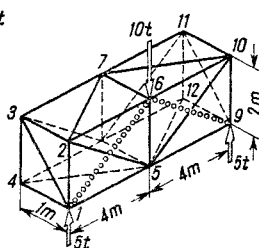
5. W jakim stopniu wpływa na wartości sił wewnętrznych z zadania 1 3-krotne zmniejszenie sztywności pręta AB . Jakie stąd wynikają wnioski praktyczne?

* Niezgodność znaków σ i założonych sił X oznacza, iż przyjęty schemat pracy przesztywniających prętów jest nie do zrealizowania i wymaga modyfikacji.

6. Wynikiem zadania 1 jest stwierdzenie, iż pręty 1 i 2 (rys. 4.22) są przeciążone. Zakładając, iż pręty kratownicy są dostatecznie krępe i że nie ma niebezpieczeństwa ich wybożenia, orzec, czy tego przeciążenia nie można zmniejszyć przez stosowny dobór napięć wstępnych (np. pręt AB o regulowanej długości).



Rys. 4.22.



Rys. 4.23.

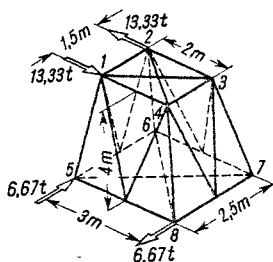
7. Symetryczna względem płaszczyzny (5, 6, 7, 8) symetrycznie obciążona stalowa ($E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm²) kratownica została przed jej obciążeniem wzmocniona prętami (1, 6) i (6, 9) (rys. 4.23). Jak zmieniają się siły w prętach, jeśli przekroje podłużnic (1, 5, 9) i (2, 6, 10) są $A_p = 20$ cm², a dla pozostałych prętów $A = 10$ cm².

8. Kratownicę (rys. 4.2) obciążono w węzłach A i F siłami ściskającymi $P = 20$ t działającymi wzdłuż osi AF. Wyznaczyć siły w prętach.

9. W kratownicy (rys. 4.4) wzmocniono pręty (6, 7), (5, 8), (8, 9) i (7, 10) dając profile o przekroju $A = 20$ cm². Jakie skutki na przebieg sił wewnętrznych spowoduje to wzmocnienie.

10. W kratownicy (rys. 4.4) zmieniono siłę P w węźle 6 na taką samą, lecz działającą do góry. Jak będą siły w prętach?

11. W stalowej ($E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm²), podwójnie symetrycznej kratownicy (rys. 4.24) wzmocniono wręgi (1, 2, 3, 4) i (5, 6, 7, 8) dając dodatkowe wykrzyżowania. Jak zmieniają się na skutek tego siły w prętach, jeśli obciążeniem kratownicy jest moment skręcający $M_s = 20$ tm, a przekroje prętów wręg są jednakowe $A = 10$ cm².



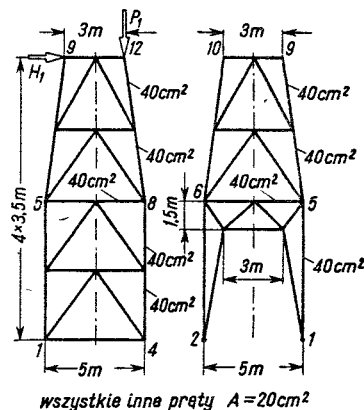
Rys. 4.24.

12. Kratownica (rys. 4.24) obciążona w węźle 3 pionową siłą $P = 10$ t połączona jest w węzłach 5, 6, 7 i 8 z nieodkształcalnym podłożem czterema pionowymi stalowymi prętami o długości $l = 4$ m i przekroju $A = 15$ cm². Wyznaczyć siły w prętach.

13. Podwójnie symetryczną stalową kratownicę (rys. 4.5) o podanych wymiarach (rys. 4.25) obciążono siłami $P_1 = 40$ t, $P_2 = 20$ t, $H_1 = 4$ t, $H_2 = 2$ t (rys. 4.5). Wydzielić grupę obciążeń symetrycznych i obliczyć dla tego obciążenia siły w prętach.

14. Obliczyć siły w prętach kratownicy (rys. 4.25) obciążonej pozostałą po wydzieleniu obciążeń symetrycznych grupą antysymetryczną.

15. Na skutek niedokładności wykonania szyna kół 1 i 4 wieży żurawia (rys. 4.5 i 4.25) jest zwichrowana w stosunku do szyny kół 2 i 3 tak, iż punkt styku koła 3 wypada o 1 cm powyżej płaszczyzny wyznaczonej przez punkty 1, 2 i 4. Jak zmienia się na skutek tej niedokładności pionowe reakcje R_1 , R_2 , R_3 i R_4 z zadania 13.



Rys. 4.25.

16. 3-segmentowy kratowy słup (rys. 4.9) o wymiarach $h = b = 2$ m, jednakowej długości segmentów $l = 3$ m i jednakowych przekrojach wszystkich prętów ($A = 10 \text{ cm}^2$) obciążono w węźle 2 poziomą siłą $H = 5$ t skierowaną wzdłuż pręta (1, 2) w kierunku od 1 do 2. Obliczyć siły w podłużnicach.

17. Kratowy słup z zadania 16 obciążono parą sił $H = 5$ t w węzłach 5 i 8 w płaszczyźnie wręgi (5, 6, 7, 8). Wyznaczyć siły w prętach tej wręgi oraz prętach segmentu środkowego.

18. W kratownicy (rys. 4.10) obciążonej nadal siłą $P = 15$ t podporę z płaszczyzny DB przesunięto na wręgę trzecią licząc w kierunku od A do B, tak że reakcje są obecnie $-P$ i $2P$ zamiast $P/3$ i $2P/3$. Obliczyć siły w prętach przedniej ściany (analogia do rys. 4.10c).

19. Kratownicę (rys. 4.10) obciążono w płaszczyznach wręg AC i BD dwoma parami równoważących się sił pionowych $P = 10$ t przyłożonych w węzłach A, C, B, D. Wyznaczyć siły w prętach pierwszej grodzi (licząc od wręgi AC).

20. W kratownicy (rys. 4.16) usunięto dodatkowo wykrzyżowanie przedniej ściany na odcinku GD. Obliczyć siły w prętach przedniej ściany.

21. Kratownicę (rys. 4.16) z usuniętymi wykrzyżowaniami przedniej ściany na odcinku CG i GD obciążono w płaszczyznach wręg AE i BF dwoma parami równoważących się pionowych sił $P = 10$ t przyłożonych w narożnych węzłach poziomej ściany FBA. Obliczyć siły w prętach podłużnicy AB.

22. Posługując się modelem pseudobelki rozwiązać w sposób przybliżony kratownicę z zad. 16. Wskazówka. Wprowadzić w węźle 3 zerową grupę sił $H' = 2,5$ t i rozdzielić zadanie na dwa: zgięcie dwoma siłami ($H/2$) i H' oraz skręcanie parą sił ($H/2$) = $-H'$.

23. Zakładając, iż w kratownicy (zad. 17) każdy z segmentów pracuje na skręcanie jak jednogrozdziowa izolowana od innych kratownica (art. 3.3), obliczyć siły w prętach środkowego segmentu i porównać wyniki z wynikami zad. 17.

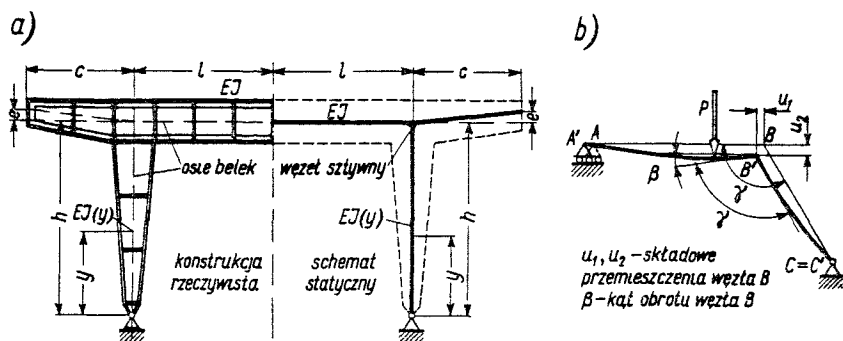
24. Stosując model pseudobelki do kratownicy z rys. 4.19 obliczyć w sposób przybliżony siły w prętach drugiego segmentu licząc od wręgi AC.

25. Stosując model pseudobelki do kratownicy z zad. 18 obliczyć siły w prętach trzeciego segmentu licząc od wręgi AC.

5. RAMY

5.1. Definicje i klasyfikacja

Konstrukcją ramową, w skrócie ramą, nazywamy konstrukcję prętową, w której końce wszystkich lub niektórych prętów łączą się ze sobą w sztywnych węzłach (rys. 5.1a).



Rys. 5.1. Obraz ramy i jej schemat statyczny

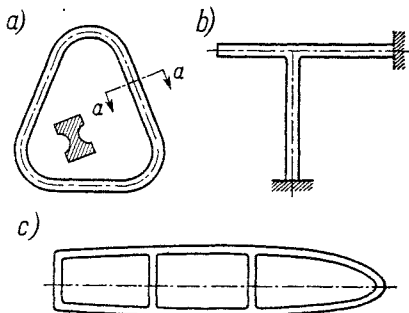
Przy działaniu obciążeń węzły te przemieszczają się tak, że kąty między osiami prętów schodzących się w danym węźle zostają niezmienione (rys. 5.1b).

W zależności od wzajemnego ustawienia osi prętów rozróżniamy *ramy płaskie*, gdy osie wszystkich prętów leżą w jednej płaszczyźnie, tzw. płaszczyźnie ramy, i *ramy przestrzenne*, gdy warunek ten nie jest spełniony. Jeśli w ramie płaskiej jedno z głównych centralnych osi bezwładności przekrojów poprzecznych wszystkich prętów leżą w płaszczyźnie ramy, to ramę nazywamy *ściśle płaską*. Pręty ram płaskich tworzą często zamknięte łańcuchy dająco w wyniku *ramy jednoobwodowe* lub *wielooobwodowe*, przy czym te ostatnie mają najczęściej postać *ram wielooobwodowych jednoszeregowych* (rys. 5.2). Obciążenie działające na ramę płaską może być *płaskie*, gdy wszystkie siły leżą w płaszczyźnie ramy oraz *przestrzenne*, gdy istnieją składowe obciążenia prostopadłe do płaszczyzny ramy.

Drugą podstawą klasyfikacji ram jest metoda ich rozwiązania. Podobnie jak kratownice, tak i ramy dzielą się na *statycznie wyznaczalne* i *statycznie niewyznaczalne*.

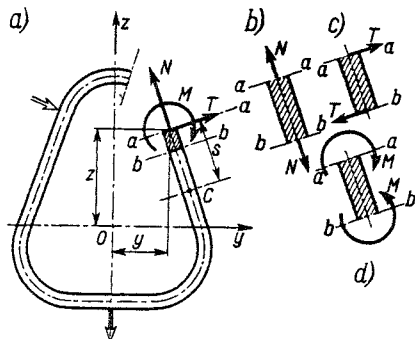
Statyka ram ściśle płaskich płasko obciążonych stanowi treść przeważającej większości zagadnień i z tego powodu celowe jest umowne określenie dodatnich zwrotów sił wewnętrznych N , T i M (rys. 5.3). Tak więc dodatnie siły N powodują rozciąganie wyciętego

myślowo elementu, dodatnie siły T powodują obrót jego zgodnie z ruchem wskazówek zegara i wreszcie momenty M są dodatnie, gdy we włóknach zewnętrznych tego elementu dają naprężenia ściskające. Dodatnie rzędne wykresów N , T i M odkładamy na zewnątrz linii środkowej ramy. Dla momentów zginających M jest ta umowa równoznaczna z od-



Rys. 5.2. Przykłady ram płaskich

a) jednoobwodowa; b) jednoobwodowa z fundamentem jako elementem nieskończenie sztywnym zamykającym obwód ramy; c) wieloobwodowa jednoszeregowa.



Rys. 5.3. Układ sił wewnętrznych w ramie ściśle płaskiej, płasko obciążonej

b), c), d) dodatnie zwroty sił wewnętrznych N , T , M .

kładaniem ich wartości po tej stronie linii środkowej, po której we włóknach ramy powstają naprężenia ściskające od tych momentów.

Położenie poprzecznych przekrojów prętów podajemy bądź względem prostokątnego układu osi y , z , bądź przez określenie współrzędnej s (rys. 5.3) wzdłuż osi ramy od obranego punktu początkowego C .

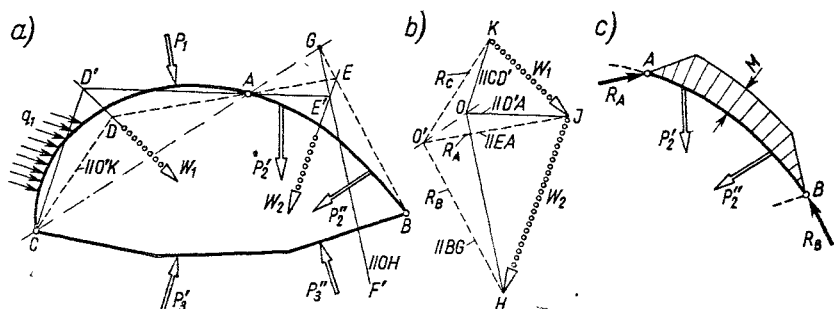
5.2. Ramy płaskie statycznie wyznaczalne

a. *Ramy jednoobwodowe* tego typu stanowią najczęściej układ trzech elementów połączonych przegubowo (rys. 5.4). Rozwiązanie rozpoczynamy od wyznaczenia wzajemnych oddziaływań prętów w przegubach A , B , C . W tym celu zastępując obciążenia działające na prętach AC i AB ich wypadkowymi W_1 i W_2 oraz traktując pręt BC jako podłoże, wyznaczamy dla tych sił wielobok sznurowy $CDEB$ przechodzący* przez trzy dane punkty C , A , B (rys. 5.4a, b). Po wyznaczeniu reakcji R_A , R_B , R_C każdy z prętów ramy rozpatrujemy jako belkę (rys. 5.4c), w której wszystkie obciążenia i reakcje są znane.

b. *Ramy wieloobwodowe szeregowo* (rys. 5.5) stanowią zwielokrotnioną konstrukcję ramy pojedynczej rozpatrzonej poprzednio. Rozpoczynając od prętów 1 i 2 całą resztę konstrukcji na lewo od węzłów 1 i 3 traktujemy jako podłoże. Wyznaczenie wzajemnych oddziaływań w węzłach 1 , 2 i 3 jest powtórzeniem zadania z rys. 5.4. Przechodząc do następnego segmentu wyznaczamy oddziaływania w węzłach 4 , 5 , 6 , przy czym znane

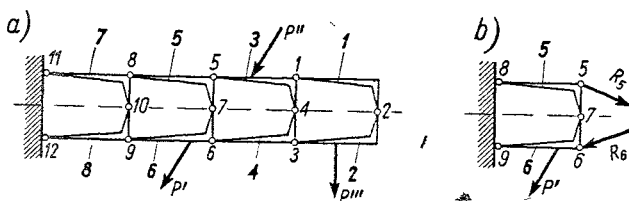
* W tym celu kreślimy naprzód wielobok pomocniczy $CD'E'F'$ przechodzący tylko przez dwa punkty C i A .

już reakcje w węzłach 1 i 3 traktujemy łącznie z siłą P'' jako obciążenie zewnętrzne itd. (rys. 5.5b). Mając wyznaczone te oddziaływania obliczamy siły wewnętrzne w poszczególnych elementach (rys. 5.4c).



Rys. 5.4. Płaska 3-przegubowa rama statycznie wyznaczalna

a) układ sił obciążających ramę, punkt D' – dowolny na linii działania W_1 ; b) konstrukcja wieloboku sił, biegun pomocniczy O z przecięcia $\parallel CD'$ i $\parallel D'A$, punkt G z przecięcia $E'F'$ i $\parallel OH$ z prostą AC ; właściwy biegun O' z przecięcia $\parallel BG$ i $\parallel EA$; $O'K$, $O'I$, $O'H$ – reakcje R_A , R_B , R_C ; c) statyka wyizolowanego przęta AB .

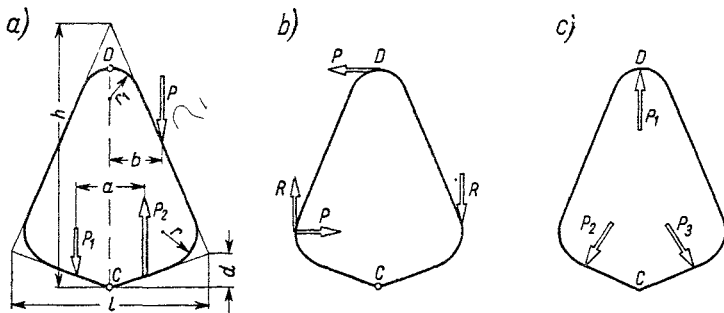


Rys. 5.5. Wieloobwodowa rama jednoszeregowo statycznie wyznaczalna

R_4 , R_4 – oddziaływanie prawej części konstrukcji na segment rozpatrywany.

5.3. Statycznie niewyznaczalne ramy jednoobwodowe ściśle płaskie

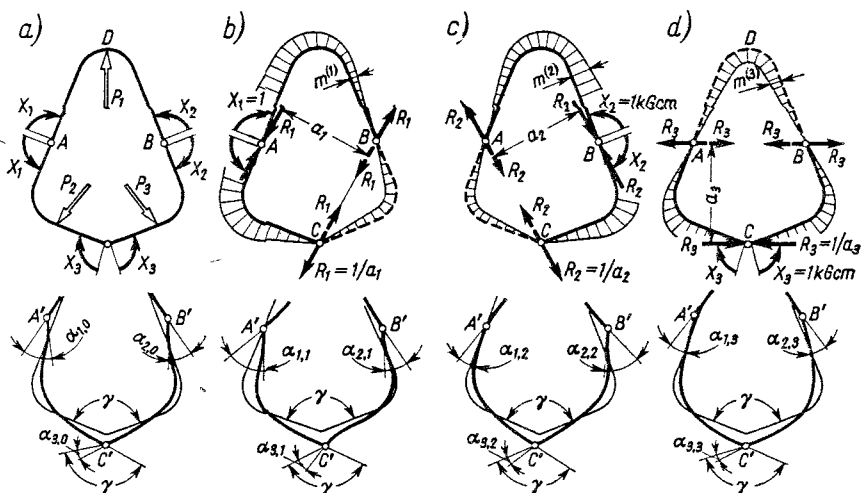
Jeśli jednoobwodowa rama ma mniej niż trzy przeguby lub jest bezprzegubowa (rys. 5.6), to jej rozwiązanie jest zadaniem statycznie niewyznaczalnym. W przypadku



Rys. 5.6. Ramy jednoobwodowe statycznie niewyznaczalne

a) 2-przegubowa – jednokrotnie statycznie niewyznaczalna; b) 1-przegubowa – 2-krotnie statycznie niewyznaczalna; c) bezprzegubowa – 3-krotnie statycznie niewyznaczalna.

beprzegubowej ściśle płaskiej i płasko ociążonej ramy (rys. 5.6c), zadanie to jest 3-krotnie statycznie niewyznaczalne. Jeśli bowiem wprowadzić w niej trzy myślowe przeguby A, B, C (rys. 5.7a), to pierwotna rama zamienia się na rozpatrzoną poprzednio (rys. 5.4) ramę 3-przegubową, z tym tylko, iż w przegubach tych pojawiają się nieznanne na razie



Rys. 5.7. Rozwiązanie bezprzegubowej ramy jednoobwodowej

a) statycznie wyznaczalny schemat statyczny z nieznanymi grupami momentów $X_1, X_2, X_3, \alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \alpha_{3,0}$, — załomy w przegubach A, B, C wywołane siłami P , gdy $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ (stan „0”); b) c) d) stany „1” „2” „3” jednostkowych obciążeń i odpowiadające tym stanom załomy $\alpha_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

grupy momentów X_1, X_2, X_3 przedstawiających wzajemne oddziaływania łączących się ze sobą w danym przegubie prętów. Wartości X_1, X_2, X_3 wyznaczamy z warunku, iż w miejscach myślowych przegubów nie może nastąpić zmiana kąta między osiami prętów. Prowadzi to w rezultacie do trzech równań Maxwella—Mohra

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,2}X_2 + \alpha_{1,3}X_3 &= 0, \\ \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}X_1 + \alpha_{2,2}X_2 + \alpha_{2,3}X_3 &= 0, \\ \alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}X_1 + \alpha_{3,2}X_2 + \alpha_{3,3}X_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

których treść fizyczna jest oczywista (rys. 5.7). Zauważając, iż kąt załomu w danym przegubie jest uogólnioną współrzędną odpowiadającą grupie dwóch równych i przeciwnie skierowanych momentów X , mamy na podstawie art. 1.2 (wzór 1.11) i podanego tam przykładu

$$\alpha_{i,j} = \oint \frac{m^{(i)}m^{(j)}}{EJ} ds \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5.2)$$

gdzie $m^{(i)}, m^{(j)}$ — momenty zginające wywołane jednostkowymi obciążeniami stanów (i) oraz (j) (rys. 5.7bcd). Symbol $\oint$ oznacza całkowanie wzdłuż całego obwodu ramy.

Analogicznie określimy

$$\alpha_{1,0} = \oint \frac{Mm^{(1)}}{EJ} ds, \quad \alpha_{2,0} = \oint \frac{Mm^{(2)}}{EJ} ds, \quad \alpha_{3,0} = \oint \frac{Mm^{(3)}}{EJ} ds, \quad (5.3)$$

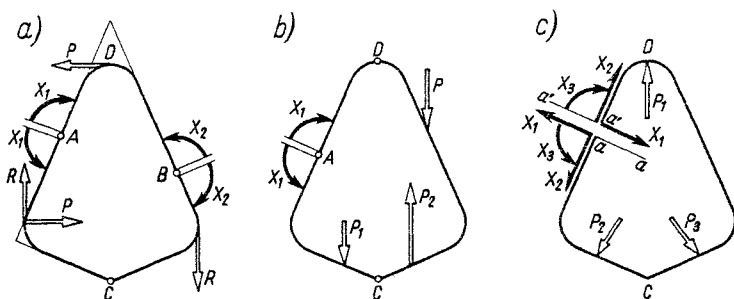
gdzie M — moment zginający w 3-przegubowej ramie wywołany działaniem obciążenia zewnętrznego (rys. 5.7a), gdy $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ (stan „0”).

Po wyznaczeniu X_1, X_2, X_3 obliczamy wypadkowe siły wewnętrzne M_w, N_w, T_w stosując zasadę superpozycji. Jeśli $n^{(i)}, t^{(i)}$ oznaczają odpowiednio siłę wzdłużną i tnącą stanu „i”, a N, T także siły stanu „0” to w wyniku otrzymujemy

$$M_w = M + \sum m^{(i)} X_i, \quad N_w = N + \sum n^{(i)} X_i, \quad T_w = T + \sum t^{(i)} X_i, \quad (5.4)$$

gdzie sumowanie obejmuje stany $i = 1, 2, 3$.

Analogicznie rozwiązujemy ściśle płaskie ramy 1- i 2-przegubowe (rys. 5.8b, a), z tym tylko, iż liczba wprowadzonych myślowo przegubów jest odpowiednio mniejsza, a co



Rys. 5.8. Obiór niewiadomych statycznie niewyznaczalnych

a) rama jednaprzegubowa, A, B — myślowe przeguby; b) rama 2-przegubowa, A — myślowy przegub; c) inny obiór niewiadomych w ramie bezprzegubowej.

za tym idzie mniejsza liczba nieznanów grup momentów X (rys. 5.8). W rezultacie równania ciągłości przemieszczeń (5.1) ulegają modyfikacji, a mianowicie dla ramy 1-przegubowej (rys. 5.8a), mają postać

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,2}X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1}X_1 + \alpha_{2,2}X_2 + \alpha_{2,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

a dla 2-przegubowej (rys. 5.8b)

$$\alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,0} = 0. \quad (5.6)$$

Opisany sposób obioru niewiadomych statycznie niewyznaczalnych nie jest jedyny i może być zastąpiony innym (rys. 5.8c), w którym jako niewiadome występują wzajemne oddziaływania rozciętego myślowo przekroju: siła tnąca X_1 , wzdłużna X_2 i moment gnący X_3 . Rozdzielając ten złożony stan obciążeń na proste stany „0”, „1”, „2” i „3” (analogia do rys. 5.7) możemy znowu napisać równania typu (5.1)

$$\alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,2}X_2 + \alpha_{1,3}X_3 + \alpha_{1,0} = 0,$$

wyrażające ciągłość przemieszczeń* przekroju $a-a$ względem $a'-a'$, przy czym współczynniki $\alpha_{i,j}$ oraz wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ określone są nadal wzorami (5.2) i (5.3), a wypadkowe siły M_w , N_w , T_w wzorami (5.4).

Jak wykazują przeliczenia, pierwszy sposób obioru niewiadomych (rys. 5.7a) jest na ogół bardziej racjonalny niż sposób drugi (rys. 5.8c), gdyż korekta wewnętrznych sił M , N , T stanu „0” przez człony $\sum m^{(i)} X_i$, ... jest z reguły mniejsza przy sposobie I niż przy II. Ponadto sposób I ma tę zaletę, że wszystkie $\alpha_{i,j}$ oraz $\alpha_{i,0}$ równań (5.1) są odpowiednio wymiarowo jednorodne**. Z tych powodów zaleca się jego stosowanie zwłaszcza do ram bezprzegubowych lub 1-przegubowych (rys. 5.6b, c).

W praktycznych obliczeniach, zwłaszcza konstrukcji lotniczych, kształt ramy i obciążenie nie są podane w postaci wzorów, lecz wykresów. Ponadto sztywność EJ jest zmienna. W takich przypadkach współczynniki $\alpha_{i,j}$ i $\alpha_{i,0}$ (wzory 5.2 i 5.3) obliczamy wykreślnie rozwijając łuk s na oś odciętych, podczas gdy na osi rzędnych nanosimy kolejno EJ , $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ i M . Z tych rzędnych wyznaczamy dla szeregu wartości s odpowiadające im wartości wyrażeń podcałkowych: $m^{(1)}m^{(2)}/EJ$, $[m^{(2)}]^2/EJ$, $m^{(2)}M/EJ$ itd. Ten szereg punktów wyznacza krzywe, a pole między tymi krzywymi i osią odciętych daje odpowiednie α . Dla uniknięcia operowania małymi wielkościami, wygodnie jest założyć, że $E = 1 \text{ kG/cm}^2$, co oczywiście nie zmieni toku obliczeń. Ponieważ metody wykreślne nawet przy starannym wykonaniu dają w określeniu współczynników $\alpha_{i,j}$ oraz wyrazów $\alpha_{i,0}$ błędy $\sim 1\div 2\%$, dla otrzymania rezultatu zgodnego z rzeczywistością istotne jest, aby wielkości statycznie niewyznaczalne miały charakter tylko drobnych poprawek. Osiągamy to przez odpowiednie umiejscowienie myślowych przegubów (rys. 5.7a). Rysując mianowicie orientacyjny obraz odkształceń ramy umieszczamy te przeguby w okolicy przewidywanych punktów przegięcia osi ramy.

Podany opis dotyczył najczęściej spotykanego przypadku analizy sił wewnętrznych w ramie wywołanych obciążeniem. Stosunkowo rzadziej spotykamy się z koniecznością analizy sił wewnętrznych wywołanych rozszerzalnością cieplną bądź błędami montażowymi. Ich rozwiązanie sprowadza się do układu równań (5.1), (5.5) lub (5.6), w których $\alpha_{i,j}$ zostają bez zmian (wzory 5.2). Jedyna zmiana dotyczy wyrazów $\alpha_{i,0}$. Jeśli mianowicie element pręta ramy doznał wskutek tych czy innych przyczyn wydłużenia du osi i zmiany pierwotnego kąta ds/ρ o przyrost $d\theta$ (rys. 5.9a), to zgodnie z regułami (art. 1.2, wzór 1) przyrost współrzędnej uogólnionej $\alpha_{i,0}$ jest

$$d\alpha_{i,0} = m^{(i)} d\theta + n^{(i)} du,$$

a całkowita wartość $\alpha_{i,0}$

$$\alpha_{i,0} = \int m^{(i)} d\theta + \int n^{(i)} du, \quad (5.7)$$

gdzie jak poprzednio $m^{(i)}$, $n^{(i)}$ siły wewnętrzne stanu „1”, a dodatnie du i $d\theta$ odpowiadają dodatniej pracy dodatnich $m^{(i)}$ i $n^{(i)}$ (rys. 5.3). Jeśli przyczyną powstania du i $d\theta$ jest ogrzanie elementu pręta w ten sposób, że temperatura zmienia się liniowo wzdłuż wysokości h , to

$$du = \lambda \Delta t_c ds, \quad d\theta = \lambda (\Delta t_w - \Delta t_z) ds/h \quad (a)$$

* Jeśli potraktować przekrój $a'-a'$ jako utwierdzony, to $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ przedstawiają przemieszczenia przekroju $a-a$ w kierunku siły X_1 wywołane odpowiednio jednostkowymi obciążeniami $X_1 = 1 \text{ kG}$, $X_2 = 1 \text{ kG}$, $X_3 = 1 \text{ kGcm}$, a $\alpha_{1,0}$ także przemieszczenie w stanie „0” ($X_1 = X_2 = X_3 = 0$).

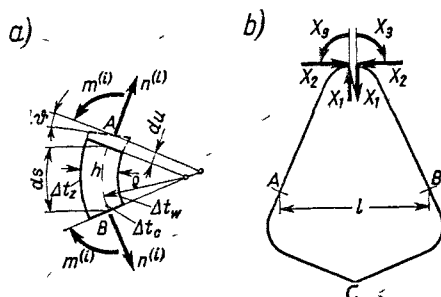
** Wymiar $\alpha_{i,j}$ jest $1/\text{kGcm}$ (radianów na kGcm obciążenia), gdyż wymiar $m^{(i)}$ jest kGcm/kGcm . Podobnie wymiar $\alpha_{i,0}$ jest w radianach $[\text{cm}^\circ]$.

gdzie

$\Delta t_c, \Delta t_z, \Delta t_w$ — przyrosty temperatur odpowiednich włókien (rys. 5.9a),

λ — współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej.

Stosowanie wzoru (5.7) jest niezbędne, gdy $d\delta$ lub du są funkcjami s , w wielu jednak przypadkach wartości $\alpha_{i,0}$ można określić od pierwszego wglądu. Jeśli na przykład w rozciętej myślowo ramie (rys.



Rys. 5.9. Określenie $\alpha_{i,0}$ na skutek wstępnych odkształceń
a) element ramy przed i po wymuszonej deformacji, AB — oś pręta

5.9b) łuk ACB został równomiernie ogrzany, tak że odległość AB zwiększyła się o $\lambda \Delta t l$, to jasne jest, że w punkcie D nastąpią przemieszczenia

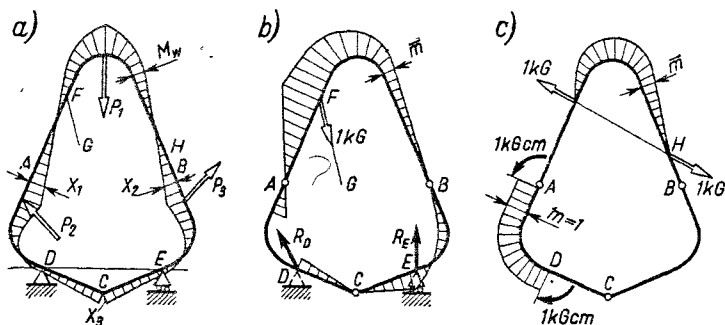
$$\alpha_{1,0} = 0, \quad \alpha_{2,0} = -\lambda \Delta t l, \quad \alpha_{3,0} = 0. \quad (b)$$

Analogicznie w ramie z wprowadzonymi trzema myślowymi przegubami ABC (rys. 5.7a) niedokładność wykonania pręta ADB powodująca zwiększenie AB o Δl spowoduje w przegubach A, B i C zmiany kątów (załomy)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,0} &= +\Delta l \cos \gamma_1 / a_1, & \alpha_{2,0} &= +\Delta l \cos \gamma_2 / a_2, \\ \alpha_{3,0} &= -\Delta l \cos \gamma_3 / a_3, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

gdzie $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — kąty między AB a kierunkiem sił R_1, R_2 i R_3 .

Zagadnienie wyznaczenia odkształceń danej ramy statycznie niewyznaczalnej (rys. 5.10a) sprowadza się do obliczenia odkształceń ramy statycznie wyznaczalnej, w której



Rys. 5.10. Określenie przemieszczeń w ramie jednoobwodowej

a) wypadkowy wykres M_g ramy obciążonej siłami P_1, P_2, D i E fikcyjnymi podporami; b) — jednostkowy układ obciążeń ramy statycznie wyznaczalnej określający przemieszczenie w kierunku FG ; c) inne układy jednostkowych obciążeń.

po określeniu niewiadomych X_1 , X_2 i X_3 działają znane już wypadkowe siły wewnętrzne M_w , N_w i T_w (wzory 5.4). Przypuśćmy, że postawione zadanie polega na wyznaczeniu przesunięcia f w kierunku FG punktu F ramy przy założeniu, że linią odniesienia (podłożem), względem której mierzymy to przemieszczenie, ma być prosta DE z nieruchomym punktem D . Umieszczając w tych punktach podpory obciążamy w punkcie F ramę statycznie wyznaczalną taką jednostkową siłą, dla której szukane przesunięcie jest współrzędną uogólnioną (rys. 5.10b). Jeśli wywołane przez to jednostkowe obciążenie siły wewnętrzne są $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{t}$, to zgodnie z wzorem (1.11) szukane przemieszczenie

$$f = \oint \frac{M_w \bar{m} ds}{EJ} + \oint \frac{N_w \bar{n} ds}{EA} + k \oint \frac{T_w \bar{t} ds}{GA}. \quad (5.8a)$$

Zazwyczaj składnik drugi i trzeci jest bardzo mały w porównaniu z pierwszym (patrz przykład z art. 1.2) i dlatego często można je pominąć otrzymując

$$f \approx \oint \frac{M_w \bar{m} ds}{EJ}. \quad (5.8b)$$

Rozpatrzone zagadnienie należało do typu pierwszego, w którym odkształcenia określamy względem obranego podłoża. Zagadnienia typu drugiego polegają na wyznaczeniu względnych przesunięć jednego punktu osi ramy (np. F) względem drugiego (np. H) (rys. 5.10a). Umieszczając w tych punktach odpowiednie jednostkowe siły (rys. 5.10c) otrzymamy w wyniku znowu wzory (5.8), w których $\bar{m}$ odpowiada działaniu tych sił jednostkowych. Podobnie, jeśli chcemy wyznaczyć względny obrót przekrojów D i A , to odpowiednim obciążeniem jednostkowym jest układ dwóch momentów jednostkowych $\bar{m} = 1 = \text{const}$, przy czym w obu tych przypadkach konstrukcja ramy jest przekształcona na statycznie wyznaczalną (3-przegubowa lub przecięta jak na rys. 5.8c).

5.4. Przykłady rozwiązania ram. Niektóre uproszczenia

Podane w art. 5.3 ogólne wzory zilustrujemy na kilku przykładach.

Przykład 1. Rozwiązać ściśle płaską ramę (rys. 5.11a)

Rozwiązanie. Traktując podłoże AD jako nieskończenie sztywny pręt sprowadzamy zadanie do rozwiązania ramy jednoobwodowej, którą zamieniamy na 3-przegubową przez wprowadzenie myślowych przegubów w punktach A , B i D (rys. 5.11b). Układ obciążeń z rysunku 5.11b rozdzielamy na stany „0”, „1”, „2” i „3” i wyznaczamy dla każdego przypadku wykresy M i $m^{(i)}$ (rys. 5.13c, d, e, f) pomijając przy tym nieskończenie sztywny pręt AD , w którym przebieg momentów nie ma żadnego znaczenia ($EJ_{AD} = \infty$). Zakończywszy w ten sposób pierwszy etap rozwiązania, przechodzimy do określenia współczynników $a_{i,j}$ oraz wyrazów wolnych $a_{i,0}$ (drugi etap rozwiązania). Posługując się regułą (rys. 1.9) i uwzględniając znaki $m^{(i)}$ mamy po wprowadzeniu oznaczeń $\xi_1 = Jh/J_1l$, $\xi_2 = Jh/J_2l$, $B = [1 - (6a^2/l^2)](ql^2/24)$

$$a_{1,1} = \frac{h}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ_1} + \left(\frac{-l}{2}\right) \left(\frac{-2}{3}\right) \frac{1}{EJ} + \left(\frac{-h}{2}\right) \left(\frac{-2}{3}\right) \frac{1}{EJ_2} = \frac{l}{3EJ} (1 + \xi_1 + \xi_2),$$

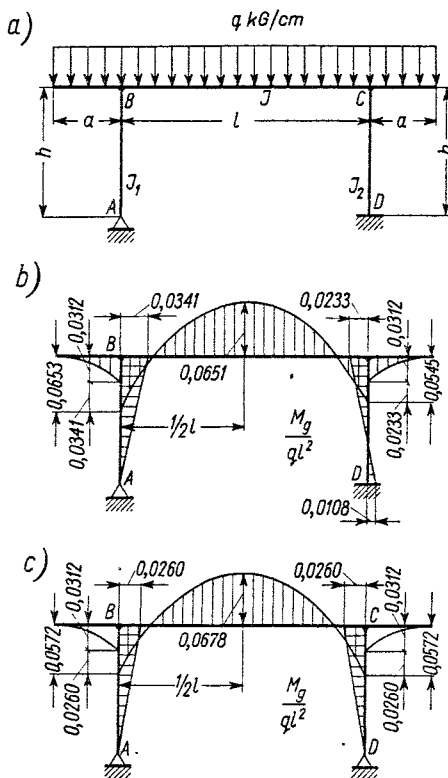
$$a_{1,2} = \frac{h}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{EJ_1} + \left(\frac{-l}{2}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ} + \left(\frac{-h}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \frac{1}{EJ_2} = \frac{l}{6EJ} (\xi_1 - 3 - 2\xi_2),$$

$$a_{1,0} = \left(\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l - \frac{qa^2}{2} l\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{EJ} = -\frac{l}{EJ} B.$$

W przypadku, gdy $l = 2h = 4a$, $J = 2J_1 = 4J_2$, parametry $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$, mamy po uproszczeniach układ równań (5.1)

$$\begin{aligned} 1,333X_1 - X_2 - 1,333X_3 - B &= 0, \\ -X_1 + 2X_2 + 1,500X_3 + 2B &= 0, \\ -1,333X_1 + 1,500X_2 + 2,333X_3 + B &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązanie $X_1 = 0,437B$, $X_2 = -1,250B$ i $X_3 = 0,625B$ daje przebieg momentów (rys. 5.11g) (III etap rozwiązania). Jak widać, ekstremalne wartości M_w w ustroju statycznie niewyznaczalnym są mniejsze niż w stanie „0”. Otrzymany powyżej układ równań pozwala prześledzić zmianę momentów, gdy końce nóg są unieruchomione przegubowo. Jeśli w punkcie A mamy przegub (rys. 5.12a), to kasując pierwsze równanie wystarczy w pozostałych założyć $X_1 = 0$. Rozwiązanie (rys. 5.12b) wykazuje

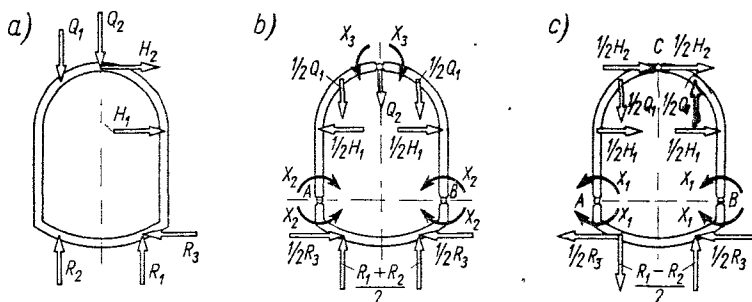


Rys. 5.12. Rozwiązanie ramy z rys. 5.11 przy zmianie podparcia

na głównej poziomej belce minimalne różnice w porównaniu z poprzednim. W przypadku obydwóch przegubowych podpór A i D kasujemy równania pierwsze i trzecie, a do równania drugiego podstawiamy $X_1 = X_3 \equiv 0$, $X_2 = -B$, przy czym znowu ekstremalny moment w poziomej belce BC ulega tylko nieznacznej zmianie (rys. 5.12c).

zupełnie analogicznie i w tych samych etapach rozwiązujemy jednoobwodowe ramy przy obciążeniu schematu statycznego według rysunku 5.8c.

Ogólną metodę rozwiązywania ram jednoobwodowych można znacznie uprościć, gdy rama ma oś symetrii (rys. 5.13a). Rozdzielając obciążenie na symetryczne i antysymetryczne (rys. 1.15) rozwiązujemy każde z nich oddzielnie, a wynik końcowy jest superpozycją obydwóch stanów składowych.



Rys. 5.13. Rozwiązanie ramy symetrycznej

a) układ obciążeń; b) symetryczna część obciążeń i układ grup momentów statycznie niewyznaczalnych; c) antysymetryczna część obciążeń i układ momentów statycznie niewyznaczalnych.

Jeśli obranym schematem statycznie wyznaczalnym (stan „0”) jest konstrukcja trójpřegubowa, to myślowe przeguby wprowadzamy tak, aby jeden z nich leżał na osi symetrii, podczas gdy dwa pozostałe umieszczamy symetrycznie (rys. 5.13b, c). Statycznie niewyznaczalny układ grup momentów rozdzielamy na dwa układy, z których pierwszy (rys. 5.13b) odpowiada obciążeniu symetrycznemu i charakteryzuje się jednakową wartością grup X_2 w myślowych przegubach A i B. Wartości X_2 i X_3 wyznaczamy z równań

$$\left. \begin{aligned} a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,0} &= 0, \\ a_{3,2}X_2 + a_{3,3}X_3 + a_{3,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.9a)$$

wyrażających, iż suma całkowitych i jednakowych, z uwagi na symetrię, załomów w przegubach A i B (I równanie) i całkowity załom w górnym przegubie (II równanie) są równe zeru. Drugi układ momentów X_1 (rys. 5.13c) odpowiadający obciążeniu antysymetrycznemu można określić z równania

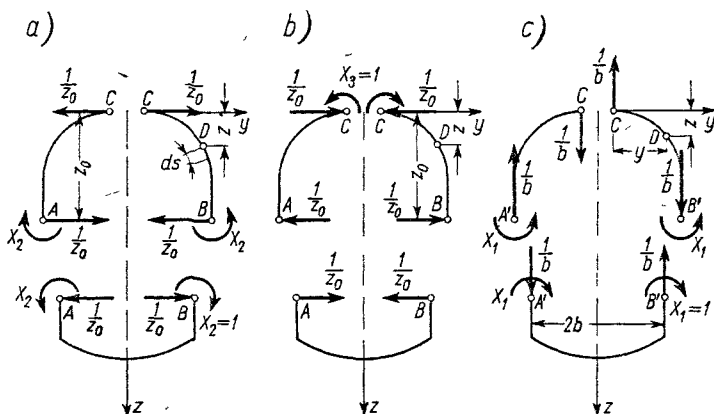
$$a_{1,1}X_1 + a_{1,0} = 0 \quad (5.9b)$$

wyrażającego, iż suma całkowitych i jednakowych co do wartości załomów w przegubach A i B jest równa zeru. Wartości $a_{i,j}$ oraz $a_{i,0}$ określamy nadal ze wzorów (5.2) i (5.3) z tym tylko, iż w stanach „2” i „3” obciążenie jednostkowe składa się nie z jednej grupy momentów (rys. 5.7), lecz z dwóch grup momentów jednostkowych (rys. 5.14).

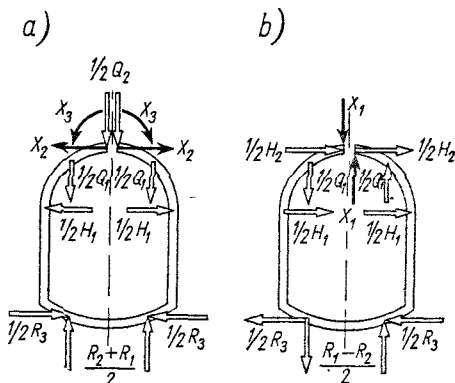
Jeśli obranym schematem statycznym jest schemat przedstawiony na rys. 5.8c, to w przypadku ramy symetrycznej (rys. 5.13a) myślowy przekrój prowadzimy na osi symetrii. Niewiadome X_1 , X_2 i X_3 dzielą się na dwie grupy symetryczną i antysymetryczną (rys. 5.15a, b), od siebie nawzajem niezależne. Układ symetryczny jest przy tym 2-krotnie statycznie niewyznaczalny, a układ antysymetryczny 1-krotnie (rys. 5.16). Jeśli na osi symetrii działają obciążenia (np. Q_2 i H_2), to każde z nich rozdzielamy na połówki. Wartości

X_2 i X_3 wyznaczamy z równań (5.9a), a X_1 z (5.9b) wyrażających tym razem ciągłość przemieszczeń w myślowym przekroju.

Jak łatwo zauważyć, w obu schematach obliczeniowych (rys. 5.13b, c i rys. 5.15) wykresy $m^{(i)}$ oraz M (stan „0'”) mają symetryczny względnie antysymetryczny przebieg. Wynika stąd, że obliczenia $a_{i,j}$ oraz $a_{i,0}$ można dokonać tylko dla połowki ramy.



Rys. 5.14. Określenie stanów jednostkowych obciążeń
a) stan „2” momenty $m^{(2)}$; b) stan „3” momenty $m^{(3)}$; c) stan „1” momenty $m^{(1)}$.



Rys. 5.15. Inny układ sił statycznie niewyznaczalnych dla ramy symetrycznej

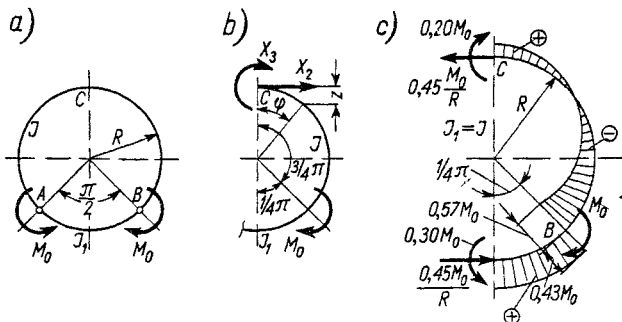
Przykład 2. Stosując schemat stanu „0'” według rys. 5.8c rozwiązać bezprzegubowy pierścien (rys. 5.16a) obciążony dwoma momentami M_0 .

Rozwiązanie. Wobec symetrii ramy i symetrii obciążenia, zadanie sprowadza się do przypadku (rys. 5.15a) z niewiadomymi X_2 i X_3 . Prowadząc zatem przekrój w punkcie C (rys. 5.16b), wyznaczamy ze wzorów (5.2) i (5.3) wartości $a_{i,j}$, $a_{i,0}$ układu równań (5.9a), przy czym jako zmienną niezależną obieramy kąt φ . Dla uproszczenia wzorów wprowadzamy $\xi = J/J_1$ oraz $R/8EJ = B$, w rezultacie czego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha_{2,2} &= \int_0^\pi \frac{z^2 ds}{EJ} = \int_0^{3\pi/4} \frac{R^2(1-\cos\varphi)^2 R d\varphi}{EJ} + \int_{3\pi/4}^\pi \frac{R^2(1-\cos\varphi)^2 R d\varphi}{EJ_1} = \\ &= BR^2[3\pi(3+\xi) - 2(4\sqrt{2}+1)(1-\xi)] \\ \alpha_{3,3} &= \int_0^\pi \frac{ds}{EJ} = \int_0^{3\pi/4} \frac{R d\varphi}{EJ} + \int_{3\pi/4}^\pi \frac{R d\varphi}{EJ_1} = 2\pi B(3+\xi), \end{aligned}$$

i podobnie

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3} &= 2BR[\pi(3+\xi) - 2\sqrt{2}(1-\xi)], \quad \alpha_{3,0} = 2M_0RB\xi(\pi+2\sqrt{2}), \\ \alpha_{3,0} &= 2\pi M_0B\xi. \end{aligned}$$



Rys. 5.16. Przykład liczbowy

Liczbowe rozwiązanie równań (5.9a) można przeprowadzić znając wartość J/J_1 . Jeśli $J = J_1$, to $\xi = 1$ i wtedy po uproszczeniu równania są

$$\begin{aligned} 6\pi X_2 R + 4\pi X_3 + M_0(\pi + 2\sqrt{2}) &= 0, \\ 4X_2 R + 4X_3 + M_0 &= 0, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$X_2 R = -M_0\sqrt{2}/\pi, \quad X_3 = M_0(4\sqrt{2} - \pi)/4\pi.$$

Wypadkowy wykres M_w (rys. 5.16c) określony wzorem (5.4) wykazuje istotną rolę jaką w usztywnieniu krótszego łuku AB odgrywa dłuższy łuk ACB . Aby się o tym dodatkowo przekonać, obliczmy na przykład zbliżenie się punktów A i B w przypadku, gdy łuk ACB jest przecięty oraz gdy jest on złączony. W tym celu w punktach A i B statycznie wyznaczalnej (przeciętej myślowo) ramy przykładamy dwie siły jednostkowe (porównaj rys. 5.10c) dające w dowolnym przekroju na łuku AB moment $\bar{m}$

$$\bar{m} = -R[\cos\varphi + (\sqrt{2}/2)],$$

gdzie φ nadal mierzymy od punktu C ($\cos\varphi < 0$). Stosując teraz wzór (5.8b) mamy w przypadku pierwszym

$$f_1 = 2 \int_{3\pi/4}^\pi M_0 \bar{m} ds / EJ = M_0 R^2 (4 - \pi) \sqrt{2} / 4 EJ = 0,304 M_0 R^2 / EJ,$$

gdyż w przeciętym w C pierścieniu moment na łuku AB jest stały i równy M_0 . W przypadku drugim, gdy zgodnie ze wzorem (5.4) wypadkowy moment M_w na odcinku AB jest

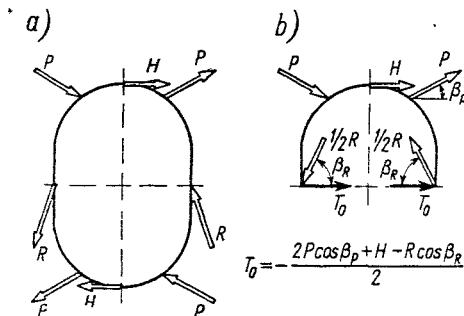
$$M_w = M_0 + X_2 R(1 - \cos\varphi) + X_3 = M_0[0,75 + (\sqrt{2} \cos\varphi/\pi)],$$

to zastosowanie wzoru (5.8b) daje w wyniku

$$f_2 = 2 \int_{3\pi/4}^{\pi} M_w \bar{m} ds / EJ = M_0 R^2 [8(\pi + 1) - 3\pi^2] \sqrt{2} / 16\pi EJ = 0,097 M_0 R^2 / EJ,$$

a więc przeszło 3-krotnie mniejszą wartość. Dodatni znak f_1 i f_2 wskazuje, iż w obu przypadkach następuje zwiększenie odległości AB (siły jednostkowe przyłożone na zewnątrz jak na rys. 5.10c).

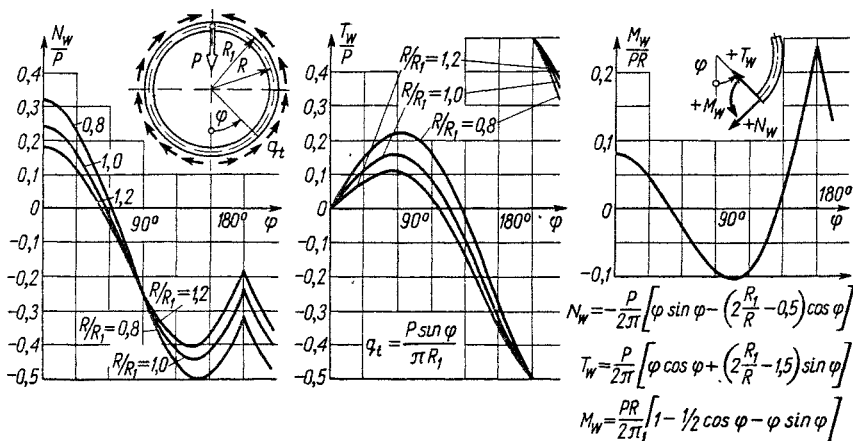
Osiągnięte uproszczenia wynikały z symetrii ramy. Jeszcze dalsze ułatwienie rozwiązań otrzymujemy, gdy rama jest podwójnie symetryczna, a obciążenia antysymetryczne względem obydwu osi (rys. 5.17a). Wykorzystując zasadę jednoznaczności rozwiązania



Rys. 5.17. Podwójnie symetryczna rama przy podwójnie antysymetrycznym obciążeniu

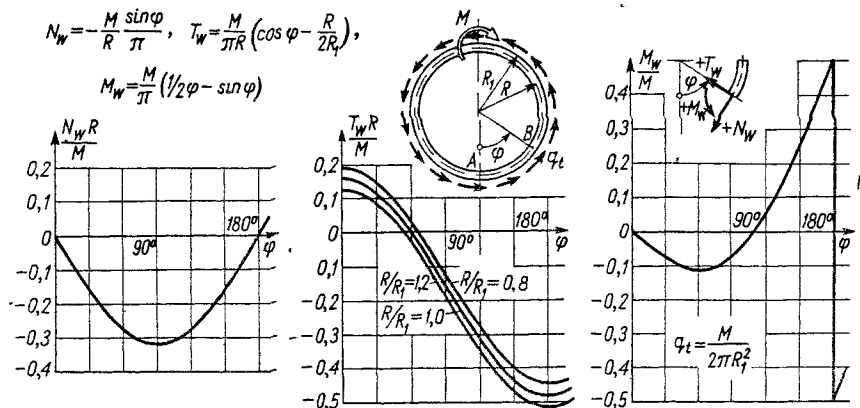
(art. 1.5), siły T_0 w przekroju na osi symetrii otrzymujemy z równania równowagi rzutów na tę oś. Mając siły T_0 obliczamy siły wewnętrzne jak dla konstrukcji statycznie wyznaczalnej.

Z uwagi na zastosowania praktyczne, zwłaszcza w konstrukcjach cienkościennych, na rys. 5.18÷5.20 podano wyniki dla niektórych ram kołowych, w których obciążenie

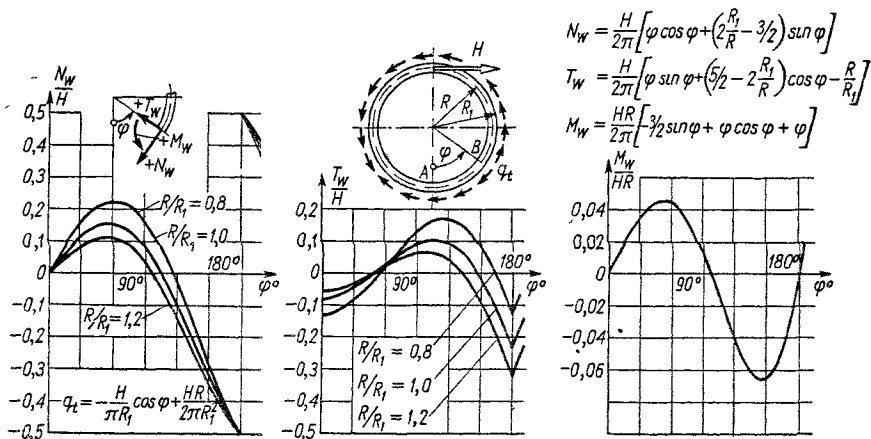


Rys. 5.18. Wypadkowe siły wewnętrzne M_w , N_w , T_w w pierścieniu obciążonym siłą P zrównoważoną przez $q_t = P \sin \varphi / \pi R_1$

skupionymi siłami bądź momentami jest z reguły zrównoważone stycznym do obwodu obciążeniem ciągłym q_t . Obciążenie to jest zmienne wzdłuż obwodu i działa na ogół na promieniu $R_1 \neq R$, co jak widać wpływa na wartości tylko niektórych sił wewnętrznych



Rys. 5.19. Wypadkowe siły wewnętrzne M_w , N_w , T_w w pierścieniu obciążonym momentem M zrównoważonym przez $q_t = M/2\pi R_1^2$

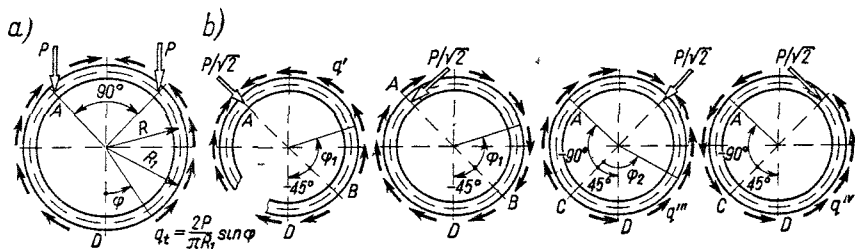


Rys. 5.20. Wypadkowe siły wewnętrzne M_w , N_w , T_w w pierścieniu obciążonym siłą H zrównoważoną przez $q_t = (HR/2\pi R_1^2) - (H \cos \varphi / \pi R_1)$

(T_w), nie wpływają natomiast na przebieg M_w . Wykresy te można wykorzystać do rozwiązywania bardziej złożonych zadań, jeśli rozłożyć te zadania na proste i zastosować superpozycję.

Jeśli na przykład chcemy obliczyć moment gnący w przekroju B (rys. 5.16a) na łuku BC , to wprowadzając zerową grupę obciążeń ciągłych $q_t = M_0/2\pi R^2 - q_t$ rozkładamy to zadanie na dwa

zadania proste (rys. 5.19) z obciążeniem $M' = M_0$ i $M'' = -M_0$. Utozsamiając teraz punkt B z punktem przyłożenia M_0 , mamy z rys. 5.19 moment gnący $M'_w = -0,50 M_0$ odpowiadający pierwszemu zadaniu składowemu. W drugim zadaniu składowym, gdy $M'' = -M_0$ i punkt przyłożenia jest w A , punkt B odpowiada współrzędnej $\varphi = -90^\circ$ skąd z wykresu (rys. 5.19) $M''_w = -0,07 M_0$, a wypadko-



Rys. 5.21. Rozkład złożonego zadania na proste

wy moment $M_w = M'_w + M''_w = -0,57 M_0$ jest zgodny z poprzednim wynikiem (rys. 5.16c). Podobnie w bardziej złożonym przypadku (rys. 5.21a), po wprowadzeniu obciążeń stycznych

$$\left. \begin{matrix} q' \\ q'' \end{matrix} \right\} = \frac{P}{\pi R_1 \sqrt{2}} \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right), \quad \left. \begin{matrix} q''' \\ q^{IV} \end{matrix} \right\} = \pm \frac{P}{\pi R_1 \sqrt{2}} \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \mp \frac{PR}{2\sqrt{2} \pi R_1^2},$$

o wypadkowej równej q_t , rozkładamy dane zadanie na cztery zadania proste (rys. 5.21b). Jeśli teraz chcemy obliczyć moment w przekroju A , to odczytując z wykresów (rys. 5.18, 5.20) wartości dla $\varphi_1 = 180^\circ$ i $\varphi_2 = -90^\circ$

$$M' = 0,240PR/\sqrt{2}, \quad M'' = 0, \quad M''' = -0,092PR/\sqrt{2}, \quad M^{IV} = -0,010PR/\sqrt{2}$$

otrzymujemy wypadkowy moment $M_w = M' + \dots + M^{IV} = 0,138 PR/\sqrt{2}$. Analogicznie siłę wzdłużną w przekroju $D(\varphi_1 = -45^\circ, \varphi_2 = 45^\circ)$ wyznaczamy z odpowiednich wykresów (biorąc np. $R_1 = 1,25 R$)

$$N' = 0,14P/\sqrt{2}, \quad N'' = 0,20P/\sqrt{2}, \quad N''' = 0,14P/\sqrt{2}, \quad N^{IV} = 0,20P/\sqrt{2},$$

skąd siła wypadkowa

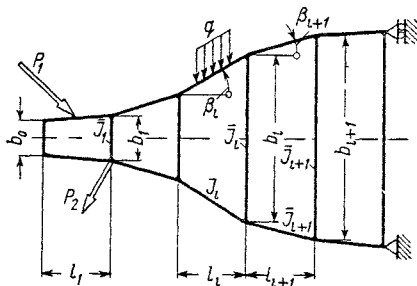
$$N_w = N' + \dots + N^{IV} = 0,68P/\sqrt{2}.$$

5.5. Symetryczne wieloobwodowe ramy płaskie płasko obciążone

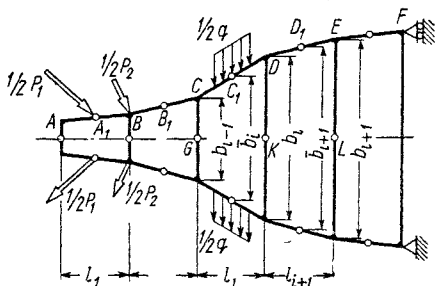
W niektórych konstrukcjach (ramy samochodów, wieże żurawi itp.) ustrój nośny ma postać symetrycznej wieloobwodowej ramy (rys. 5.22). Analizę takich konstrukcji przy płaskim ich obciążeniu przeprowadzamy rozpatrując oddzielnie działanie składowych antysymetrycznej i symetrycznej danego obciążenia, a następnie stosując superpozycję wyników (patrz art. 1.5). Ponadto stosujemy uproszczenie, zakładając nieodkształcalność prętów ramy na działanie sił wzdłużnych.

W przypadku obciążenia antysymetrycznego, ustrój statycznie wyznaczalny otrzymujemy przez wprowadzenie myślowych przegubów w środkach wszystkich przęseł podłużnie oraz na osi symetrii we wszystkich rozpórkach z wyjątkiem jednej (rys. 5.23). Siły wewnętrzne w takim ustroju (stan „0'”) dla odcinka ramy między kolejnymi myśłowymi przegubami podłużnie wyznaczamy tak, jak pokazano na rys. 5.24, gdzie siły

H , T , R są oddziaływaniami w przegubach, M , Q — wypadkowym momentem gnącym i siłą tnącą działającymi z lewej (M_i , Q_i), bądź z prawej strony (M_{i+1} , Q_{i+1}) rozpatrywanego odcinka ramy. Mając siły H , T , R , obliczamy z kolei przebieg momentów gnących (rys. 5.24b), sił wzdłużnych i tnących.

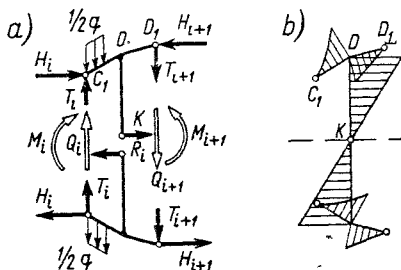


Rys. 5.22. Szkic i oznaczenia konstrukcji



Rys. 5.23. Stan „0” przy obciążeniu antysymetrycznym

Jako niewiadome* statycznie niewyznaczalne obierzmy grupy momentów X (rys. 5.25a). Działanie jednej z takich grup na przykład X_i (rys. 5.25c) ogranicza się wyłącznie do prętów segmentu i łącznie z poprzeczkami ograniczającymi ten segment. Wynika



Rys. 5.24. Określenie reakcji w stanie „0”

$$H_i = M_i/b_i, \quad T_i = Q_i/2, \quad H_{i+1} = M_{i+1}/b_{i+1}, \quad T_{i+1} = Q_{i+1}/2.$$

stąd, że na ciągłość przemieszczeń w przegubie podłużnicy segmentu wywierają wpływ tylko grupy momentów X_{i-1} , X_i i X_{i+1} . W rezultacie równanie M—M ma postać

$$a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,0} = 0, \quad (5.10)$$

gdzie

$a_{i,i}$ — podwojony załom myślowego przegubu podłużnicy segmentu i wywołany grupą momentów $X_i = 1$ kGem,

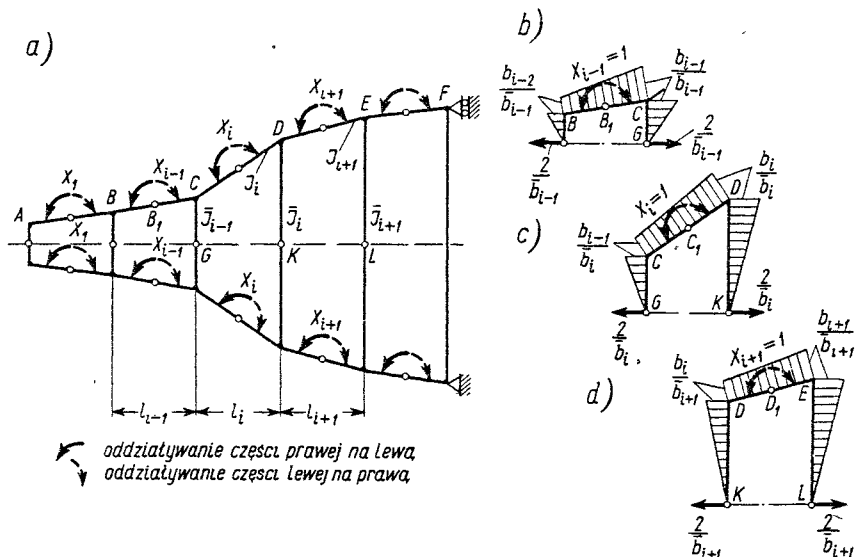
$a_{i,i-1}$ — podwojony załom tejże podłużnicy wywołany grupą momentów $X_{i-1} = 1$ kGem itd.

* Z uwagi na symetrię konstrukcji i antysymetrię obciążenia momenty w przegubach poprzeczek są równe zeru, a w przegubach podłużnicy działają antysymetrycznie.

Obliczenie współczynników α , uwzględniając tylko odkształcenia od momentów zginających, przeprowadzamy według reguł art. 1.2. W wyniku otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i-1} &= -(b_{i-1}^2/\bar{b}_{i-1}\bar{b}_i)\eta_{i-1}, & \alpha_{i,i+1} &= -(b_i^2/\bar{b}_i\bar{b}_{i+1})\eta_i, \\ \alpha_{i,i} &= 2[4-(b_{i-1}b_i/\bar{b}_i^2)]\xi_i + (b_{i-1}/\bar{b}_i)^2\eta_{i-1} + (b_i/\bar{b}_i)^2\eta_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

gdzie $\eta_i = b_i/3E\bar{J}_i$, $\xi_i = l_i/3EJ_i \cos \beta_i$, a inne oznaczenia podane są na rys. 5.22 i 5.23.



Rys. 5.25. Statycznie niewyznaczalne grupy momentów przy obciążeniu antysymetrycznym
 a) układ niewiadomych X ; b) c) d) stany „i-1”, „i”, „i+1” narysowane tylko dla połówek odpowiednich segmentów.

W przypadku ramy regularnej, w której wymiary $b_i = b$, $l_i = l$ i sztywności $J_i = J$, $\bar{J}_i = \bar{J}$ są jednakowe dla wszystkich segmentów, mamy

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i-1} &= \alpha_{i,i+1} = b/3E\bar{J}, \\ \alpha_{i,i} &= (2l/EJ) + (2b/3E\bar{J}). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ wyznaczamy ze wzoru (5.3), biorąc jako M momenty zginające stanu statycznie wyznaczalnego (rys. 5.24b), jako $m^{(i)}$ momenty gnące wywołane grupą momentów $X_i = 1$ kGem (rys. 5.25c). Dla segmentów skrajnych, to jest pierwszego ($i = 1$) i ostatniego ($i = k$), równania (5.10) mają postać dwuczłonową

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,2}X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{k,k-1}X_{k-1} + \alpha_{k,k}X_k + \alpha_{k,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

w których współczynniki określone są za pomocą wyrażeń (5.11), jeśli segmenty te są swobodne lub podparte w sposób statycznie wyznaczalny. Jeśli segment 1 lub k jest

zamocowany, to przy obliczeniu współczynnika $\alpha_{1,1}$ względnie $\alpha_{k,k}$ należy odpowiednio wstawić $EJ_{i-1} = EJ_0 = \infty$, bądź $EJ_k = \infty$, otrzymując $\eta_0 = 0$ bądź $\eta_k = 0$.

Przykład. Obliczyć ramę (rys. 5.26a) obciążoną antysymetrycznie siłami $1/2P = 1$ t.

Rozwiązanie. Wyznaczając przebieg wypadkowego momentu gnącego M i siły tnącej Q (rys. 5.26c) obliczamy następnie przebieg momentów gnących stanu statycznie wyznaczalnego (rys. 5.26d).

Tablica 5.1

Segment	$l_i \text{ sec } \beta_i$ cm	EJ_i kGcm ²	ξ_i	b_{i-1} cm	b_i cm	$\bar{b}_i$ cm	EJ_{i-1}	η_i	$\frac{b_{i-1}}{b_i}$	$\frac{\bar{b}_i}{b_i}$
$i = 1$	200	1,00	66,7	120	120	120	0,50	80	1,000	1,000
$i = 2$	200	1,00	66,7	120	120	120	0,50	80	1,000	1,000
$i = 3$	201	2,00	33,5	120	160	140	0,50	106,7	0,857	1,144
$i = 4$	201	2,00	33,5	160	200	180	0,50	0	0,885	1,111

Przechodząc do wyznaczenia X_i , obliczamy wartości pomocnicze grupując je w tabl. 5.1, przy czym dla uproszczenia zakładamy, że $EJ_1 = EJ_2 = 1$ kGcm².

Powyższe dane pozwalają ze wzorów (5.11) wyznaczyć współczynniki α . Tak na przykład dla $i = 2$:

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = -(b_1^2/\bar{b}_1\bar{b}_2)\eta_1 = -80 [\text{kGcm}]^{-1},$$

$$\alpha_{2,2} = 2[4 - (b_1\bar{b}_2/\bar{b}_2^2)]\xi_2 + (b_1/\bar{b}_2)^2\eta_1 + (b_2/\bar{b}_2)^2\eta_2 = 560 [\text{kGcm}]^{-1},$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{3,2} = -(b_2^2/\bar{b}_2\bar{b}_3)\eta_2 = -68,6 [\text{kGcm}]^{-1}.$$

Wyrazy wolne obliczamy posługując się wykresami (rys. 5.25c i 5.26d), na przykład

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= 2\left(\frac{\bar{b}_0}{b_1} \frac{\bar{b}_0}{2} \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \bar{M}_0\right) \frac{1}{EJ_0} + 2\left(\frac{\bar{b}_1}{b_1} \frac{b_1}{2} \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \bar{M}_1\right) \frac{1}{EJ_1} = \\ &= 2\left(1 \cdot \frac{120}{2} \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^5\right) \frac{1}{0,5} + 2\left(1,0 \frac{120}{2} \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} (-2 \cdot 10^5)\right) \frac{1}{0,5} = -8,0 \cdot 10^6 \text{ cm}^0, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{M}_0 = 1$ tm, $\bar{M}_1 = -2$ tm — momenty gnące w narożach poprzeczek 0 i 1. Na wartość $\alpha_{1,0}$ nie mają wpływu odkształcenia podłużnic, gdyż odpowiednie składniki znoszą się. Ta zależność nie ma miejsca dla $\alpha_{3,0}$, $\alpha_{4,0}$, gdy podłużnica nie jest równoległa do osi symetrii. Obliczając analogicznie inne współczynniki mamy w wyniku układ równań

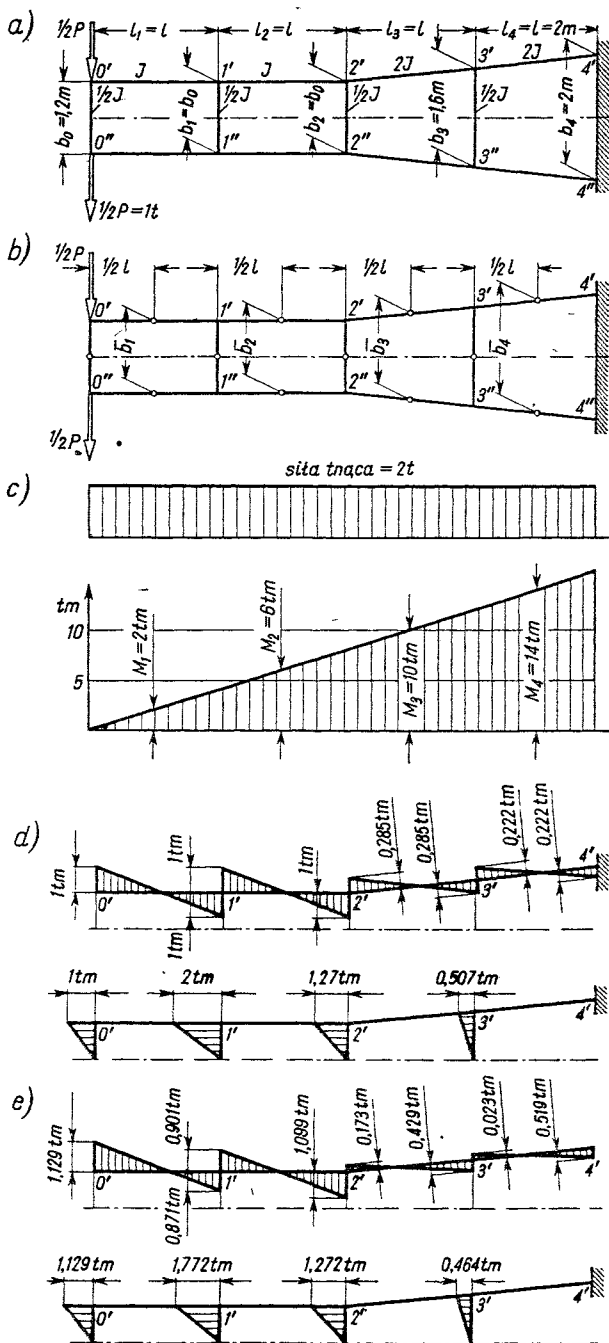
$$\begin{aligned} 560X_1 - 80,0X_2 + 0 + 0 - 8,00 \cdot 10^6 &= 0, \\ -80,0X_1 + 560X_2 - 68,5X_3 + 0 + 5,71 \cdot 10^6 &= 0, \\ -68,5X_3 + 400,6X_3 - 108,3X_4 + 2,09 \cdot 10^6 &= 0, \\ -108,3X_3 + 286,0X_4 + 4,65 \cdot 10^6 &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązanie

$$\begin{aligned} X_1 &= 12,9 \cdot 10^3 \text{ kGcm}, & X_3 &= -12,6 \cdot 10^3 \text{ kGcm}, \\ X_2 &= -9,9 \cdot 10^3 \text{ kGcm}, & X_4 &= -21,1 \cdot 10^3 \text{ kGcm} \end{aligned}$$

daje ostateczny przebieg momentów (rys. 5.26e).

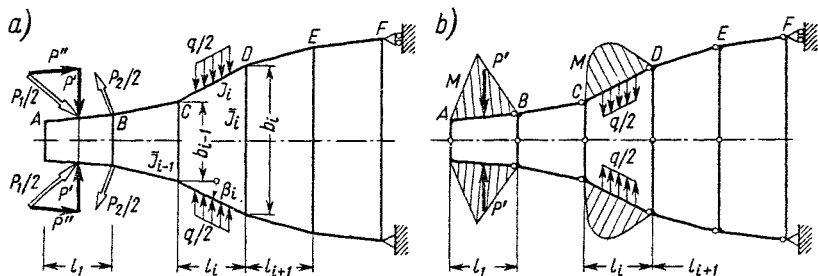
Jak widać, korekty wniesione przez wielkości statycznie niewyznaczalne w segmentach odległych od zamocowania są stosunkowo nieznaczne. Dowodzi to, że przyjęty schemat statycznie wyznaczalny, według którego punkty przegięcia podłużnic ($M = 0$) przypadają pośrodku między poprzeczkami,



Rys. 5.26. Przykład rozwiązania ramy obciążonej antysymetrycznie

jest bliski rzeczywistości. Pozwala to oszacować bez długich rachunków przebieg momentów w podłużnicach i w poprzeczkach. Jedynie w segmentach bliskich zamocowania pojawiają się większe korekty, można to jednak uwzględnić zakładając w ostatnim segmencie przesunięcie przegubu od płaszczyzny zamocowania. Z punktu widzenia konstrukcyjnego należy zwrócić uwagę, że zbieżność podłużnic w odpowiednią stronę zmniejsza momenty gnące w poprzeczkach (np. w poprzeczkach 1 i 3 stosunek momentów jest 3,5 : 1).

Analiza działania symetrycznych obciążeń (rys. 5.27a) dzieli się na dwa etapy. W pierwszym z nich wyznaczamy przebieg momentów gnących i sił tnących. W tym celu wy-



Rys. 5.27. Symetryczne obciążenie ramy wieloobwodowej

a) całkowity układ obciążeń; b) I grupa obciążeń w ustrój z myślowymi przegubami.

dzielamy grupę prostopadłych do osi symetrii ramy obciążeń podłużnic (np. siły P') i wprowadzamy myślowe przeguby tak, aby ustrój (rys. 5.27b) stał się statycznie wyznaczalny (rys. 5.5). Ponieważ każde z symetrycznych obciążeń (np. $q/2$) wywołuje momenty gnące tylko w podłużnicach danego segmentu, to określenie tych momentów (stan „0”) jest bardzo łatwe. Przechodząc do określenia statycznie niewyznaczalnych grup momentów X działających w miejscu myślowych przegubów podłużnic i grup Y w przegubach poprzeczek (rys. 5.28a), zauważmy iż na załom podłużnic (np. w punkcie D) mają wpływ tylko grupy X_{i-1} , X_i , X_{i+1} oraz Y_{i-1} i Y_i , a na załom w węźle poprzeczki (np. w punkcie K) tylko grupy X_i , X_{i+1} oraz Y_i . Wynika stąd, że równanie $M-M$ określające ciągłość przemieszczeń (brak załomu) podłużnicy jest

$$\alpha_{i,i-1} X_{i-1} + \alpha_{i,i} X_i + \alpha_{i,i+1} X_{i+1} + \gamma_{i,i-1} Y_{i-1} + \gamma_{i,i} Y_i + \alpha_{i,0} = 0, \quad (5.12a)$$

a dla poprzeczki

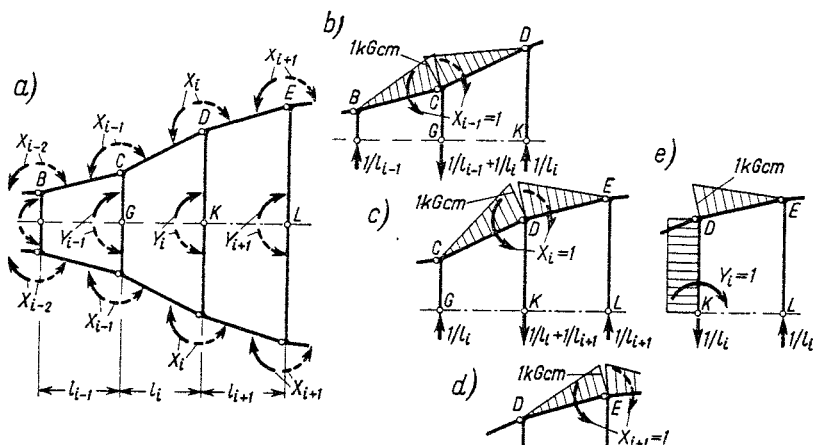
$$\delta_{i,i} Y_i + \gamma_{i,i} X_i + \gamma_{i,i+1} X_{i+1} + \delta_{i,0} = 0, \quad (5.12b)$$

przy czym wartości współczynników α , γ i δ przedstawiających odpowiednie kąty załomu podłużnicy lub poprzeczki i wywołane obciążeniami jednostkowymi są

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i-1} &= \gamma_{i,i-1} = \xi_i, & \alpha_{i,i} &= 2(\xi_i + \xi_{i+1}), \\ \alpha_{i,i+1} &= \gamma_{i,i+1} = \xi_{i+1}, & \gamma_{i,i} &= 2\xi_{i+1}, & \delta_{i,i} &= 2\xi_i + 3\eta_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

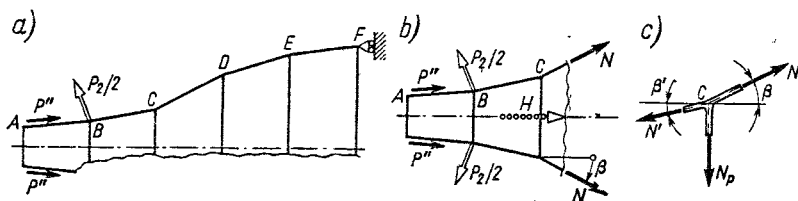
gdzie, jak i we wzorach (5.11), $\xi_i = l_i \sec \beta_i / 3EJ_i$, $\eta_i = b_i / 3E\bar{J}_i$, a odpowiednie wymiary są podane na rys. 5.27a. Wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ i $\delta_{i,0}$ obliczamy z wzoru (5.3), w którym zamiast M wstawiamy odpowiednie wartości stanu „0” (rys. 5.27b), a zamiast $m^{(i)}$ odpowiednie wartości z wykresów (rys. 5.28c, e).

Analogicznie rozwiązuje się przypadek, gdy na ustrój działają symetryczne obciążenia prostopadłe do poprzeczek. Postać równań (5.12) i wartości współczynników (5.13) są te same, a zmianom ulegają jedynie wyrazy wolne. W obu przypadkach rozwiązanie układu $2k$ równań (5.12) k -obwodowej ramy nie nasuwa trudności, jeśli po napisaniu tych równań podstawimy w równaniach (5.12a) wartości Y określone z równań (5.12b). W wyniku otrzymujemy układ 3-członowych równań względem niewiadomych X analogiczny do równania 3 momentów dla belki ciągłej.



Rys. 5.28. Statycznie niewyznaczalne grupy momentów przy obciążeniu symetrycznym
a) oznaczenia niewiadomych; b), ... e) jednostkowe stany X_{i-1} , X_i , X_{i+1} oraz Y_i .

Drugi etap analizy działania symetrycznych obciążeń polega na określeniu wzdłużnych sił wywołanych tą częścią obciążenia, która pozostaje po wydzieleniu pierwszej grupy (rys. 5.27b). Na to drugie obciążenie (rys. 5.27) składają się siły działające wzdłuż



Rys. 5.29. Grupa symetrycznych obciążeń wywołująca tylko siły wzdłużne

danego odcinka podłużnicy (np. P''), bądź siły przyłożone w węzłach ramy (np. $P_2/2$). Z uwagi na założoną nieskończoną sztywność prętów na działanie sił wzdłużnych, ta druga grupa obciążeń symetrycznych (rys. 5.29a) wywołuje w prętach jedynie siły wzdłużne. Jeśli więc w pewnym przekroju (rys. 5.29b) wypadkowa wszystkich sił jest H , to siła w podłużnicy

$$N = -H/2 \cos \beta. \quad (o)$$

Siłę N_p w rozporce określamy z warunku równowagi wyciętego myślowo węzła ramy (rys. 5.29c), otrzymując w wyniku

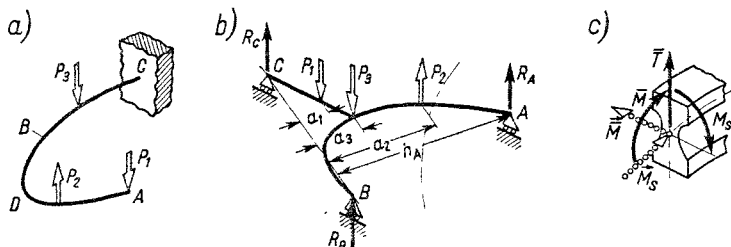
$$N_p = 0,5H(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta'). \quad (d)$$

Podany w tym artykule opis rozwiązania ram wieloobwodowych omawia jedynie najbardziej charakterystyczne etapy. Opisując na przykład określenie sił wewnętrznych ograniczono się do podania przebiegu momentów gnących, jako istotnych dla określenia grup momentów X i Y (rys. 5.25, 5.28), traktując wyznaczenia innych sił wewnętrznych (wzdłużnych i tnących) za znane. Przy pełnej analizie ustroju obliczenie tych innych sił jest oczywiście niezbędne.

Przemieszczenia ram omawianego typu interesują nas głównie w przypadku działania obciążeń antysymetrycznych, gdy rama jako całość spełnia funkcję belki, na przykład belki wspornikowej (rys. 5.26). Postępując według wskazówek art. 5.3 przemieszczenia te wyznaczamy traktując rozpatrywaną ramę jako ustrój statycznie wyznaczalny, w którym działają obciążone uprzednio wypadkowe siły wewnętrzne M_w , N_w i T_w od obciążeń zewnętrznych i grup momentów X . Jeśli więc chcemy obliczyć pionowe przemieszczenie punktu O (rys. 5.26a), to obciążając w tym punkcie ramę pionową siłą $P_{\text{dod}} = 1 \text{ kG}$ wyznaczamy przebieg momentów gnących $\bar{m}$ wywołanych przez tę siłę, jak gdyby konstrukcja miała przeguby. Wykres momentów zatem będzie miał identyczny charakter jak na rys. 5.26d, a zmianie ulegnie jedynie skala wykresu. Wykres momentów M_w (rys. 5.26e) traktujemy jako wykres od obciążenia zewnętrznego. Stosując teraz wzór (5.8b), w którym całkowanie obejmuje wszystkie pręty konstrukcji, wyznaczamy szukane f . Przyjmując przykładowo $EJ = 2,9 \cdot 10^9 \text{ kGcm}^2$ (profil I 18), mamy dla omawianej konstrukcji $f \approx 1,1 \text{ cm}$.

5.6. Ramy ściśle płaskie obciążone przestrzennie

W niektórych ustrojach (ramy samochodów, wagonów, podstawy dźwigów itp.) obciążenie działające na ściśle płaską ramę jest prostopadłe do jej płaszczyzny. Pozostawiając do oddzielnego rozpatrzenia przypadki, gdy przekrój poprzeczny prętów jest cienkościenny otwarty (patrz rozdz. 7), zajmijmy się na razie ustrojami, gdy pręty ramy mają przekrój zwarty (np. koło) bądź cienkościenny rurowy (np. skrzynkowy). Jak wiadomo z Wytrzymałości Materiałów, przy skręcaniu takich prętów w przekroju poprzecznym powstają prawie wyłącznie naprężenia styczne, których wielkość zależy od wymiarów



Rys. 5.30. Statycznie wyznaczalne ramy przestrzennie obciążone

a) wspornikowa; b) podparta 3-punktowo; c) układ wypadkowych sił wewnętrznych, momenty M i M_s podane ponadto jako wektory $\vec{M}$ i $\vec{M}_s$.

i kształtu przekroju. Jeśli rozpatrywana rama jest statycznie wyznaczalna (rys. 5.30), to siły wewnętrzne $\bar{T}$, $\bar{M}$, M_s obliczamy bezpośrednio z równań statyki. Dla ramy wspornikowej (rys. 5.30a) wartość siły tnącej $\bar{T}$ w przekroju B jest równa algebraicznej sumie wszystkich sił przyłożonych na odcinku między swobodnym końcem A i rozpatrywanym przekrojem B. Moment gnący $\bar{M}$ i skrecający M_s najłatwiej wyznaczyć obliczając najpierw momenty M_ξ i M_η względem osi ξ i η równoległych do dowolnie obranych osi x , y (rys. 5.31), a dopiero potem rozłożyć wypadkowy moment M' na składowe: M_s styczną do osi i $\bar{M}$ normalną do osi w punkcie B. Momenty M_ξ i M_η wyznacza się jako momenty gnące w dwóch prostych belkach $A'C'$ i $A''C''$ stanowiących rzuty ramy na osie x i y z odpowiednio przeniesionymi siłami P_1 , P_2 , P_3 . Dla uniknięcia błędów w przypadku, gdy któryś z punktów belki prostej (np. $A'C'$) odpowiada jako rzut dwóm różnym punktom osi ramy, rysujemy tę belkę jako złożoną z dwóch warstw złączonych ze sobą w punkcie D' . W przypadku ramy podpartej 3-punktowo (rys. 5.30b) wyznaczamy najprzód reakcję R_A z równania równowagi momentów względem prostej BC , to jest

$$R_A = (P_1 a_1 - P_2 a_2 + P_3 a_3) / h_A \quad (a)$$

i analogicznie pozostałe reakcje R_B , R_C . Dalsza część rozwiązania przebiega jak w przypadku ramy wspornikowej.

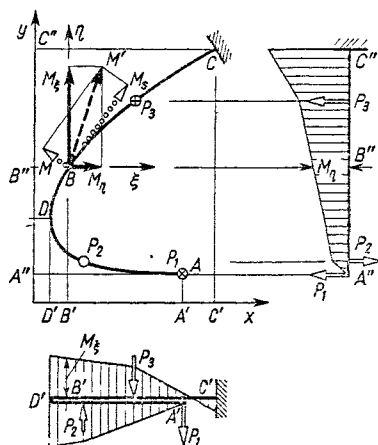
Rozwiązanie ram ściśle płaskich statycznie niewyznaczalnych objaśnimy na przykładzie ramy jednoobwodowej (rys. 5.32a), która przy obciążeniu prostopadłym do płaszczyzny ramy jest konstrukcją 3-krotnie statycznie niewyznaczalną. Aby bowiem obliczyć siły wewnętrzne, należy dokonać myślowego przekroju, w którym mogłoby pojawić się sześć sił wewnętrznych: momenty gnące M_A i $\bar{M}_A$, moment skrecający M_{sA} , siły tnące T_A i $\bar{T}_A$ oraz siły wzdłużne N_A (rys. 5.32b). Jeśli jednak zauważymy, że w przypadku ramy ściśle płaskiej grupa sił M_A , T_A i N_A nie daje odkształceń prostopadłych do jej płaszczyzny, to grupa sił $\bar{M}_A$, $\bar{T}_A$, M_{sA} na podstawie wzajemności przesunięć nie wywołuje przemieszczeń w płaszczyźnie ramy. Wynika stąd, że w przekroju A ciągłość przemieszczeń w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy zapewnia tylko grupa sił $\bar{M}_A$, $\bar{T}_A$, M_{sA} . Oznaczając $\bar{T}_A = X_4$, $\bar{M}_A = X_5$, $M_{sA} = X_6$, warunek ciągłości przemieszczeń pionowych przekroju A'' względem A' sformułujemy następująco

$$a_{4,4} X_4 + a_{4,5} X_5 + a_{4,6} X_6 + a_{4,0} = 0,$$

gdzie

$a_{4,4}$, $a_{4,5}$, $a_{4,6}$ — przemieszczenia pionowe przekroju A'' względem A' wywołane odpowiednimi grupami sił lub momentów $X_4 = 1 \text{ kG}$, $X_5 = 1 \text{ kGcm}$, $X_6 = 1 \text{ kGcm}$ (rys. 5.32d,e,f);

$a_{4,0}$ — także przemieszczenie wywołane obciążeniem zewnętrznym.

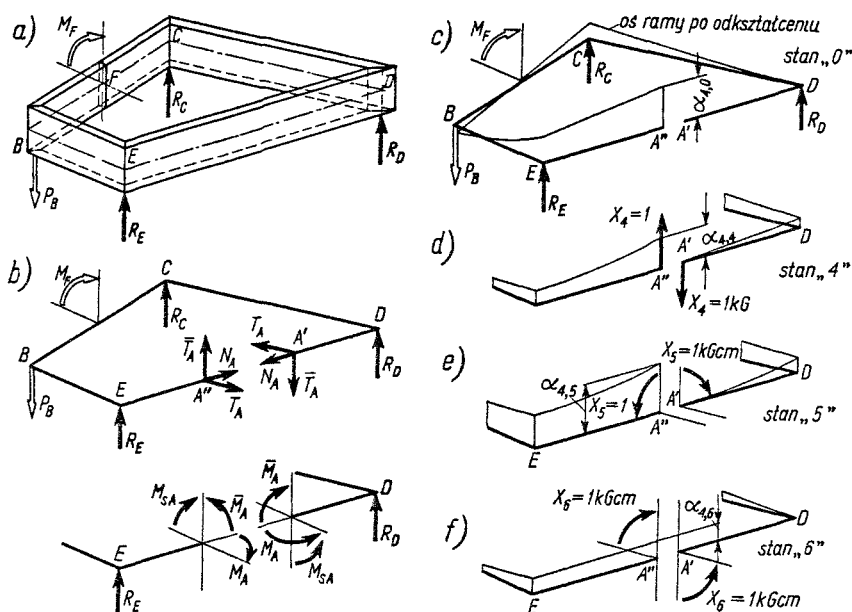


Rys. 5.31. Wyznaczanie M i M_s dla ramy z rys. 5.30a

Formułując podobnie pozostałe warunki ciągłości przemieszczeń mamy ostatecznie układ równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{4,4}X_4 + \alpha_{4,5}X_5 + \alpha_{4,6}X_6 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{5,4}X_4 + \alpha_{5,5}X_5 + \alpha_{5,6}X_6 + \alpha_{5,0} &= 0, \\ \alpha_{6,4}X_4 + \alpha_{6,5}X_5 + \alpha_{6,6}X_6 + \alpha_{6,0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Współczynniki $\alpha_{i,j}$ oraz wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ ($i, j = 4, 5, 6$) obliczamy według reguł art. 1.2, pomijając wpływ sił tnących. Jeśli więc $\bar{m}^{(i)}$, $m_s^{(i)}$ są odpowiednio momentem



Rys. 5.32. Rozwiązanie ramy ściśle płaskiej przestrzennie obciążonej

gnącym i skręcającym wywołanym grupą $X_i = 1$, to ze wzoru (1.11) całkując po całym obwodzie mamy

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \oint \frac{\bar{m}^{(i)} \bar{m}^{(j)}}{EJ} ds + \oint \frac{m_s^{(i)} m_s^{(j)}}{C} ds, \\ \alpha_{i,0} &= \oint \frac{\bar{M} \bar{m}^{(i)}}{EJ} ds + \oint \frac{M_s m_s^{(i)}}{C} ds, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

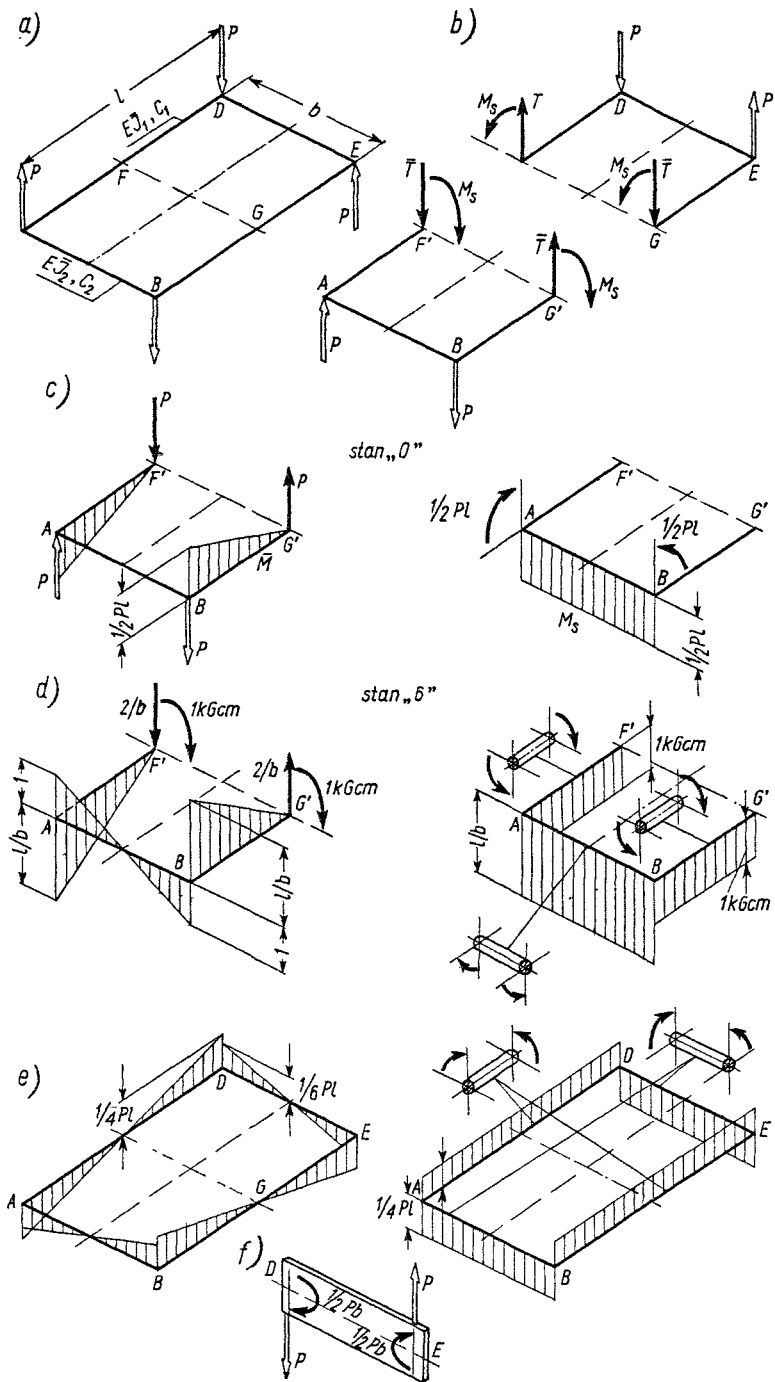
gdzie

$\bar{M}$, M_s — siły wewnętrzne stanu „0”,

$\bar{J}$ — moment bezwładności przekroju względem osi leżącej w płaszczyźnie ramy,

C — sztywność na skręcanie.

Podobnie jak w przypadku ram płasko obciążonych, tak i w przypadku obciążenia przestrzennego duże uproszczenie można osiągnąć przez wykorzystanie symetrii kon-



Rys. 5.33. Rozwiązanie podwójnie symetrycznej ramy antysymetrycznie obciążonej
 Na rys. c,d,e, wykresy po lewej stronie dają przebieg momentów gnących, po prawej momentów skręcających; dane liczbowe na rys. e odpowiadają $\rho = 1,5$, $\eta = 0,6$, $\xi_1 = 0,5$, $\vartheta = 2$.

strukeji. Tak na przykład rozwiązanie podwójnie symetrycznej ramy (rys. 5.33a) antysymetrycznie obciążonej sprowadza się do zadania jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego. Prowadząc bowiem przekroje F i G (rys. 5.33b) zauważmy, iż w przekrojach tych nie mogą działać momenty zginające, a siły T i M_s muszą mieć w tych przekrojach jednakowe wartości, lecz przeciwne zwroty (względem płaszczyzny symetrii). Ponieważ muszą one spełniać warunek równowagi

$$-\bar{T}b + 2M_s + Pb = 0,$$

a więc tylko jedna z nich (np. M_s) jest nieokreślona. Rozdzielając stan obciążeń na stan „0” i stan „6” (rys. 5.33c, d) mamy równanie

$$\alpha_{6,6}X_6 + \alpha_{6,0} = 0 \quad (b)$$

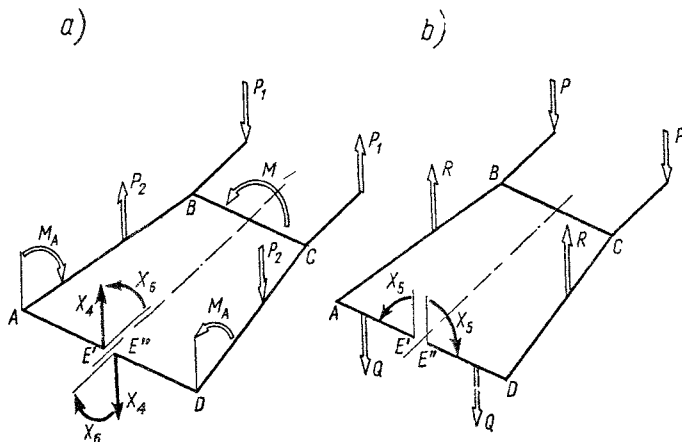
wyrażające, iż suma kątów obrotu przekroju G względem G' i F względem F' jest równa zero. Obliczając ze wzorów (5.15) $\alpha_{6,6}$ i $\alpha_{6,0}$ mamy

$$X_6 = -\frac{Pl}{2} \frac{\varrho(\eta\varrho + 3\xi_2)}{1 + \eta\varrho^3 + 3\xi_2\varrho(\varrho + \vartheta)}, \quad (c)$$

gdzie

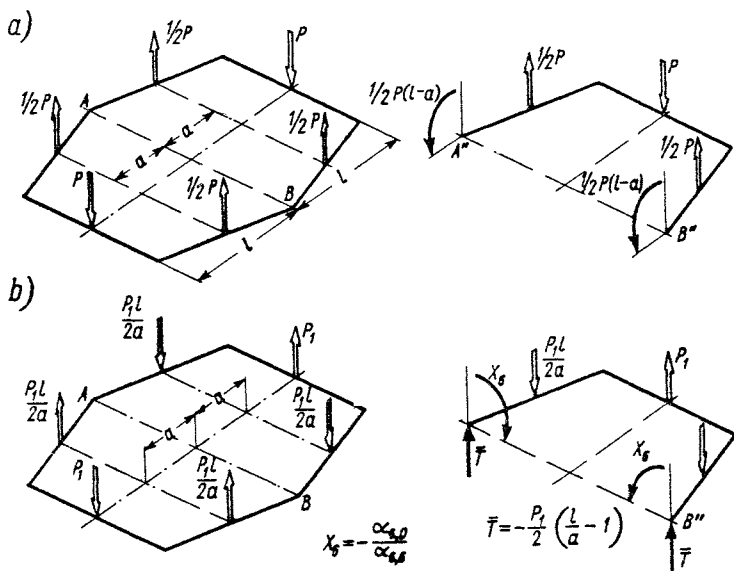
$$\varrho = l/b, \quad \eta = \bar{J}_2/\bar{J}_1, \quad \xi_2 = E\bar{J}_2/C_2, \quad \vartheta = C_2/C_1.$$

Interesująca jest analiza przypadków krańcowych. Jeśli sztywność $C_2 = 0$, to $X_6 = -Pb/2$. Nakładając wykresy (rys. 5.33d, e) widzimy, iż pręty AD i BE są tylko skręcane momentami $Pb/2$, podczas gdy pręty poprzeczne (np. AB) są tylko zginane momentami zmiennymi liniowo od wartości $(-Pb/2)$ w A do $(+Pb/2)$ w B . Jest to jasne, jeśli zauważyć, iż przypadek $C_2 = 0$ (lecz $E\bar{J}_2 \neq 0$) można zrealizować dając pręty AB i DE w postaci cienkich blach o dużej wysokości i małej grubości (rys. 5.33f). Wtedy belka DE lub AB przekształca parę sił Pb na dwa momenty skręcające $(Pb/2)$, sama pracując tylko na zginanie. Identycznie przebiega analiza, gdy $C_1 = 0$, z tym tylko, że pręty wzdłużne i poprzeczne zamieniają się rolami. W przypadku gdy ani C_1 , ani C_2 nie są równe zero, mamy stan pośredni (rys. 5.33e).



Rys. 5.34. Układ obciążeń i sił statycznie niewyznaczalnych dla ramy symetrycznej

W przypadku jednoobwodowej ramy mającej jedną oś symetrii układ obciążeń rozdziela się na dwa. Jeden z nich odpowiada obciążeniu antysymetrycznemu z niewiadomą siłą poprzeczną X_4 i momentem skręcającym X_5 (rys. 5.34a). Działanie obciążenia symetrycznego jest zadaniem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym (moment gnący X_5). W przypadku ramy podwójnie symetrycznej (rys. 5.35) działanie obciążenia podwójnie symetrycznego (rys. 5.35a) dzięki regułom (art. 1.5) sprowadzone zostaje do zadania statycznie wyznaczalnego, w którym momenty X_5 określone są z warunku równowagi.



Rys. 5.35. Uproszczenie rozwiązania ramy podwójnie symetrycznej

a) przypadek obciążenia podwójnie symetrycznego; b) przypadek obciążenia pojedynczo symetrycznego.

Działanie obciążenia antysymetrycznego względem jednej osi, a symetrycznego względem drugiej (rys. 5.35b) jest zadaniem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym. Przypadek obciążenia antysymetrycznego względem obu osi był rozpatrzony poprzednio (rys. 5.33).

W wielu zagadnieniach jednoobwodowa rama ma postać pierścienia kołowego. Jeśli szerokość b poprzecznego przekroju w płaszczyźnie ramy jest mała w porównaniu do promienia R ($b/R < 0,1$), to z dokładnością wystarczającą dla potrzeb praktycznych traktujemy ten pierścień jako ramę złożoną z nieskończenie wielu prętów prostych.

Przykład. Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych w pierścieniu na sprężystym podłożu obciążonym siłą P (rys. 5.36).

Rozwiązanie. Pomijając odkształcenia pierścienia, wyznaczamy reakcje podłoża jak gdyby pierścień był idealnie sztywny. W wyniku rozkład reakcji określony z równowagi pierścienia wyraża się wzorem

$$q = P(1 + 2 \sin \varphi) / 2\pi R.$$

Zakładamy przy tym, iż reakcje podłoża mogą działać również do dołu. Wprowadzając w F zerową grupę sił pionowych $0,5P$ rozdzielamy zadanie na dwa, z których pierwsze (rys. 5.36c) jest statycznie wyznaczalne. Wartości $\bar{M}_C = \bar{M}_D$ określamy z równowagi połówki pierścienia otrzymując

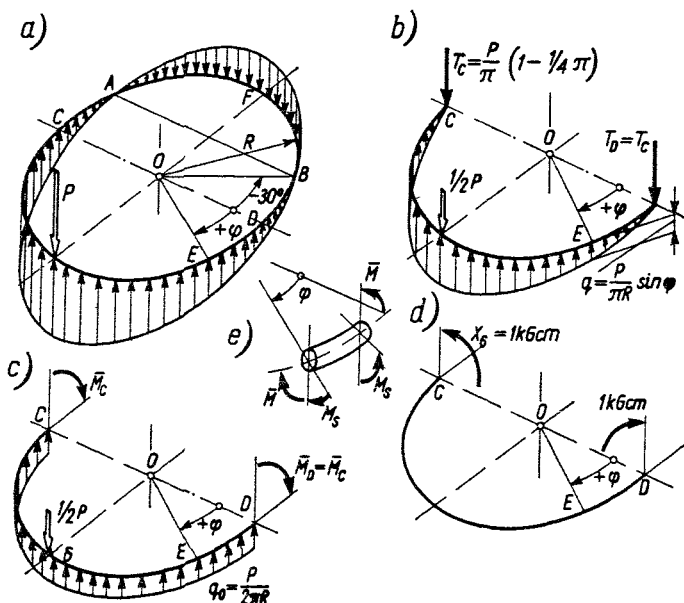
$$\bar{M}_C = \bar{M}_D = 0,5PR[0,5 - (1/\pi)],$$

skąd następnie możemy obliczyć w przekroju E momenty $\bar{M}_1$ i M_{s1}

$$\bar{M}_1 = -\bar{M}_D \cos \varphi + \int_0^\varphi q_0 R d\beta R \sin(\varphi - \beta) = -(PR/4)[\cos \varphi - (2/\pi)], \quad (d)$$

$$M_{s1} = (PR/4)[\sin \varphi - (2\varphi/\pi)], \quad (e)$$

przy czym dodatnie zwroty momentów ustalono na rys. 5.36e.



Rys. 5.36. Przykład rozwiązania pierścienia kołowego przestrzennie obciążonego
a) układ obciążeń; b) i d) II zadanie składowe; c) I zadanie składowe.

Przechodząc do drugiego zadania składowego, tj. pierścienia obciążonego w punkcie G siłą $0,5P$ skierowaną do dołu, w punkcie F siłą $0,5P$ skierowaną do góry i utrzymanego w równowadze obciążeniem ciągłym $q_1 = P \sin \varphi / \pi R$ stwierdzamy, iż zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Rozdzielając stan „0” (rys. 5.36b) i stan „6” (rys. 5.36d) wyznaczamy dla każdego z nich siły wewnętrzne* otrzymując

$$\bar{M} = -T_D R \sin \varphi + \int_0^\varphi \left(\frac{P \sin \beta}{\pi R} R d\beta \right) R \sin(\varphi - \beta) = -\frac{PR}{2\pi} \left[\varphi \cos \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \varphi \right],$$

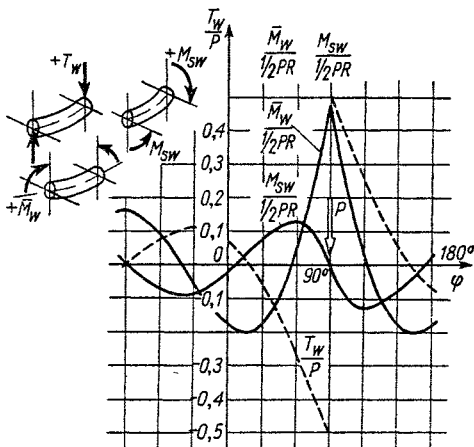
* Przy wyznaczaniu sił całkujemy momenty od obciążenia ciągłego w przedziale od 0 do φ . Aby uniknąć nieporozumień, wprowadzamy przejściowo kąt β ($0 \leq \beta \leq \varphi$).

$$M_s = T_D R (1 - \cos \varphi) - \int_0^\varphi \left(\frac{P \sin \beta}{\pi R} R d\beta \right) R [1 - \cos(\varphi - \beta)] = \frac{PR}{2\pi} \left[\varphi \sin \varphi - \frac{\pi}{2} (1 - \cos \varphi) \right]$$

$$\bar{m}^{(s)} = -\sin \varphi, \quad m_s^{(s)} = -\cos \varphi.$$

Obliczając $a_{s,s}$ i $a_{s,0}$ mamy po rozwiązaniu równania (b) $X_s = (\pi - 3)PR/4\pi$, co pozwala na określenie całkowitych momentów gnących i skręcających drugiego zadania składowego. Sumując te wyniki z otrzymanymi uprzednio $\bar{M}_1$ i M_{s1} wyznaczamy wypadkowe wartości $\bar{M}_w$ i M_{sw}

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_w &= - (PR/4\pi) [(\pi + 2\varphi) \cos \varphi - (2 + \sin \varphi)], \\ M_{sw} &= (PR/4\pi) [3 \cos \varphi - (\pi + 2\varphi) (1 - \sin \varphi)]. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$



Rys. 5.37. Bezwymiarowe siły wewnętrzne w pierścieniu z rys. 5.36a

Przebieg momentów łącznie z wypadkową siłą poprzeczną T_w podaje rys. 5.37. Maksymalny moment $M_w = 0,239PR$ działa w przekroju G , tj. w miejscu przyłożenia siły P . Należy zauważyć, że momenty skręcające są kilkakrotnie mniejsze od zginających.

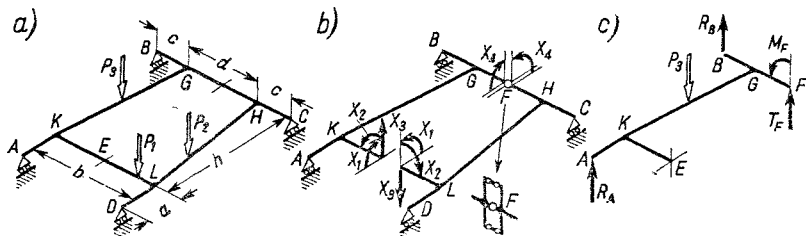
5.7. Wybrane zagadnienia przestrzennego obciążenia ram

Poza omówionymi w art. 5.6 przypadkami spotyka się w praktyce wiele innych zagadnień przestrzennego obciążenia ram ściśle płaskich. Ponieważ omówienie wszystkich wariantów jest niemożliwe, wybrano tylko niektóre typowe przypadki, ograniczając się przy tym do podania niezbędnych uwag.

a. *Jednoobwodowa rama podparta w czterech punktach* (rys. 5.38) stosowana w różnego rodzaju wózkach jest z punktu widzenia statyki 4-krotnie statycznie niewyznaczalna, przy czym jako niewiadome można by przyjąć trzy siły wewnętrzne w jednym myślowym przekroju ramy (rys. 5.32) oraz reakcję jednej z podpór. Ten sposób obioru okazuje się jednak niekorzystny, gdyż nie spełnia postulatów art. 1.4. Znacznie wygodniej jest jako

niewiadome przyjąć schemat (rys. 5.38b), w którym, poza trzema siłami X_1, X_2, X_3 w myślowym przekroju jednej z poprzeczek, jako czwarta niewiadoma X_4 występuje moment skręcający w jednym przekroju drugiej poprzeczki*. Układ równań M—M, z którego wyznaczamy siły X , ma postać

$$a_{i,1}X_1 + a_{i,2}X_2 + a_{i,3}X_3 + a_{i,4}X_4 + a_{i,0} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (a)$$



Rys. 5.38. 4-krotnie statycznie niewyznaczalna ściśle płaska rama

a) szkic ramy; b) układ sił statycznie niewyznaczalnych; c) równowaga jednej części ramy w stanie „0” reakcje R_A, R_B, T_F i M_F .

i wyraża ciągłość przemieszczeń w myślowym przekroju E ($i = 1, 2, 3$) oraz ciągłość kątów skręcenia w przegubie F ($i = 4$). Wartości $a_{i,j}$ oraz $a_{i,0}$ obliczamy ze wzorów (5.15). Potrzebne do tego siły wewnętrzne stanu „0” i stanów jednostkowych obciążeń wyznaczamy po uprzednim obliczeniu z sześciu równań równowagi (po 3 dla każdej izolowanej części ramy) sześć reakcji (4 reakcje podłoża i siła tnąca oraz moment gnący w przegubie F) (rys. 5.38c).

Opisany sposób dotyczy przypadku ogólnego i niekiedy może być znacznie uproszczony. Jeśli na przykład rama (rys. 5.38a) jest symetryczna względem EF , symetrycznie podparta i symetrycznie obciążona, to zgodnie z zasadą jednoznaczności rozwiązania (art. 1.5) jedyną niewiadomą jest X_2 , pozostałe zaś są równe zero. Układ równań (a) sprowadza się wtedy do jednego tylko równania.

b. *Wieloobwodowa symetryczna rama symetrycznie obciążona* (rys. 5.39a) jest ustrojem k -krotnie statycznie niewyznaczalnym (k -liczba obwodów), gdyż w myślowych przekrojach poprzeczek mogą działać tylko momenty gnące**. Jako wielkości statycznie niewyznaczalne obieramy przy tym grupy momentów X w dwóch kolejnych poprzeczkach o równej bezwzględnej wartości (rys. 5.39b). Dzięki takiemu obiorowi działania każdej grupy X zamyka się w obrębie jednego obwodu, co z kolei powoduje, iż równania M—M mają postać 3-członową względem X

$$a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,0} = 0 \quad (i = 1, \dots, k) \quad (b)$$

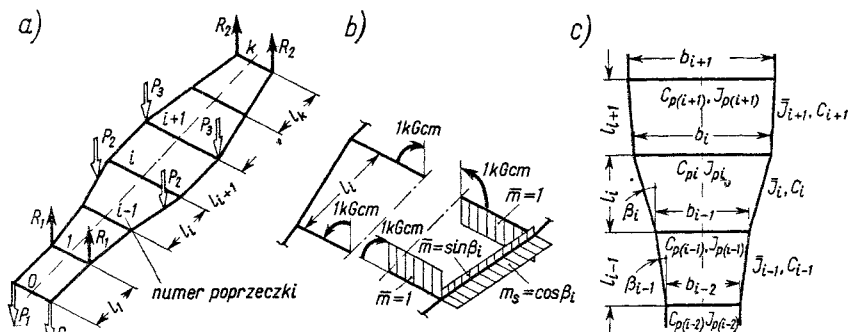
i wyrażają warunek braku załomu w poprzeczce i , jeśli tylko sąsiadujące poprzeczki są złączone. Współczynniki $a_{i,j}$ są wyrażone przy tym następująco

$$a_{i,i-1} = -\xi_{i-1}, \quad a_{i,i} = \xi_{i-1} + \xi_i + (l_i/C_i^*), \quad a_{i,i+1} = -\xi_i, \quad (c)$$

* Przyjęty schemat odpowiada wprowadzeniu w punkcie F specjalnego przegubu mogącego przenosić tylko siłę tnącą i moment gnący.

** Aby ustrój po wprowadzeniu myślowych przekrojów został sztywny, jedna z poprzeczek musi zostać nieprzecięta.

gdzie $\xi_i = b_i/EJ_{pi}$, $1/C_i^* = (1/C_i) + (\operatorname{tg} \beta_i/E\bar{J}_i)$, a pozostałe oznaczenia podane są na rys. 5.39c. Co się tyczy wyrazów $a_{i,0}$, to ich obliczenie wypada najprościej, jeśli już w stanie „0” założyć odpowiednie wartości momentów zginających poprzeczki. Rzutując mianowicie jedną z podłużnic na oś symetrii



Rys. 5.39. Symetryczna wieloobwodowa rama symetrycznie obciążona

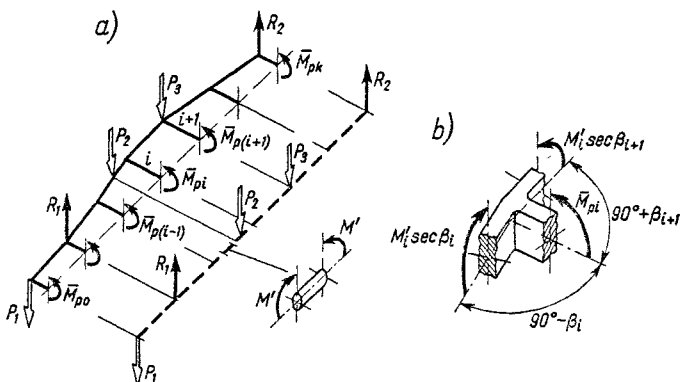
a) szkic ramy; b) stan „i” oraz odpowiadający układ sił wewnętrznych (narysowano tylko dla połówki segmentu); c) oznaczenia wymiarów i sztywności.

(rys. 5.40a) i obliczając ją jak belkę prostą zwiększamy następnie otrzymane stąd momenty gnące M' w stosunku $\sec \beta_i$, tzn. przyjmujemy, iż w podłużnicy

$$\bar{M} = M' \sec \beta_i, \quad (d)$$

i dodajemy niezbędne do utrzymania równowagi momenty gnące w poprzeczkach (rys. 5.40b)

$$\bar{M}_{pi} = M'_i (\operatorname{tg} \beta_{i+1} - \operatorname{tg} \beta_i), \quad (e)$$

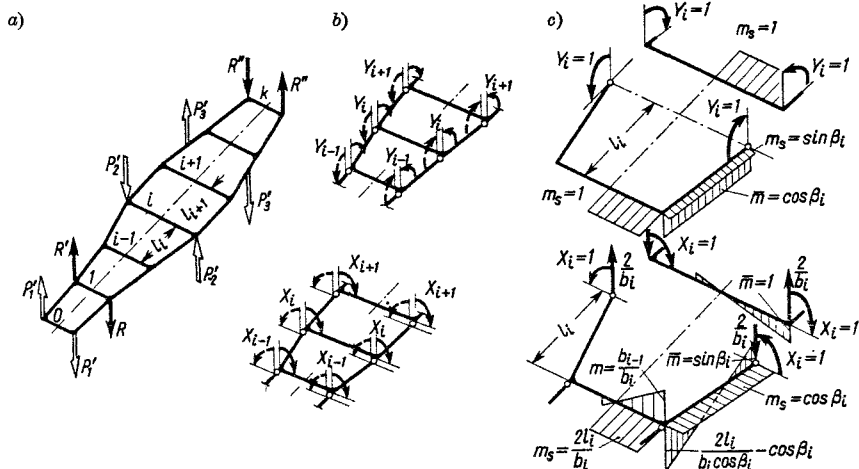


Rys. 5.40. Określenie sił stanu „0” w ramie z rys. 5.39

b) statyka zalomu podłużnicy w stanie „0” w miejscu poprzeczki i.

stałe wzdłuż całej długości poprzeczki. Przy takim doborze sił stanu „0”, jak dowodzą wyniki przeliczeń, niewiadome X_i są bardzo małe i dlatego niejednokrotnie można je pominąć. W szczególności, gdy podłużnice ramy są równoległe a obciążenie wraz z reakcjami działa tylko na podłużnice, to wszystkie $X_i = 0$.

c. *Wielobowudowa symetryczna rama antysymetrycznie obciążona* (rys. 5.41a) jest ustrojem $2k$ -krotnie statycznie niewyznaczalnym (k – liczba obwodów), gdyż w myślowych przekrojach poprzeczek mogą działać siły tnące i momenty skręcające. Dążąc do spełnienia postulatów art. 1.4 obieramy jednak inny schemat statyczny polegający na wprowadzeniu w każdym obwodzie dwóch symetrycznie ustawionych przegubów kulistych*.



Rys. 5.41. Antysymetryczne obciążenie wielobowudowej ramy symetrycznej

- a) szkic konstrukcji identycznej jak na rys. 5.39; b) układy statycznie niewyznaczalnych grup momentów X , Y ; c) działanie jednostkowych grup X_i, Y_i (siły wewnętrzne narysowano tylko dla powłoki ustroju).

Jako niewiadome obieramy antysymetryczne grupy momentów X i Y (rys. 5.41b) o wektorach równoległych bądź prostopadłych do poprzeczek. Zauważając, iż działanie każdego z układów X_i oraz Y_i zamyka się w obrębie elementów jednego obwodu dochodzimy do identycznych z (5.12) równań $M-M$, z tym tylko, iż współczynniki tych równań należy teraz obliczać z wzorów (5.15). Tak na przykład

$$a_{i,i-1} = -(b_{i-1}^2/3b_i EJ_{pi}), \quad \gamma_{i,i-1} = -2b_{i-1}l_i/b_i C_{p,i-1}, \dots \text{itd.},$$

gdzie $C_{p,i-1}$ – sztywność na skręcanie poprzeczki $i-1$ -ej. Co się tyczy stanu „0”, to korzystając z reguły zamiany (art. 1.4) możemy przyjąć każdy antysymetryczny stan sił wewnętrznych zapewniający równowagę wszystkich elementów ustroju. W opisywanej konstrukcji wszystkie obciążenia łącznie z reakcjami traktowano jako znane. Jeśli podparcie ramy jest 4-punktowe, to jedna z grup reakcji (np. R'') jest dodatkową wielkością statycznie niewyznaczalną, albowiem z jednego równania równowagi momentów względem osi symetrii** nie sposób wyznaczyć obu par sił R' i R'' .

d. *Wielobowudowa symetryczna rama z podłużnicami wiotkimi na skręcanie* spotyka się często w budowie samochodów (rys. 5.42). Przy obciążeniu symetrycznym jest ona ustrojem statycznie wyznaczalnym, a momenty gnące są określone wzorami (d) i (e). Przy znanym całkowicie obciążeniu antysymetrycznym (łącznie z reakcjami) jest ona k -krotnie statycznie niewyznaczalna, albowiem opisane poprzednio grupy X_i i Y_i (rys. 5.41b, c) nie są tym razem niezależne od siebie, lecz są dobrane tak, iż podłużnice są tylko zginane, czyli że wypadkowy moment z momentów X_i i Y_i jest wektorem prostopadłym do podłużnicy. Obierając grupę tych wypadkowych momentów jako nową niewiadomą X'_i (rys. 5.42b) zauważamy, iż działanie jej ogranicza się znowu do jednego obwodu (rys. 5.42c). Dzięki temu równanie $M-M$ ma postać

$$a_{i,i-1}\dot{X}'_{i-1} + a_{i,i}X'_i + a_{i,i+1}\dot{X}'_{i+1} + a_{i,0} = 0, \quad (f)$$

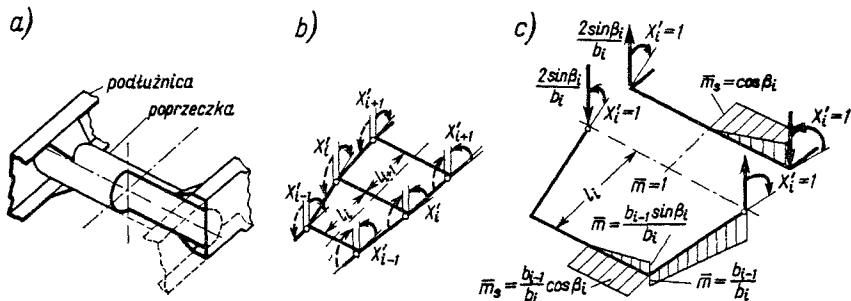
* Z uwagi na antysymetrię obciążenia ustrój taki nie jest przy tym obciążeniu mechanizmem.

** Pozostałe równania równowagi są tożsamościami.

w którym współczynniki $a_{i,j}$ obliczamy z wzorów (5.15) korzystając z wykresów $\bar{m}$ i m_s (rys. 5.42c). W często spotykanym przypadku, gdy podłużnice są równoległe ($b_{i-1} = b_i = \dots = b$) wyrażenia te przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-1} &= -\xi_{i-1}, \\ a_{i,i} &= (2l_i/EJ_i) + \xi_{i-1} + \xi_i, \\ a_{i,i+1} &= -\xi_i, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

gdzie $\xi_i = b/C_{pi}$. Siły wewnętrzne stanu „0” wyznaczamy rozpatrując każdy segment konstrukcji oddzielnie po uprzednim obliczeniu sił tnących w myślowych przegubach. Przy 4-punktowym podparciu

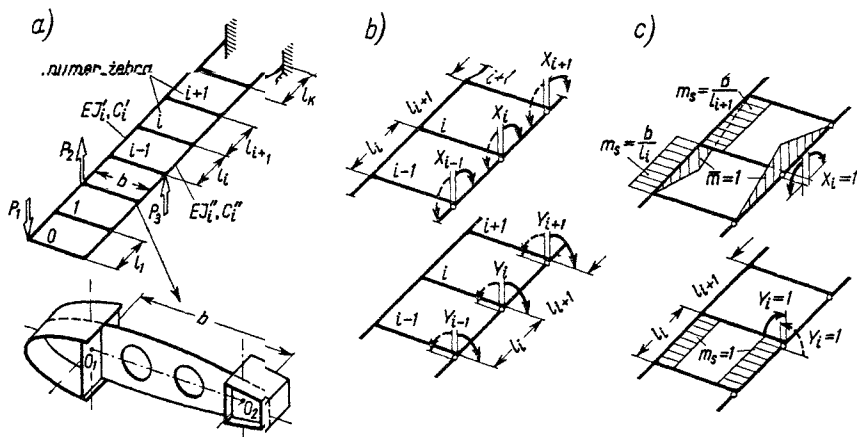


Rys. 5.42. Szczególny przypadek ramy wieloobwodowej

a) typowy element ramy z podłużnicami o profilu otwartym i rurowymi poprzeczkami; b) układ statycznie niewyznaczalnych grup X' przy obciążeniu antysymetrycznym; c) układ sił wewnętrznych (narysowany tylko dla połówki) wywołany jednostkową grupą X'_i (stan „i”).

naależy pamiętać, analogicznie jak w konstrukcji (rys. 5.41), o dodatkowej statycznie niewyznaczalnej reakcji.

e. 2-dźwigarowa konstrukcja z poprzeczkami wiotkimi na skręcanie (rys. 5.43) stosowana niekiedy w budowie samolotów jest ustrojem 2k-krotnie statycznie niewyznaczalnym. Aby zadanie uprościć,



Rys. 5.43. Wielosegmentowa konstrukcja 2-dźwigarowa.

a) szkice konstrukcji; b) układy statycznie niewyznaczalnych grup X i Y ; c) siły wewnętrzne w podłużnicach wywołane jednostkowymi grupami X_i i Y_i .

zakładamy dodatkowo, że poprzeczki (żebra) są idealnie sztywne, podłużnice (dźwigary) równoległe, natomiast same podłużnice nie są jednakowe (różne sztywności EJ'_i , EJ''_i , C'_i , C''_i). Z uwagi na wiotkość żebier na skręcanie do zamiany ustroju na statycznie wyznaczalny wystarcza wprowadzenie w każdym segmencie (obwodzie) przegubu kulistego. Działające w tym myślowym przegubie rzeczywistego ustroju grupy momentów gnących X i skręcających Y (rys. 5.43b) przyjmujemy za statycznie niewyznaczalne. Ponieważ działanie obu tych grup (rys. 5.43c) zamyka się w obrębie dwóch lub nawet jednego segmentu, to postać równań M—M po pewnych prostych przekształceniach jest

$$Y_i = (b/l_i) (C''_i/C_i) (X_i - X_{i-1}) + (M'_{si}C''_i - M''_{si}C'_i)/C_i, \quad (h)$$

$$a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,0} = 0, \quad (j)$$

gdzie

$C_i = C'_i + C''_i$ — całkowita sztywność na skręcanie obu dźwigarów,

M'_s i M''_s — momenty skręcające dźwigary w stanie „0”.

Współczynniki równania (j) wyrażają się przez parametry $\xi_i = l_i/6EJ'_i$, $\eta_i = b^2/C_i l_i$ następująco

$$a_{i,i-1} = \xi_i - \eta_i,$$

$$a_{i,i} = 2(\xi_i + \xi_{i+1}) + (\eta_i + \eta_{i+1}),$$

$$a_{i,i+1} = \xi_{i+1} - \eta_{i+1},$$

przy czym zastępuje sztywność EJ'_i jest określona zależnością

$$1/EJ'_i = (1/EJ'_i) + (1/EJ''_i).$$

Wyraz wolny $a_{i,0}$ równań (j)

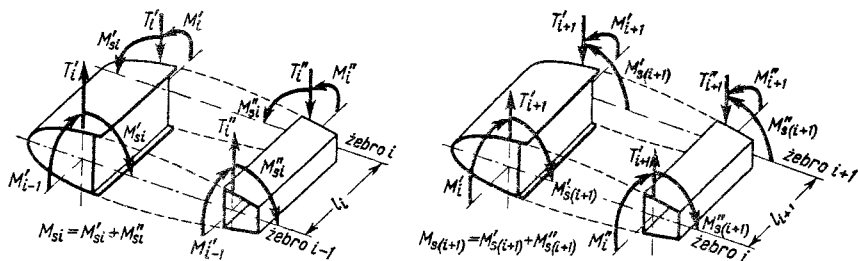
$$a_{i,0} = B''_i - B'_i + M_{si}\eta_i(l_i/b) - M_{s(i+1)}\eta_{i+1}(l_{i+1}/b),$$

gdzie pomocnicze wzory dla B''_i i B'_i

$$B'_i = (M'_{i-1} + 2M'_i)\xi'_i + (2M'_i + M'_{i+1})\xi'_{i+1},$$

$$B''_i = (M''_{i-1} + 2M''_i)\xi''_i + (2M''_i + M''_{i+1})\xi''_{i+1},$$

wyrażone są przez wartości momentów gnących M stanu „0” działających w pierwszym (M') i drugim (M'') dźwigarze w przekrojach odpowiadających kolejnym żebrom $i-1$, i oraz $i+1$, a $\xi'_i = l_i/6EJ'_i$, $\xi''_i = l_i/6EJ''_i$. Momenty M_{si} oraz $M_{s(i+1)}$ są całkowitymi momentami skręcającymi oba dźwigary na odcinku segmentów i oraz $i+1$ (rys. 5.44). Podobnie jak i w innych ustrojach tak i tutaj przy obliczaniu sił stanu „0” korzystamy bardzo często z reguły zamiany (art.1.4). Jeśli na przykład konstrukcja



Rys. 5.44. Dodanie zwoły sił stanu „0” w konstrukcji 2-dźwigarowej

jest wspornikowa, to często jako schemat statyczny stanu „0” przyjmujemy, iż każdy z dźwigarów pracuje na zginanie niezależnie od drugiego, to jest tak, jak gdyby wszystkie żebra były przecięte. Przy takim schemacie momenty skręcające dźwigary są równe zero i wtedy

$$a_{i,0} = B''_i - B'_i.$$

f. *Uwagi dodatkowe* podane poniżej mają na celu zapewnienie bezbłędного stosowania wyników opisanych poprzednio. Ponieważ najczęstszym źródłem błędów jest nieprawidłowe określenie wartości i zwrotów sił wewnętrznych stanu „0”, bądź stanów obciążeń jednostkowych, zaleca się rysowanie przebiegów tych sił w perspektywie z zaznaczeniem zwrotów (rys. 5.33). Dotyczy to zwłaszcza momentów skręcających, natomiast w odniesieniu do momentów gnących można się umówić, iż wartości ich odmierzamy prostopadłe do płaszczyzny ramy po tej stronie, po której występują śoisane włókna (patrz rys. 5.33, 5.39, 5.41 itd.). Drugim równie częstym źródłem błędów jest nieprawidłowość składania wyników dla otrzymania wypadkowych sił wewnętrznych. Zalecana tu metoda postępowania polega na tym, aby po określeniu statycznie niewyznaczalnych sił X lub Y powtórnie narysować w perspektywie odpowiednie przebiegi sił wewnętrznych odpowiadające obliczonym rzeczywistym wartościom X i Y (z uwzględnieniem ich zwrotów!) i dopiero potem składać te wykresy z wykresem sił stanu „0”.

Ostatnia uwaga dotyczy samych równań Maxwella—Mohra dla ram wieloobwodowych. We wszystkich rozważaniach równania te pismo dla segmentu otoczonego przez segmenty sąsiednie. Dla segmentów skrajnych brak jest jednego segmentu sąsiadującego z danym z lewej bądź z prawej strony. Powoduje to zmianę równań M — M wyrażających ciągłość przemieszczeń w tych skrajnych segmentach, a mianowicie jeśli rozpatrywany segment jest swobodny, to należy założyć, iż w brakuującym segmencie siły statycznie niewyznaczalne są równe zeru. Jeśli skrajny segment jest idealnie utwierdzony, to należy założyć, iż to utwierdzenie jest segmentem nieskończenie sztywnym. Tak więc w konstrukcji wspornikowej (rys. 5.43) pierwsze ($i = 1$) i ostatnie ($i = k$) równanie (j) mają postać

$$a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,0} = 0, \quad a_{k,k-1}X_{k-1} + a_{k,k}X_k + a_{k,0} = 0,$$

gdzie $a_{k,k}$ oblicza się przy założeniu $\xi_{k+1} = \eta_{k+1} = 0$, zaś $a_{k,0}$ przy założeniu $\xi'_{k+1} = \xi''_{k+1} = \eta_{i+1} = 0$.

5.8. Zadania

1. W pierścieniu (rys. 5.16) wprowadzono trzy przeguby ($\varphi_{1,2} = \pm 90^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$). Obliczyć przebieg sił wewnętrznych (N , T , M), jeśli obciążenie zostało bez zmian.

2. Ramę (rys. 5.11a) zamieniono na statycznie wyznaczalną wprowadzając trzy przeguby: w punkcie A i w środkach prętów BC i CD . Przyjmując $4a = l = 8$ m, $h = 4$ m, wyznaczyć przebieg momentów gnących i porównać z wynikiem pierwotnym (rys. 5.11g).

3. Statycznie wyznaczalną ramę (rys. 5.26b) obciążono czterema pionowymi siłami $P = 2$ t w punktach $1'$, $2'$, $3'$, $4'$. Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych w odcinku $2'2''3'3''$.

4. W ramie przedstawionej na rys. 5.26b przesunięto przeguby w podłużnicach do punktów $1'$, $1''$, ..., $4''$, otrzymując ramę typu podanego na rys. 5.5a. Wyznaczyć przebieg momentów gnących w podłużnicach, jeśli obciążenie jest takie jak na rys. 5.26a.

5. W konstrukcji (rys. 1.10a) podporę B zrobiono nieprzesuwną. Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych (M , T , N) i porównać z wynikiem poprzednim (rys. 1.10b). Zadanie rozwiązać przez sprowadzenie do schematu ramy 3-przegubowej (rys. 5.8b), wprowadzając dodatkowy przegub w przecie BD tuż obok punktu D . Czy jako stan „0” można przyjąć układ sił z rys. 1.10b?

6. Rozwiązać poprzednie zadanie zakładając, iż wielkością statycznie niewyznaczalną jest pionowa siłowa reakcja w punkcie B .

7. W ramie (rys. 1.10a) obydwa końce A i B idealnie utwierdzono. Obliczyć przebieg sił wewnętrznych przy ciągłym równomiernym obciążeniu $q = 1$ t/m działającym na całej długości AC i prostopadłym do AC .

8. Wyznaczyć pionowe przemieszczenie punktu C ramy z poprzedniego zadania. Czy jako wykresy od $P_{\text{dod}} = 1$ kG mogą tym razem służyć odpowiednio zredukowane wykresy z rys. 1.10b?

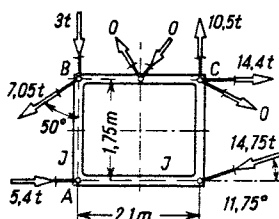
9. Wyznaczyć zmianę średnicy AB pierścienia (rys. 1.34), jeśli $\alpha = 0,25R$.

10. W symetrycznej 2-przegubowej ramie (rys. 5.6) $l = 1,5$ m, $h = 2$ m, $d = 0,3$ m, $r = r_1 = 0$ oraz $EJ = \text{const}$. Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych, jeśli $P = 2$ t, $a = 0,6$ m, $b = 0,6$ m.

11. W pierścieniu (rys. 5.16) dolny łuk AB ogrzano o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$. Wyznaczyć przebieg momentów gnących, jeśli $R = 0,5$ m, $\lambda = 20 \cdot 10^{-6}$ cm/cm $^\circ\text{C}$, $EJ = 2,7 \cdot 10^6$ kGem 2 .

12. W ramie (rys. 5.11a) ogrzano pręt BC w ten sposób, iż w dolnych włóknach $\Delta t_w = 80^\circ\text{C}$, w górnych $\Delta t_z = 120^\circ\text{C}$. Zakładając $l = 8$ m, $h = 4$ m, $EJ = 2EJ_1 = 4EJ_2 = 8 \cdot 10^{10}$ kGem 2 obliczyć naprężenia cieplne jeśli wiadomo, że wszystkie pręty mają przekroje symetryczne o jednakowej wysokości $h = 40$ cm a $\lambda = 12 \cdot 10^{-6}$ cm/cm $^\circ\text{C}$.

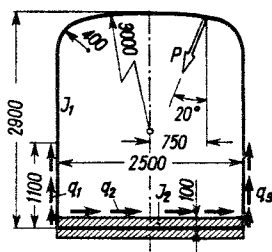
13. Wbudowana w kratownicę jednoobwodowa podwójnie symetryczna rama (rys. 5.45) obciążona jest oddziaływaniami dziewięciu prętów utrzymującymi ją w równowadze. Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych w ramie.



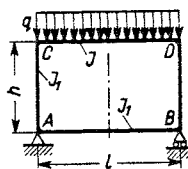
Rys. 5.45.

14. Wyznaczyć poziome przesunięcie naroża A ramy (rys. 5.45) przy założeniu, iż naroże B jest podparte przegubowo nieprzesuwnie, a naroże C — przegubowo przesuwnie w kierunku BC ($EJ = 3 \cdot 10^3$ kGem 2).

15*. Symetryczna wręga ($J_1 = 0,1 J_2$) (rys. 5.46) obciążona skupioną siłą $P = 500$ kG utrzymana jest w równowadze trzema oddziaływaniami stycznymi q_1 , q_2 i q_3 równomiernie rozłożonymi na odpowiednich odcinkach. Stosując tabelaryczny, względnie wykreślny sposób obliczenia całek występujących we wzorach (5.2) i (5.3) wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych.



Rys. 5.46.



Rys. 5.47.

16. Jaki winien być stosunek J_1/J_2 w podanej jednoobwodowej ramie (rys. 5.47), aby w belce CD naprężenia od zginania były możliwie jak najmniejsze.

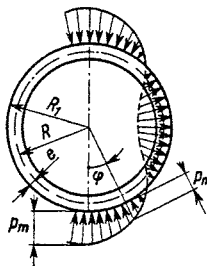
Wskazówka. Wykres momentów gnących w belce CD jest różnicą rzędnych parabol, jak gdyby w punktach C i D były przeguby ($M_{\max} = ql^2/8$), oraz rzędnych prostokąta. Optimum będzie wtedy, gdy $M_C = M_D = -ql^2/16$.

17. Na całym obwodzie pierścienia ($EJ = \text{const}$) działa obciążenie promieniowe $p_m \cos m\varphi$ ($m \geq 2$) (rys. 5.48). Udowodnić, iż obciążenie to jest samozrównoważone, a siły wewnętrzne wyrażają się następująco:

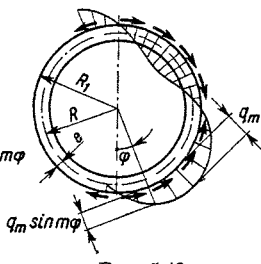
$$N = \frac{p_m R_1 \cos m\varphi}{m^2 - 1}, \quad T = -\frac{p_m R_1 m \sin m\varphi}{m^2 - 1}, \quad M = \frac{p_m R R_1 \cos m\varphi}{m^2 - 1}.$$

18. Na całym obwodzie pierścienia ($EJ = \text{const}$) działa obciążenie obwodowe $q_m \sin m\varphi$ ($m \geq 2$) (rys. 5.49). Udowodnić, iż obciążenie to jest samozrównoważone, a siły wewnętrzne wyrażają się następująco:

$$N = \frac{q_m R_1 m \cos m\varphi}{m^2 - 1}, \quad T = -\frac{q_m R_1 \sin m\varphi}{m^2 - 1}, \quad M = \frac{q_m R_1}{m} \left(\frac{R}{m^2 - 1} - e \right) \cos m\varphi.$$



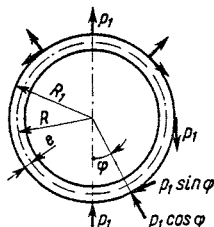
Rys. 5.48.



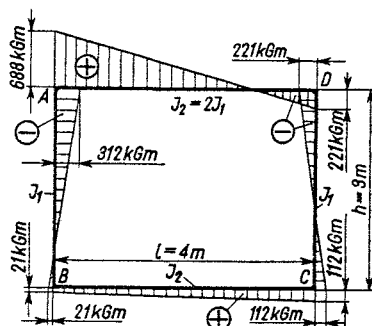
Rys. 5.49.

19. Udowodnić, że w pierścieniu kołowym ($EJ = \text{const}$) obciążonym na całym obwodzie w sposób ciągły (rys. 5.50) siły wewnętrzne wyrażają się za pomocą wzorów

$$N = -p_1 R_1 \cos \varphi, \quad T \equiv 0, \quad M_1 = p_1 e R_1 \cos \varphi.$$



Rys. 5.50.



Rys. 5.51.

20. W wyniku obliczenia jednoobwodowej ramy otrzymano wykres wypadkowych momentów gnących (rys. 5.51). Orzec czy wykres ten jest prawidłowy.

Wskazówka. Wprowadzając w dowolnym miejscu myślowy przekrój zbadać spełnienie warunku ciągłości przemieszczeń (brak przesunięcia i załomu).

21. Ramę (rys. 5.26a) obciążono w węzle 2' pionową siłą $P = 2$ t. Wyznaczyć przebieg momentów gnących w prętach.

22*. Dwuobwodowa płaska rama (rys. 1.36) obciążona jest momentami $M_A = 1$ tm, $M_C = 1$ tm. Wyznaczyć przebieg momentów gnących i sił tnących, jeśli $b_0 = 2$ m, $b_1 = 1,2$ m, $l = 2$ m, $EJ = \text{const}$.

23. Osie prętów ściśle płaskiej ramy (rys. 5.33) tworzą trapez równoramienny ($BE \parallel CD$, $BE = 1$ m, $CD = 2$ m, $BC = ED = 1,3$ m). Wyznaczyć przebieg M i M_s , jeśli $P_B = 1$ t, $E\bar{J} = 5C = \text{const}$, $M_F = 0$.

24. Powtórzmy zadanie 23 przy założeniu, iż obciążenia i wymiary ramy zostają bez zmian, natomiast zmieniają się sztywności, a mianowicie

$$E\bar{J}_{BE} = E\bar{J}_{CD} = 0,6E\bar{J}_{BC} = 0,4E\bar{J}_{ED}, \quad C_{BE} = C_{CD} = 2C_{BC} = C_{ED}, \quad E\bar{J}_{BE} = 5C_{BE}.$$

25. W punkcie A ramy (rys. 5.33a) ($E\bar{J}_1 = E\bar{J}_2 = 2C_1 = 4C_2 = 8,10^9$ kGcm², $l = 2b = 2$ m) przmocowanej w punktach BED do nieodkształcalnego podłoża istnieje między tym punktem a podłożem pionowy luz $f = 2$ cm. Jaka najmniejsza pionowa siła należy przyłożyć w punkcie A , aby ten luz skasować. Jakie będą wtedy siły wewnętrzne?

26. Na kołowy pierścień (rys. 5.36) działa prostopadle do jego płaszczyzny ciągle obciążenie $q_m \cos m\varphi$ ($m \geq 2$). Udowodnić, że obciążenie to jest samozrównoważone, a siły wewnętrzne (dodatnie zwroty według rys. 5.37) są

$$T = \frac{q_m R_1 \sin m\varphi}{m}, \quad M_s = \frac{q_m R^2 \sin m\varphi}{m(m^2 - 1)}, \quad \bar{M} = \frac{q_m R^2 \cos m\varphi}{m^2 - 1}.$$

27. Obciążony nądal tą samą siłą P pierścień (rys. 5.36) oparty jest nie na sprężystym podłożu, lecz na trzech podporach ($\varphi_1 = -90^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$, $\varphi_3 = 150^\circ$). Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych.

28. Pierścień kołowy o stałym przekroju obciążono prostopadle do jego płaszczyzny sześcioma jednakowymi co do wartości siłami równomiernie rozstawionymi na obwodzie, przy czym zwroty kolejnych sił są przeciwnie. Wykorzystując zasadę jednoznaczności rozwiązania (art. 1.5) obliczyć przebieg sił wewnętrznych (bez pomocy równań $M - M$).

29*. Jednoobwodową symetryczną względem EF ramę (rys. 5.38) o wymiarach $a = c = 0,5$ m, $b = d = 2$ m, $h = 3$ m, $E\bar{J} = 2C = \text{const}$ obciążono siłą $P_3 = 5$ t przyłożoną w połowie długości KG . Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych.

30*. Jak zmieniają się siły wewnętrzne w ramie (zad. 29), jeśli na skutek błędu wykonania rama leży początkowo tylko na podporach A, B, D , podczas gdy między punktem C ramy a podłożem istnieje luz $f_0 = 1$ cm? ($E\bar{J} = 6 \cdot 10^9$ kGcm²).

31*. Wspornikową 2-obwodową ramę (rys. 1.36) o wymiarach $b_0 = 2$ m, $b_2 = 1,5$ m, $l = 2$ m i jednakowej sztywności wszystkich prętów, $E\bar{J} = 2C = 4 \cdot 10^{10}$ kGcm², obciążono w punkcie C prostopadle do płaszczyzny ramy skupioną siłą $P = 2$ t. Obliczyć przebieg sił wewnętrznych.

32*. Wspornikową ramę (rys. 5.26) obciążono w punkcie O' prostopadle do jej płaszczyzny skupioną siłą $P = 1$ t. Przyjmując, iż przy zginaniu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ramy $E\bar{J} = 3C$ dla wszystkich prętów, naszkicować przebieg rozwiązania.

33*. Nie ruszając poprzeczek, podłużnice ramy (zad. 31) przekształcono tak, że zachowując swą pierwotną sztywność $E\bar{J}$ stają się całkowicie wiotkie na skręcanie. Jak zmieni się skutek tego przebieg sił wewnętrznych?

34*. Nie ruszając podłużnic, poprzeczki ramy (zad. 31) przekształcono tak, że zachowując swą pierwotną sztywność $E\bar{J}$ stają się one całkowicie wiotkie na skręcanie. Jak zmieni się na skutek tej modyfikacji przebieg sił wewnętrznych?

35*. 7-obwodowa wspornikowa rama (rys. 5.43a) o wymiarach $b = 1$ m, $l_1 = \dots = l_7 = 0,8$ m, $E\bar{J}_i = 4E\bar{J}_i' = \text{const} = 1,4 \cdot 10^9$ kGcm², $C_i = 8C_i' = \text{const} = 2,8 \cdot 10^7$ kGcm² obciążona jest tylko jedną siłą $P_1 = 1$ t. Zakładając, iż zebra są nieskończenie sztywne na zginanie i idealnie wiotkie na skręcanie, obliczyć przebieg momentów gnących w obu dźwigarach.

KONSTRUKCJE CIENKOŚCIENNE

WSTĘP. PODZIAŁ ZAGADNIEŃ

Ogromnej różnorodności zastosowań i ukształtowań cienkościennych konstrukcji (tabl. 6.1) odpowiada równie duża różnorodność zagadnień statyki tych konstrukcji. Uporządkowanie tych zagadnień staje się możliwe, jeśli zauważyć, że wszystkie te konstrukcje zawierają się między dwoma przypadkami skrajnymi, a mianowicie ustrojami typu *A*, które niezależnie od swej cienkościennej konstrukcji zbliżają się swym wyglądem do modelu pręta lub belki, oraz ustrojami typu *B*, których wszystkie gabarytowe wymiary (długość l , wysokość h , szerokość b) są tego samego rzędu. W konsekwencji tego mamy zatem dwie skrajne grupy zagadnień, a mianowicie *statyki cienkościennych prętów* ($l \gg h, l \gg b$) i *statyki cienkościennych brył* ($l \approx b \approx h$), przy czym w obu tych grupach maksymalna grubość ścianki $\delta_{\max}$ jest mała (np. 0,1c) w porównaniu z najmniejszym gabarytowym wymiarem c . Zagadnienia statyki wszystkich innych konstrukcji zawierają się między tymi dwoma granicznymi przypadkami, a zakwalifikowanie ich do jednej lub drugiej kategorii jest kwestią pewnej dowolności, zależnie od tego, w jakim stopniu chcemy wniknąć w szczegóły pracy konstrukcji. Uprowadzając bowiem dalsze rozważania można jako regułę podać, iż *analiza konstrukcji traktowanej jako cienkościenna bryła, lub zespół takich brył, daje znacznie więcej informacji odnośnie wytrzymałości niż sposób pierwszy*.

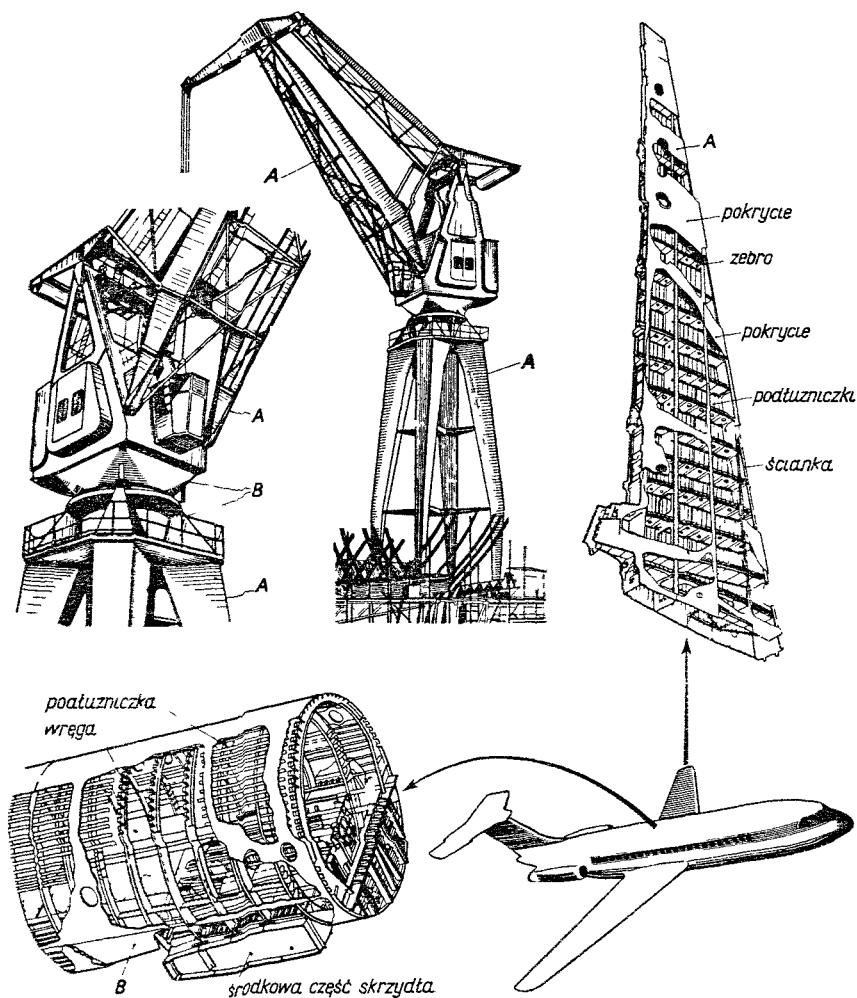
W rzeczywistych konstrukcjach ta względnie jasna klasyfikacja jest z reguły zaciemniona i to z dwóch powodów:

Jeden z nich wynika ze stosowania cienkościennych prętów, jako elementów składowych cienkościennych brył. Widać to wyraźnie w bryle kadłuba (tabl. 6.1), której ruszt złożony jest z wzdłużnych cienkościennych profili i poprzecznych również cienkościennych wręg. W takiej konstrukcji analiza wytrzymałościowa dzieli się na etap analizy bryły kadłuba jako całości i etap analizy elementów prętów wyizolowanych z całości i obciążonych odpowiednimi oddziaływaniami.

Powodem drugim jest to, że w jednej i tej samej konstrukcji rozpatrywanej jako całość mogą występować jednocześnie i zagadnienia statyki prętów i zagadnienia statyki brył. Klasycznym przykładem tego jest przypadek raptownej zmiany przekroju prętów cienkościennych, gdzie przejście od stanu napięć w części nieosłabionej do stanu napięć w osłabionej wykrojem części odbywa się na odcinku pręta o długości tego samego rzędu co i gabarytowe wymiary przekroju poprzecznego i zagadnienie określenia napięć w tej części pręta ma wyraźnie charakter statyki bryły.

Podana klasyfikacja narzuca podział treści w ten sposób, że w rozdz. 6 zajmować się będziemy statyką cienkościennych prętów, w rozdz. 7 statyką brył, a w rozdz. 8 zagadnieniami mieszanymi.

Tablica 6.1

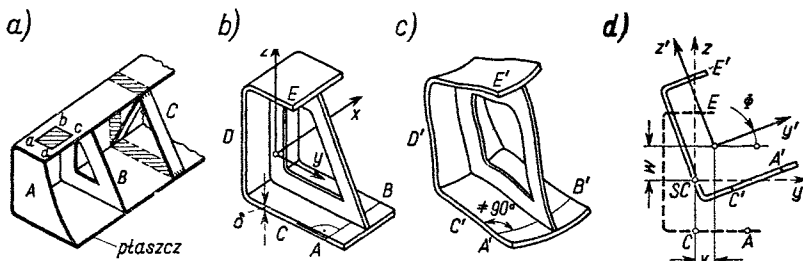


6. STATYKA CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW

6.1. Podstawowe założenia i zależności

Typowy cienkościenny pręt (rys. 6.1a) składa się z płaszcza biegnącego wzdłuż osi x pręta oraz elementów poprzecznych tzw. żebrowania w postaci cienkościennych przepon bądź płaskich ram lub kratownic. Tak ukształtowane żebra cechuje bardzo duża sztywność w ich płaszczyznach, a jednocześnie duża podatność w kierunku prostopadłym do tych płaszczyzn. Dążąc do uproszczenia rozważań idealizujemy te cechy zakładając (I zało-

żenie podstawowe) całkowitą nieodkształcalność żebra w ich płaszczyznach oraz ich całkowitą wiotkość w kierunku prostopadłym do tych płaszczyzn. Jednocześnie zakładamy (II założenie podstawowe), że te wyidealizowane żebra rozstawione są bardzo gęsto, na skutek czego każdy nawet krótki element pręta ma odpowiadające mu własne żebro. Konsekwencją takiej idealizacji ustroju jest to, że jedynymi możliwymi* odkształceniami pierwotnie prostego elementu pręta (rys. 6.1b) są odkształcenia płaszcza (rys. 6.1c) polegające na zmianie długości włókien (np. AB na $A'B'$), zmianie pierwotnie prostych kątów (np. $\angle CAB$ na $\angle C'A'B'$). Osobnym rodzajem odkształcenia jest możliwość



Rys. 6.1. Obraz budowy i odkształceń cienkościennego pręta

a) typowe rozwiązanie konstrukcyjne z żebrem pełnościenne (A), ramowym (B) i kratowym (C), w którym zakreślona część spełnia podwójną rolę jako element żebra i płaszcza; b), c) element płaszcza przed i po odkształceniu; d) obraz przemieszczeń przekroju pręta w jego płaszczyźnie, podane v , w i Φ przyjmuje się za dodatnie.

przejścia pierwotnie płaskiego przekroju $ACDE$ w niepłaski $A'C'D'E'$. Temu odkształceniu, tzw. *spaczeniu przekroju*, nie mogą przeciwstawić się idealnie wiotkie w tym kierunku żebra, uniemożliwiają natomiast one odkształcenie w płaszczyźnie przekroju. Innymi słowy rzut zdeformowanego przekroju $A'C'D'E'$ na płaszczyznę żebra jest identyczny z takimż rzutem pierwotnego przekroju $ACDE$, aczkolwiek może być on względem tego pierwotnego rzutu przesunięty i obrócony jako sztywna całość (rys. 6.1d).

Przejdźmy obecnie do jakościowej analizy stanu napięć w płaszczu. Wycinając z płaszcza (rys. 6.1a) elementarną kostkę $abcd$ zauważmy, iż z uwagi na małą grubość δ tego płaszcza oraz gęste podparcie przez żebra, naprężenia normalne jak i styczne w kierunku prostopadłym do płaszcza nie mogą być duże. Opierając się ponadto na wynikach wielu doświadczeń, zaniedbujemy naprężenia σ_z w kierunku obwodowym (rys. 6.2a), w rezultacie czego dochodzimy (III założenie podstawowe), że jedynymi naprężeniami w płaszczu są σ_x i τ , przy czym opierając się znowu na wynikach doświadczeń zakładamy (IV założenie podstawowe), iż są one równomiernie rozłożone wzdłuż grubości δ . To ostatnie założenie pozwala wprowadzić wygodniejsze w wielu przypadkach pojęcia *wydatku normalnego* n_x i *stycznego* q

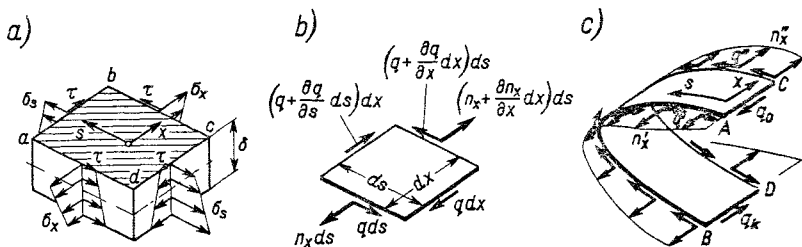
$$n_x = \sigma_x \delta, \quad q = \tau \delta \quad (6.1)$$

Wydatki te przedstawiają wypadkowe oddziaływanie paska płaszcza o grubości δ i jednostkowej szerokości mierzonej w poprzecznym przekroju pręta. Z równości naprężeń

* Przy opisie odkształceń (rys. 6.1c) nie interesują nas przyczyny, które wywołały te odkształcenia. Podobnie jak w belce (rys. 1.11) konsekwencją podanego sposobu podparcia jest możliwość obrotu belki na podporze A bez możliwości przesuwu, a na pozostałych podporach możliwość obrotu i poziomego przesuwu, tak i tu obraz odkształceń (rys. 6.1c) jest konsekwencją narzuconych więzów.

stycznych τ w prostopadłych przekrojach ad i cd wynika reguła o równości wydatków stycznych q w tych przekrojach.

Konsekwencją przyjętego stanu napięć w płaszczu są dwie podstawowe zależności, które muszą spełniać wydatki n_x i q . Na skutek różnych wydłużeń i różnych odkształceń postaciowych (rys. 6.1c) wydatki te mogą być funkcjami współrzędnej s mierzonej po obwodzie płaszcza. Z uwagi ponadto na różne warunki pracy elementów pręta (zmienny moment gnący, siła tnąca itp.) należy przyjąć, iż n_x i q mogą być również funkcjami współ-



Rys. 6.2. Stan napięć w elemencie płaszcza

a) układ naprężeń; b) układ wydatków w wyniku III i IV założenia podstawowego; c) układ napięć w odcinku płaszcza; podane zwroty q i n_x przyjęto za dodatnie.

rzędnej x . Ograniczając się do najczęstszego w praktyce przypadku pręta o pryzmatycznym obrysie płaszcza (lecz niekoniecznie stałej grubości), wytnijmy teraz między kolejnymi żebrami nieskończenie mały element płaszcza i rozpatrzmy jego równowagę. Zgodnie z przyjętym schematem pracy układ wydatków przedstawiających oddziaływania reszty konstrukcji na rozpatrywany element jest taki, jak podaje rys. 6.2b. Z warunku równowagi rzutów na oś s i x otrzymujemy dwie podstawowe zależności

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad (6.2)$$

głoszące, iż w cienkościennym pręcie o pryzmatycznym obrysie płaszcza:

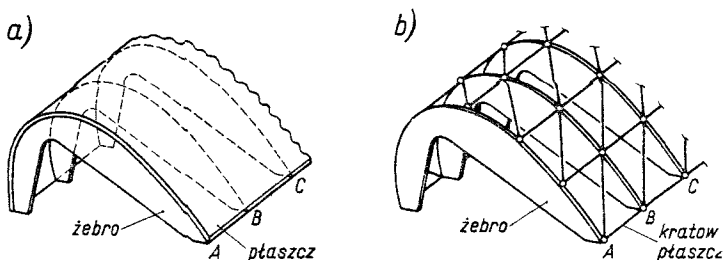
a. Wydatek styczny q na odcinku między kolejnymi żebrami* jest funkcją jednej tylko współrzędnej s .

b. Jeśli w jakimkolwiek zagadnieniu statyki cienkościennego pręta rozkład jednego z wydatków (np. n_x) jest znany, to wartość drugiego wydatku (tj. q) można wyznaczyć z drugiego równania (6.2). Obydwa powyższe twierdzenia można stosować i wtedy, gdy obrys płaszcza jest powierzchnią zakrzywioną (cylindrem), gdyż nie wpływa to w żadnej mierze na układ sił (rys. 6.2b), a więc i na równania (6.2). W wyniku więc otrzymujemy obraz sił wewnętrznych w płaszczu o pryzmatycznym obrysie taki, jak podaje rys. 6.2c, na którym zaznaczono dodatnie n'_x lub n''_x odpowiadające rozciąganiu wzdłużnych włókien płaszcza i dodatnie wartości q w obranym układzie osi współrzędnych x i s .

Dla lepszego zrozumienia wprowadzonych założeń dotyczących odkształceń i naprężeń, celowe jest zdać sobie sprawę, iż w wyniku tych założeń uproszczony model cienkościenn-

* Zastrzeżenie to jest niezmiernie istotne. Gdyby bowiem na rozpatrywanym odcinku płaszcza było dołączone zebro, to w równaniu równowagi rzutów na oś s należałoby uwzględnić oddziaływanie zebra na płaszcz.

nego pręta nie różni się niczym istotnym od konstrukcji tarczowo kratowej (rys. 6.3), w której siatka prętów na poboczniczy spełnia rolę płaszcza, a cienkie tarcze nieodkształcalne w swych płaszczyznach i jednocześnie idealnie wiotkie w kierunku prostopadłym do tych płaszczyzn spełniają rolę żebier. Analogia ta ułatwia w wielu przypadkach analizę konstrukcji i dlatego będziemy z niej niejednokrotnie korzystać.



Rys. 6.3. Równoważność statyczna dwóch konstrukcji
a) pręt cienkościenny; b) równoważny prętowi ustroj tarczowo kratowy.

6.2. Czyste ścinanie płaszcza. Skręcanie rur jednoobwodowych

Założmy, że w otwartym odcinku płaszcza (rys. 6.4a) wydatki $n_x \equiv 0$. Z równań (6.2) wynika wtedy, że jedynym możliwym stanem napieć w płaszczu jest stan czystego ścinania

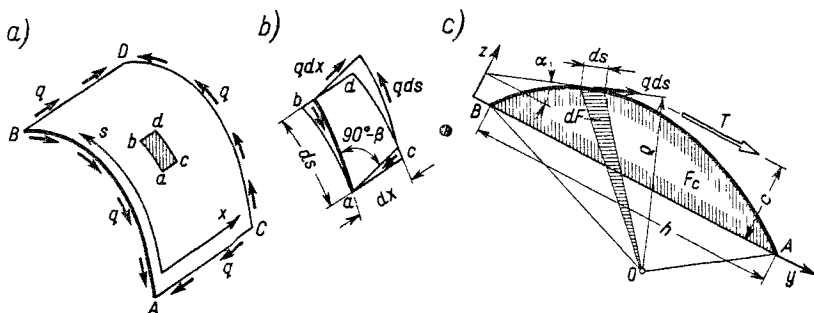
$$q(x, s) = q = \text{const}, \quad (a)$$

któremu odpowiada postaciowe odkształcenie każdego elementu płaszcza określone kątem β (rys. 6.4b) równym

$$\beta = q/G\delta. \quad (b)$$

Wypadkowa T wydatków q w każdym przekroju $x = \text{const}$ jest równoległa do cięciwy AB . Wynosi ona

$$T = qh \quad (6.3)$$



Rys. 6.4. Stan czystego ścinania otwartego odcinka płaszcza
a) układ napieć; b) odkształcenia; c) oznaczenia i określenie położenia wypadkowej T .

i biegnie w odległości c od tej cięciwy

$$c = 2Fq/h. \quad (6.4)$$

Momentem M wydatków q działających w każdym przekroju $x = \text{const}$ względem obranego punktu O jest

$$M = 2Fq, \quad (6.5)$$

gdzie F — pole ograniczone łukiem AB i promieniami OA i OB .

Aby dowieść powyższych stwierdzeń, zauważmy, że rzuty elementarnej siły $q \, ds$ na cięciwę AB (oś y) i na oś z są

$$q \, ds \cos \alpha = q \, dy, \quad q \, ds \sin \alpha = q \, dz,$$

a odpowiednie sumy rzutów

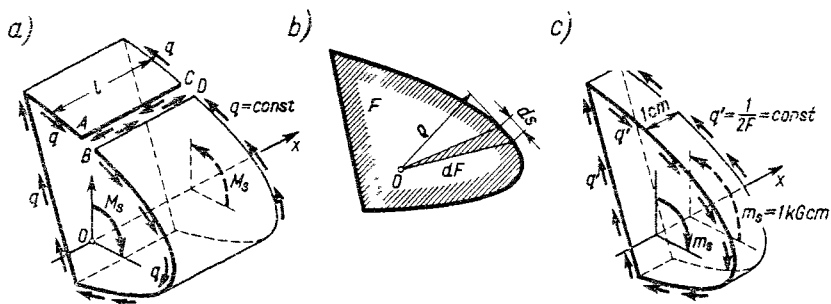
$$T = \int_{BA} q \, dy = q(y_A - y_B) = qh, \quad \int_{BA} q \, dz = q(z_A - z_B) = 0.$$

Tak więc całkowita wypadkowa jest równoległa do AB . Moment elementarnej siły $q \, ds$ względem punktu O jest $q \, ds \, \rho = q^2 \, dF$, a całkowity moment M z uwagi na $q = \text{const}$ wynosi

$$M = \int_{BA} q^2 \, dF = 2q \int_{BA} dF = 2qF.$$

Jeśli teraz punkt O leży na cięciwie, to $F = F_c$. Na koniec z równoważności momentu $M_c = 2F_c q$ i momentu siły wypadkowej $T_c = qhc$ otrzymujemy wzór (6.4).

Omówiony przypadek czystego ścinania ma dla statyki konstrukcji podstawowe znaczenie i stanowi punkt wyjścia w wielu zagadnieniach. Jednym z takich zagadnień jest skręcanie rur jednoobwodowych. Założmy mianowicie, że cienkościenna rura walcowa wzmocniona oczywiście zębami (art. 6.1) obciążona jest w dwóch przekrojach $x = \text{const}$ wydatkami $q = \text{const}$ (rys. 6.5a). Rozcinając myślowo tę rurę wzdłuż jednej tworzącej



Rys. 6.5. Skręcanie walcowej rury jednoobwodowej
a), b) układ napręć i oznaczenia; c) stan napręć wywołany przez $m_s = 1 \text{ kg/cm}$.

musimy na obydwu nowo powstałych krawędziach AC i BD przyłożyć wydatki q (patrz reguła art. 6.1) przedstawiające oddziaływania jednej krawędzi na drugą. Traktując tak rozciętą rurę jako szczególny przypadek ścinania otwartego płaszcza (rys. 6.4), gdy $h = 0$, otrzymujemy ze wzoru (6.3) $T = 0$, a ze wzoru (6.5) wypadkowy moment względem dowolnego punktu O równy $M = 2Fq$, gdzie F — zakreskowane pole (rys. 6.5b). Oznacza

to, że w każdym przekroju $x = \text{const}$ wypadkowa wszystkich sił wewnętrznych jest momentem o wektorze równoległym do tworzących rury, a więc momentem skręcającym. Jeśli więc, na odwrót, przyłożymy do rury moment skręcający M_s w ten sposób, że w dwóch przekrojach $q = \text{const}$, to wartość wydatków q wywołanych przez ten moment

$$q = M_s/2F. \quad (6.6)$$

Kąt skręcenia φ na jednostkę długości wyznaczmy z ogólnych reguł art. 1.2. Obciążając mianowicie jednostkowy odcinek rury momentami $m_s = 1$ kGem, wywołującymi wydatki $q' = 1/2F$ (rys. 6.5c), obliczmy pracę sił wewnętrznych q (rys. 6.5a) na przemieszczeniach $\beta' = 1/2GF\delta$ (patrz wzór b) wywołanych momentami m_s . Zgodnie z regułą art. 1.2 i wzorem (1.9) ta praca równa $\oint q\beta' ds \cdot 1$ jest uogólnioną współrzędną odpowiadającą jednostkowemu obciążeniu, a więc szukanemu kątowi φ . Podstawiając wartości q (wzór 6.6) i β' otrzymamy w wyniku

$$\varphi = \frac{M_s}{4GF^2} \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{M_s p}{4GF^2}, \quad (6.7)$$

gdzie $p = \oint (ds/\delta)$ — bezwymiarowy obwód całej rury. W większości przypadków ścianka płaszcza ma odcinkami (s_i) grubość (δ_i) stałą i wtedy

$$p = \sum (s_i/\delta_i), \quad (c)$$

a gdy ta grubość jest stała na całym obwodzie s_c , to

$$p = s_c/\delta. \quad (d)$$

Wzory (6.6) i (6.7), noszące nazwę *wzorów Bredta*, opierają się na założeniu równomiernego wzdłuż grubości ścianki rozkładu naprężeń stycznych. Ich dokładność w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym odrzucającym to założenie jest tym lepsza, im rura jest bardziej cienkościenna. Dla rury kołowej na przykład ścisłe rozwiązanie daje stosunek $\tau_{\max}$ (we włóknach zewnętrznych) do τ_{sr} (w połowie grubości) równy

$$1 + (\delta/2\varrho). \quad (e)$$

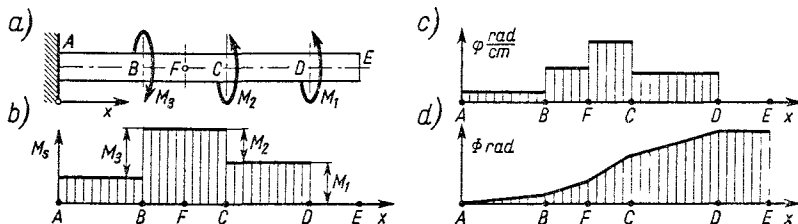
Ponieważ τ_{sr} jest identyczne z wartością, którą otrzymamy z wzoru Bredta, to wzór (e) określa błąd jaki popełniamy stosując wzór (6.6). Dla rur o $\varrho/\delta > 25$ błąd ten nie przekracza 2%, co jest dokładnością wystarczającą dla potrzeb techniki. Jeśli płaszczyz rury ma na obwodzie załomy (rys. 6.4a), to wzór Bredta (6.6) daje dokładny techniczny wynik w punktach obwodu odległych od załomu o $2 \div 3\delta$. W samym załomie następuje lokalne spiętrzenie naprężeń, które w obliczeniach technicznych pomijamy.

Wzory Bredta opisują tzw. *skręcanie swobodne*, przy którym zgodnie z założeniem $n_r \equiv 0$. Ponieważ, jak wykazuje bardziej szczegółowa analiza, przekrój poprzeczny skręcanej rury ulega nie tylko obrotowi lecz i na ogół spaczaniu*, to spełnienie warunku $n_x \equiv 0$ jest możliwe tylko wtedy, gdy podparcie przekrojów końcowych daje swobodę

* Wyjątek stanowią rury kołowe o $\delta = \text{const}$, a ponadto przekroje, w których zmienność $\delta(s)$ specjalnie dobrano.

wzdłużnych przemieszczeń. W przypadku skręcanej rury wspornikowo przymocowanej do podłoża jest to spełnione wtedy, gdy rura połączona jest z podłożem tylko w trzech punktach (analogia do unieruchomienia bryły). Każde inne połączenie w więcej niż trzech punktach powoduje pojawienie się naprężeń wzdłużnych. W takim przypadku wzory Bredta stanowią jedynie pierwsze przybliżenie, od którego wartości rzeczywiste (patrz rozdz. 8) mogą różnić się o 20÷30%.

W zagadnieniach praktycznych moment skręcający jest z reguły zmienny wzdłuż osi x rury (rys. 6.6a). W takim przypadku wydatki q w danym przekroju x obliczamy z wzoru (6.6), wstawiając odpowiednią wartość $M_s(x)$ (rys. 6.6b). Jednostkowy kąt skręcenia φ



Rys. 6.6. Typowa analiza skręcanej rury

a) układ obciążeń rury o sztywności na odcinku AF większej niż na odcinku FE ; b), c), d) wykresy M_s , φ i Φ wzdłuż osi rury.

(wzór 6.7) jest też na ogół zmienny wzdłuż osi x (rys. 6.6c) i to nie tylko na skutek zmienności M_s , lecz możliwej zmienności parametrów geometrycznych (F , δ). Całkowity kąt skręcenia Φ obliczamy całkując od przekroju utwierdzonego do przekroju rozpatrywanego i otrzymujemy wartość

$$\Phi = \int_0^x \varphi(x) dx, \quad (6.8)$$

którą przedstawiamy zazwyczaj wykreślnie (rys. 6.6d). Podany sposób jest tym dokładniejszy im bardziej rozpatrywana rura zbliża się do modelu pręta. Dokładniejsza analiza działania zmiennego $M_s(x)$ dla krótkich ustrojów podana jest w rozdz. 8.

6.3. Swobodne skręcanie profili otwartych

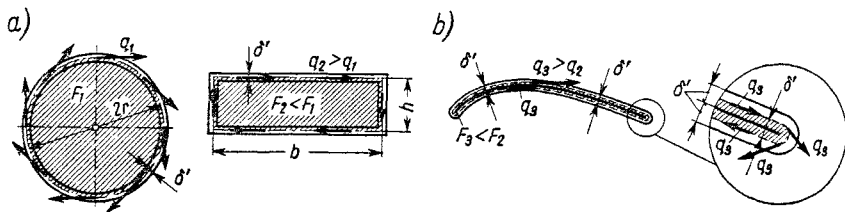
Przeprowadzona analiza czystego ścinania otwartego płaszcza (art. 6.2) wykazała, że może on prawidłowo przenosić obciążenie siłami T przyłożonymi za pośrednictwem żeber w ściśle określonej odległości c , przy jednoczesnym oczywiście wzdłużnym unieruchomieniu krawędzi AC i BD . Zbadajmy teraz kwestię zachowania się takiego odcinka (profilu otwartego), przy obciążeniu go momentami skręcającymi M_s . W tym celu weźmy rurowy płasek o stałym obwodzie s_c i stałej grubości ścianki δ' . Płasek ten możemy kolejno połączyć żebrami o coraz to innym kształcie (rys. 6.7a) i różnym polu F . W granicznym przypadku (rys. 6.7b)

$$F = s_c \delta' / 2 \approx s \delta / 2,$$

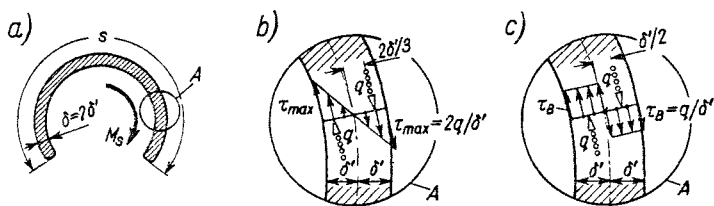
a rura zmienia się na otwarty profil o grubości ścianki $\delta = 2\delta'$ i długości linii środkowej $s = s_c/2$. Stosując w tym przypadku wzory Bredta (6.6) i (6.7) otrzymujemy

$$\tau_B \approx 2M_s/s\delta^2, \quad \varphi_B \approx 4M_s/Gs\delta^3. \quad (a)$$

Otrzymane wartości naprężeń i odkształceń są jedynie przybliżone. W rzeczywistości bowiem, jak dowodzi tego teoria sprężystości, naprężenia styczne przy skręcaniu profilu otwartego zmieniają się liniowo wzdłuż grubości δ (rys. 6.8.), co odbiega od rozkładu



Rys. 6.7. Różne ukształtowanie rur o tej samej wartości s_c/δ'
a) typowe profile rurowe; b) przypadek graniczny przejścia od rury do profilu otwartego.



Rys. 6.8. Porównanie rzeczywistego rozkładu τ z przybliżonym
a) profil otwarty; b) rzeczywisty rozkład; c) rozkład τ odpowiadający wzorom Bredta.

założonego przy wyprowadzaniu wzorów Bredta. Na skutek tego rzeczywiste wartości $\tau_{\max}$ i φ są inne niż τ_B i φ_B , a mianowicie

$$\tau_{\max} = 1,5\tau_B = 3M_s/s\delta^2, \quad \varphi = 0,75\varphi_B = 3M_s/Gs\delta^3. \quad (6.9)$$

Aby naocznie dobitnie różnicę między zachowaniem się rury i otwartego profilu przy swobodnym skręcaniu, prześledźmy co się stanie z naprężeniami i kątem skręcenia, jeśli kołową rurę (wymiary r i δ) rozciąć wzdłuż tworzącej przekształcając ją na profil otwarty (wymiary $s = 2\pi r$ i δ). Przy jednakowym M_s ze wzorów (6.6) i (6.9) mamy

$$\tau_{\text{rury}} = M_s/2\pi r^2 \delta, \quad \tau_{\max \text{ prot}} = 3M_s/2\pi r \delta^2,$$

a ich stosunek

$$\tau_{\max \text{ prot}}/\tau_{\text{rury}} = 3r/\delta. \quad (b)$$

Podobnie obliczamy stosunek kątów skręcenia

$$\varphi_{\text{prot}}/\varphi_{\text{rury}} = 3(r/\delta)^2 \quad (c)$$

i jeśli $r/\delta = 50$, to $\tau_{\max \text{ prot}}/\tau_{\text{rury}} = 150$, $\varphi_{\text{prot}}/\varphi_{\text{rury}} = 7500$. Wynika stąd wniosek, iż w porównaniu z konstrukcjami rurowymi profile otwarte mające swobodę spaczenia przekroju

poprzedniego są praktycznie nieszytywne na skręcanie. W niektórych jednak zagadnieniach (np. stateczności) ta niewielka sztywność C (kGcm^2) swobodnego skręcania zdefiniowana jako

$$\varphi = M_s/C \quad (6.10)$$

może decydować o zachowaniu się całej konstrukcji. Z tego powodu dla najczęściej spotykanych profili podano wartości C w tabl. 6.2.

SZTYWNOŚĆ PROFILI OTWARTYCH PRZY SWOBODNYM SKRĘCANIU

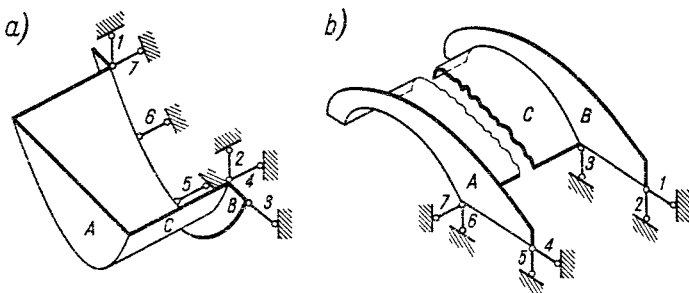
Tablica 6.2

	$C \approx \frac{G}{3} \sum_{i=1}^k s_i \delta_i^3$	Dokładność wzoru $\pm 6\%$, gdy dla każdego z boków $(s_i/\delta_i) > 8$	Wzory przybliżone	
	$C \approx G(2I_1 - I_2)$	$I_1 = 0,33b\delta_p^3[1 - 0,63(\delta_p/b)],$ $I_2 = 0,33h\delta^3[1 - 0,32(\delta/h)],$ Dokładność wzoru $\pm 3\%$, gdy (b/δ_p) i $(h/\delta) > 8$		
	$C = G(I_1 - I_2 - \xi D^4)$	$I_1 = 0,33b\delta_p^3[1 - 0,63(\delta_p/b)]$ $I_2 = 0,33h\delta^3[1 - 0,32(\delta/h)]$ $\xi = (\delta_1/\delta_2)[0,15 - 0,1(r/\delta_p)]$ $\delta_1 = \delta_p, \delta_2 = \delta, \text{ gdy } \delta_p > \delta;$ $\delta_1 = \delta, \delta_2 = \delta_p, \text{ gdy } \delta_p < \delta$	Wzory bardziej dokładne	
	$C = G(I_1 - I_2 - \xi D^4)$	$D - \text{maksymalna średnica koła wpisanego}$		
	$C = G(I_1 + I_2 - \xi D^4)$	$I_1, I_2 \text{ jak powyżej, przy czym zawsze } \delta_p > \delta$ $\xi = (\delta_p/\delta)[0,07 + 0,08(r/\delta_p)]$ $D - \text{maksymalna średnica koła wpisanego}$		
	$C = \frac{1}{3} G(b+h)\delta^3 \left[1 + \frac{4,14 + 4,71(r/\delta)^4}{(b+h)/\delta} \right]$ Wzór stosowalny, gdy $1,0 < (r/\delta) < 2,0$			

Ta właściwość małej sztywności C profili otwartych wyklucza ich stosowanie w tych wszystkich urządzeniach, w których działają duże momenty skręcające*. Istnieją jednak

* Przypadek, gdy profil otwarty dzięki dodatkowym utwardzeniom uniemożliwiającym swobodne spłaszczenie przekroju może przenosić duże momenty skręcające, omówiony jest w art. 6.7.

przypadki, gdy ta właściwość staje się nieocenioną zaletą, a mianowicie gdy ustrój (rys. 6.9) opiera się na podłożu w czterech punktach i ma być nieczuły na błędy montażu (np. nierówności toru), analogicznie jak niektóre kratownice (patrz art. 3.6).

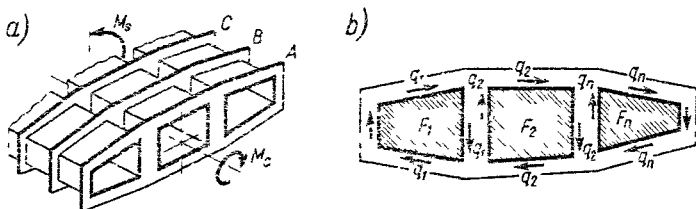


Rys. 6.9. Konstrukcje nieczułe na błędy montażu

a) ustrój wspornikowy, A i B żebra, C — płaszczyzna, wiezy 1,2,3 unieruchamiają płaszczyznę zęba B, pozostałe usuwają przesunięcia wzdłużne, b) ustrój z 2 podporowymi belkami, wiezy 1,2,3 i 4,5,6 unieruchamiają płaszczyznę zęba A i B.

6.4. Swobodne skręcanie rur wieloobwodowych

W praktyce spotyka się niekiedy ustrój stanowiące połączenie w jeden zespół kilku rur jednoobwodowych (rys. 6.10a). Przy swobodnym skręcaniu takiego zespołu każda z tych rur pracuje tak, jak to omówiono w art. 6.2. w wyniku czego w rurach tych pow-



Rys. 6.10. Pierwszy wariant rury wieloobwodowej

a) szkic konstrukcji, A, B, C — zęba; b) układ wydatków w poprzecznym przekroju.

stają wydatki styczne $q_1, \dots, q_n$ (rys. 6.10b). Wypadkowy moment tych wydatków musi być równy momentowi skręcającemu M_s , to znaczy

$$2F_1q_1 + 2F_2q_2 + \dots + 2F_nq_n = M_s, \quad (6.11)$$

a ponadto dzięki połączeniu rur sztywnymi zębami kąt φ skręcania musi być dla wszystkich rur jednakowy. Wykorzystując wzór (6.7), w którym zamiast $M_s/2F$ wstawiamy q , otrzymujemy n równości

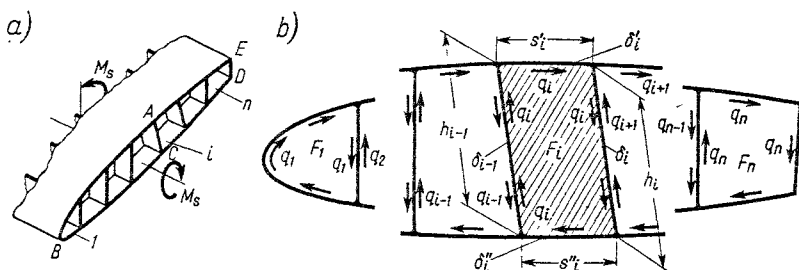
$$\varphi = q_1/B_1 = q_2/B_2 = \dots = q_n/B_n, \quad (a)$$

gdzie $B_i = 2G_iF_i/p_i$ ($i = 1, \dots, n$). Równania (a) łącznie z (6.11) dają możliwość obliczenia φ i q_i , a mianowicie

$$\varphi = M_s / \sum 2F_i B_i, \quad q_i = M_s B_i / \sum 2F_i B_i, \quad (b)$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie n rur składowych.

Znacznie częściej niż rozwiązanie omówione (rys. 6.11a) spotyka się rury wieloobwodowe, w których składowe rury nie są oddzielne, lecz łączą się wspólnymi wzdłużnymi ściankami (rys. 6.11a). Na skutek takiego połączenia (rys. 6.10b) we wspólnych ściankach działa różnica wydatków q sąsiadujących rur składowych (rys. 6.11b). Fakt ten nie wpływa na równanie (6.11), które i tutaj zachowuje swą ważność, odbija się natomiast na rów-



Rys. 6.11. Drugi wariant rury wieloobwodowej
a) szkic konstrukcji; b) układ sił wewnętrznych i oznaczenia.

naniach (a). Jeśli bowiem wyizolujemy jedną z rur i , to na jej obwodzie $q \neq \text{const}$ i wobec tego nie można stosować wzoru (6.7). Prawidłową wartość w takim przypadku otrzymamy uogólniając wzór (6.7). Jeśli mianowicie w rurze (rys. 6.5a) $q \neq \text{const}$, to praca sił wewnętrznych q na przemieszczeniach $\beta' = 1/2GF\delta$ (rys. 6.5c) nadal wyraża się tym samym wzorem $\oint q\beta' ds \cdot 1$, jednakże tym razem nie można wyciągnąć q przed znak całki. W wyniku zatem otrzymujemy

$$\varphi = \frac{1}{2GF} \oint \frac{q ds}{\delta}, \quad (6.12)$$

czyli uogólniony wzór Bredta dla przypadku $q \neq \text{const}$.

Stosując powyższy wzór do rury i , przy założeniu, iż grubość δ jest na poszczególnych odcinkach stała otrzymujemy*

$$\varphi = \frac{1}{2GF_i} \left[(q_i - q_{i-1}) \frac{h_{i-1}}{\delta_{i-1}} + q_i \left(\frac{s'_{i-1}}{\delta'_{i-1}} + \frac{s'_{i+1}}{\delta'_{i+1}} \right) + (q_i - q_{i+1}) \frac{h_i}{\delta_i} \right], \quad (b)$$

a po uporządkowaniu

$$-p_{i-1,i}q_{i-1} + p_{i,i}q_i - p_{i,i+1}q_{i+1} = 2GF_i\varphi, \quad (6.13a)$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki p są

$$p_{i-1} = h_{i-1}/\delta_{i-1}, \quad p_{i,i} = p_{i,i-1} + p_{i,i+1} + (s'_{i-1}/\delta'_{i-1}) + (s'_{i+1}/\delta'_{i+1}), \quad p_{i,i+1} = h_{i+1}/\delta_{i+1}.$$

* Przy wyznaczaniu kąta φ należy zwrócić uwagę na zwroty wydatków. Obierając kierunek całkowania wzdłuż obwodu zgodny z ruchem wskazówek zegara, wydatki zgodne z tym kierunkiem traktujemy jako dodatnie. Dlatego też wydatki q_{i-1} i q_{i+1} występują ze znakami minus.

Dla rury pierwszej i ostatniej równania (6.13a) różnią się tym, iż w pierwszym nie ma q_{i-1} , a w ostatnim q_{i+1} , to znaczy

$$\left. \begin{aligned} p_{1,1}q_1 - p_{1,2}q_2 &= 2GF_1\varphi, \\ -p_{n,n-1}q_{n-1} + p_{n,n}q_n &= 2GF_n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.13b)$$

Równania (6.13) łącznie z (6.11) tworzą układ $(n+1)$ równań, w których jako niewiadome występuje n wydatków q_i oraz kąt φ jednakowy dla wszystkich rur składowych na skutek powiązania ich sztywnymi żebrami. Rozwiązanie tego układu przeprowadzamy wyznaczając napróżd z (6.13) niewiadome q_i w funkcji jednej niewiadomej $X = 2G\varphi$, w wyniku czego otrzymujemy $q_i = k_i X$ (k_i — współczynnik). Podstawiając te wyniki do równania (6.11) obliczamy X a następnie q_i .

W przypadku rury 2-obwodowej układ (6.13) ma postać (6.13b), w którym $n = 2$, a rozwiązanie ostateczne jest

$$q_1 = M_s(F_1p_{2,2} + F_2p_{1,2})/D, \quad q_2 = M_s(F_2p_{1,1} + F_1p_{1,2})/D, \quad (c)$$

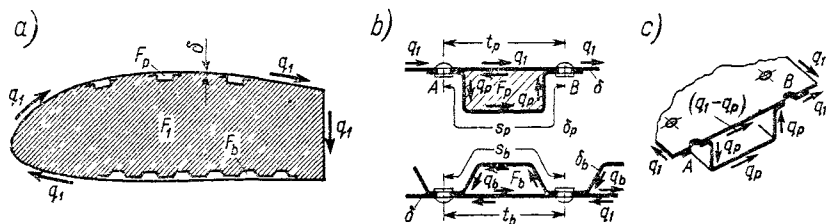
gdzie $D = (F_1^2p_{2,2} + 2F_1F_2p_{1,2} + F_2^2p_{1,1})$. Jednostkowy kąt skręcenia φ wyraża się wzorem (6.10), w którym

$$C = 2GD/(p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}^2). \quad (d)$$

Gdy $q_1 = q_2$, tj. gdy

$$F_1(p_{2,2} - p_{1,2}) = F_2(p_{1,1} - p_{1,2}) \quad (e)$$

ścianka wewnętrzna jest nieczynna i wtedy rura zachowuje się jak jednoobwodowa.



Rys. 6.12. Skręcanie rury wzmacnionej profilami lub blachą falistą
a) szkic konstrukcji; b) układ wydatków dla profilu i odcinka blachy falistej; c) obraz wypadkowych wydatków w blasze rury głównej i w profilu.

W niektórych przypadkach skręcana rura jest wzmacniona szeregiem profili typu omegówki lub blachą falistą (rys. 6.12), w wyniku czego teoretycznie biorąc otrzymujemy rurę wieloobwodową, której rozwiązanie można otrzymać z równań (6.11) i (6.13). Z uwagi jednak na to, że pola F_p i F_b są z reguły małe w stosunku do F_1 zastosujemy rozwiązanie przybliżone. Jeśli mianowicie q_1 jest wydatkiem stycznym w niewzmocnionych ściankach głównej rury, to równanie (6.12) określające kąt skręcenia tej rury składowej (rys. 6.12b), która powstaje w wyniku przynitowania profilu, ma postać

$$(t_p/\delta)(q_1 - q_p) - (s_p/\delta_p)q_p = 2GF_p\varphi, \quad (f)$$

a dla odcinka blachy falistej (rys. 6.12b)

$$(t_b/\delta)(q_1 - q_b) - (s_b/\delta_b)q_b = 2GF_b\varphi. \quad (g)$$

Dla rury głównej analogiczne równanie brzmi następująco

$$pq_1 - m(t_p/\delta)q_p - n(t_b/\delta)q_b = 2GF\varphi, \quad (h)$$

gdzie m, n — odpowiednio liczba profili i liczba fal blachy falistej, $p = \oint (ds/\delta)$, $F = F_1 + mF_p + nF_b$ — odpowiednio bezwymiarowy obwód i całkowite pole głównej rury pozbawionej wzmocnień. Ponieważ w równaniach (f) i (g) prawa strony równań są nadzwyczaj małe, to możemy je opuścić. Uwzględniając ponadto równanie (6.11) otrzymamy ostatecznie

$$q_1 = M_s/2[F - (mF_p p_{rp}/p_p) - (nF_b p_{rb}/p_b)], \quad q_p = q_1 p_{rp}/p_p, \quad q_b = q_1 p_{rb}/p_b, \quad (i)$$

$$\varphi = (q_1/2GF)[p - (mp_{rp}^2/p_p) - (np_{rb}^2/p_b)], \quad (j)$$

gdzie

$$p_p = (s_p/\delta_p) + (t_p/\delta), \quad p_b = (s_b/\delta_b) + (t_b/\delta), \quad p_{rp} = t_p/\delta, \quad p_{rb} = t_b/\delta.$$

Z otrzymanych wyników jeden jest szczególnie interesujący, a mianowicie sposób w jaki dzieli się wydatek q_1 między profil i ściankę płaszcza na odcinku wzmocnionym przez profil (rys. 6.12c). Z równania (f) otrzymujemy mianowicie

$$(q_1 - q_p)(t_p/\delta) \approx q_p(s_p/\delta_p),$$

co można interpretować w ten sposób, że wydatek traktowany jak strumień cieczy dochodząc do punktu A dzieli się na dwa strumienie: jeden $(q_1 - q_p)$ płynący przez ściankę płaszcza, drugi q_p przez profil, schodzące się z powrotem w punkcie B . Stosunek podziału jest przy tym odwrotnie proporcjonalny do bezwymiarowej drogi (t_p/δ) lub (s_p/δ_p) , którą dany strumień musi przebyć. Ta hydrodynamiczna interpretacja wydatków styecznych ma swoje głębsze uzasadnienie w analogii matematycznej opisu obu zjawisk, to znaczy przebiegu wydatków styecznych i ruchu nielepkiej cieczy. Ułatwia ona pogładowe przedstawienie wielu zagadnień i dlatego będziemy z niej korzystać.

Konsekwencje jakie pociąga za sobą wieloobwodowość skręcającej rury przejawiają się w tendencji do wyrównania wartości naprężeń styecznych. Przypuśćmy mianowicie, że płaszcz zewnętrzny rury (rys. 6.11a) na łuku ABC jest znacznie grubszy niż na części $CDEA$. Gdyby wewnętrznych ścianek wzdłużnych nie było, to w takiej jednoobwodowej rurze naprężenia styeczne przy jej skręcaniu byłyby w części $CDEA$ odpowiednio większe ($q = \text{const}$). Inaczej przedstawi się sytuacja, gdy wewnętrzne ścianki istnieją. Jak wynika z obliczeń wydatki q wzrosną w części $ABCA$, natomiast w części pozostałej znacznie spadną, tak iż mniej więcej $\tau = q/\delta \approx \text{const}$. Jeśli zewnętrzny płaszcz ma mniej więcej stałą grubość, to wpływ ścianek wewnętrznych jest mały, wydatki w ściankach stosunkowo niewielkie, a rura pracuje prawie jak rura jednoobwodowa. Uwagi te dają podstawę do przybliżonej oceny konstrukcji.

6.5. Przeniesienie sił wzdłużnych i momentów gnących

Założmy, że w wyniku działania pewnych obciążeń cienkościenne przyrząteczny pręt rurowy otwarty uległ takiej deformacji, przy której w danym poprzecznym przekroju względne odkształcenie ε wzdłużnego włókna C wyraża się wzorem

$$\varepsilon = b_1 + b_2 y + b_3 z, \quad (a)$$

gdzie

y, z — współrzędne tego włókna względem obranych dowolnie centralnych osi rozpatrywanego przekroju;

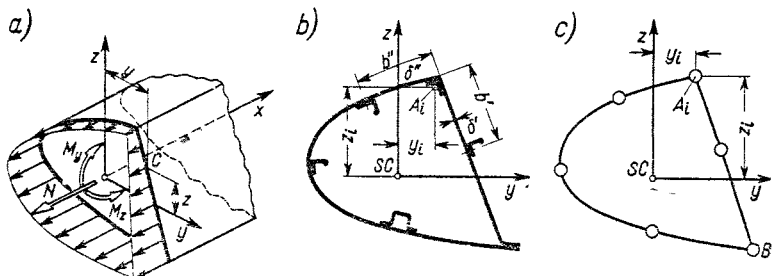
b_1, b_2, b_3 — wartości stałe.

Tym odkształceniom ε odpowiadają normalne naprężenia $\sigma = E\varepsilon$

$$\sigma = B_1 + B_2 y + B_3 z, \quad (b)$$

gdzie $B_1 = Eb_1$, $B_2 = Eb_2$, $B_3 = Eb_3$. Jak łatwo spostrzec wypadkowe siły wewnętrzne tego rozkładu σ są następujące (rys. 6.13a)

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_y = - \int_A \sigma z dA, \quad M_z = - \int_A \sigma y dA, \quad (c)$$



Rys. 6.13. Rozkład naprężeń normalnych wywołanych siłą wzdłużną i momentami gnącymi

przy czym $dA = \delta ds$ jest to pole przekroju elementarnego włókna, a symbol A przy całkach oznacza sumowanie po całym przekroju. Jeśli teraz podstawimy wyrażenie (b) do wzorów (c), to po prostych przekształceniach otrzymamy

$$N = B_1 A, \quad M_y = -B_2 J_{yz} - B_3 J_y, \quad M_z = -B_2 J_z - B_3 J_{yz}, \quad (d)$$

gdzie $A = \int_A \delta ds$ — całkowite pole poprzecznego przekroju, a

$$J_y = \int_A z^2 \delta ds, \quad J_z = \int_A y^2 \delta ds, \quad J_{yz} = \int_A yz \delta ds \quad (e)$$

odpowiednio momenty bezwładności względem obranych osi centralnych y i z oraz moment odśrodkowy względem tych osi*.

Wzory (d) określają wypadkowe siły wewnętrzne N , M_y i M_z , jeśli dane są wartości B_1 , B_2 i B_3 . Praktyczne znaczenie ma zagadnienie odwrotne, w którym szukamy wartości σ , jeśli dane są N , M_y i M_z . Innymi słowy w równaniach (d) niewiadomymi są B_1 , B_2 i B_3 , znanymi natomiast lewe strony tych równań. Rozwiązanie tych równań względem B_1 , B_2 i B_3 i podstawienie otrzymanych stąd wyników do (b) daje w rezultacie

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y^*}{J_y} z - \frac{M_z^*}{J_z} y, \quad (6.14)$$

* Przy wyprowadzaniu wzorów (d) należy pamiętać, iż momenty statyczne

$$\int_A y dA, \quad \int_A z dA$$

są równe zeru, gdyż osie y i z są centralne.

gdzie pomocnicze wielkości M_y^* i M_z^* (w kGcm) są

$$M_y^* = \kappa [M_y - (M_z J_{yz}/J_z)], \quad M_z^* = \kappa [M_z - (M_y J_{yz}/J_y)], \quad (6.15)$$

przy czym współczynnik κ określa się jako

$$1/\kappa = 1 - (J_{yz}^2/J_y J_z). \quad (6.16)$$

Powyższe wzory ulegają uproszczeniu, jeśli osie y i z są osiami centralnymi głównymi ($J_{yz} = 0$), gdyż wtedy $\kappa = 1$, $M_y^* = M_y$, $M_z^* = M_z$ i w wyniku

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \quad (J_{yz} = 0) \quad (6.17)$$

mamy postać znaną z kursu Wytrzymałości Materiałów. Zastosowanie wzoru (6.17) jest celowe w tym przypadku, gdy położenie głównych centralnych osi jest „a priori” znane, na przykład dla przekrojów symetrycznych. W prętach o przekrojach niesymetrycznych zaleca się stosowanie wzoru (6.14), albowiem przejście do osi głównych centralnych wymaga nie tylko określenia położenia tych osi, lecz również określenia względem tych obróconych osi nowych współrzędnych poszczególnych włókien. Ta ostatnia czynność jest jednak dość kłopotliwa, zwłaszcza w prętach o konturze krzywoliniowym (profile lotnicze), gdyż z uwagi na dalsze zastosowania rachunki muszą być prowadzone z dużą dokładnością. Z tego powodu bardziej celowe jest pogodzić się z pewną niedogodnością określenia M_y^* i M_z^* niż stosować prostszy wzór (6.17).

W przypadku gdy pręt składa się z płaszcza i podłużniczek o skupionych przekrojach (rys. 6.13b) wzory (6.14)÷(6.17) pozostają niezmienione. Modyfikacji natomiast ulegają wzory (e), w których poza momentem bezwładności płaszcza wchodzi moment bezwładności wszystkich pasów, to jest

$$I_y = \int_A z^2 ds + \sum A_i z_i^2, \dots, J_{yz} = \int_A yz ds + \sum A_i y_i z_i, \quad (f)$$

przy czym osie y i z są centralne dla całego przekroju pręta, wliczając w to pola przekrojów pasów. W niektórych zagadnieniach obliczenie momentów J_y , J_z , J_{yz} upraszczamy, wprowadzając w miejscu pasów rzeczywistych *pasy zastępcze* (rys. 6.13c) z polem przekroju A'_i powiększonym o współdział przylegających odcinków płaszcza, to jest

$$A'_i = A_i + (b'\delta'/z) + (b''\delta''/2), \quad (g)$$

dzięki czemu przybliżone wartości J_y , J_z , J_{yz} otrzymujemy jako

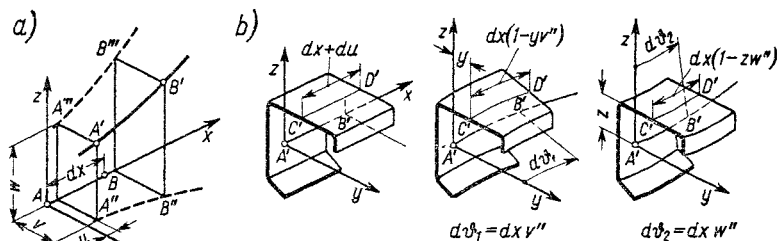
$$J_y \approx \sum A'_i z_i^2, \quad J_z \approx \sum A'_i y_i^2, \quad J_{yz} \approx \sum A'_i y_i z_i. \quad (h)$$

Przybliżenie to jest dostatecznie dokładne, gdy rozstaw pasów na obwodzie jest mniej więcej równomierny i gdy ich liczba jest dostateczna (≥ 8). Jeśli ich jest mało, to można wprowadzić pasy fikcyjne (pas B na rys. 6.13c), skupiając w nich tylko pola przylegających odcinków płaszcza ($A_i = 0$).

Podsumowując przeprowadzone rozważania stwierdzamy, iż w konstrukcji sprowadzającej się do modelu cienkościennego przyrzątecznego pręta, rozkład naprężeń normalnych odpowiadających działaniu momentów gnących i sił wzdłużnych niezależnie od kształtu tego

przekroju (otwarty, rurowy) jest identyczny ze znanym z Wytrzymałości Materiałów rozkładem naprężeń dla prętów o przekroju zwartym.

Konsekwencją powyższego wniosku jest to, że odkształcenia osi pręta cienkościennego wywołane działaniem momentów gnących i sił wzdłużnych wyrażają się identycznymi wzorami jak i dla prętów o przekroju zwartym. Jeśli więc punkt tej osi doznaje przemieszczeń



Rys. 6.14. Odkształcenia osi cienkościennego pręta

u, v, w (rys. 6.14a), to dla pewnego włókna CD otrzymujemy następujące składowe odkształcenia względne (rys. 6.14b)

$$\varepsilon_u = u', \quad \varepsilon_v = -\gamma v'', \quad \varepsilon_w = -\gamma w'', \quad (i)$$

a całkowite odkształcenie $\varepsilon = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w$ jest równe

$$\varepsilon = u' - \gamma v'' - \gamma w''. \quad (ii)$$

Porównując ten wynik ze wzorem (a) mamy $b_1 = u', b_2 = -v'', b_3 = -w''$, a stałe $B_1 = Eu', B_2 = -E\gamma v'', B_3 = -E\gamma w''$. Podstawiając ten ostatni wynik do wzorów (d) wyznaczamy wypadkowe siły wewnętrzne, jako funkcje przemieszczeń u, v, w osi,

$$N = EAu', \quad M_y = EJ_{yz}v'' + EJ_y w'', \quad M_z = EJ_z v'' + EJ_{yz} w''. \quad (6.18)$$

Jeśli obrane osie y i z są osiami centralnymi głównymi, to wzory (6.18) przechodzą w znane z Wytrzymałości Materiałów zależności

$$N = EAu', \quad M_y = EJ_y w'', \quad M_z = EJ_z v''. \quad (6.19)$$

Wzory (6.18) i (6.19) mają zastosowanie w badaniu zagadnień stateczności prętów cienkościennych. W zagadnieniach statyki interesuje nas raczej zagadnienie odwrotne, to jest wyznaczenie przemieszczeń u, v, w , gdy znane są N, M_y i M_z , jako funkcje współrzędnej x . Odpowiedź na to otrzymujemy rozwiązując równania (6.18) względem u', v'' i w'' , w wyniku czego mamy przy oznaczeniach według wzorów (6.15) i (6.16)

$$u' = N/EA, \quad v'' = M_z^*/EJ_z, \quad w'' = M_y/EJ_y. \quad (6.20)$$

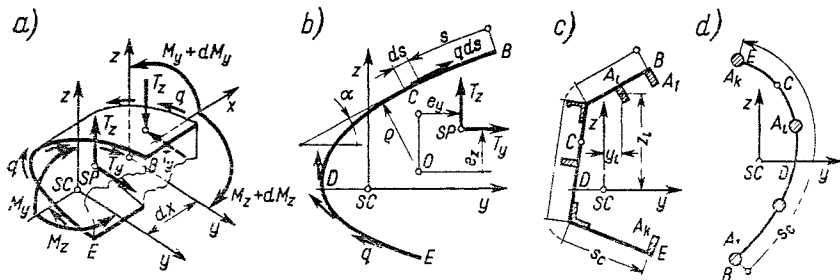
Określenie przemieszczeń przeprowadzamy całkując te równania według znanych metod z Wytrzymałości Materiałów.

6.6. Bezskręciowe przeniesienie sił tnących w pręcie otwartym

Określone w art. 6.5 normalne naprężenia σ są całkowitymi naprężeniami tylko wtedy, gdy momenty M_y i M_z są stałe na rozpatrywanym odcinku pręta. W przypadku ogólnym (rys. 6.15a), gdy momenty te są zmienne, muszą istnieć siły tnące T_y i T_z niezbędne do zachowania równowagi odcinka pręta o wartościach

$$T_y = dM_z/dx, \quad T_z = dM_y/dx \quad (6.21)$$

Tym wypadkowym siłom T_y , T_z towarzyszy istnienie wydatków stycznych q (rys. 6.15b) tak dobranych, aby każdy z elementów płaszcza był w równowadze oraz aby ich wypad-



Rys. 6.15. Bezskręciowe obciążenie pręta o przekroju otwartym

a) układ wypadkowych sił wewnętrznych; b) układ dodatnich wydatków q w przekroju BE ; oznaczenia, c), d) przekroje otwarte z pasami skupionymi bądź pasami zastępczymi.

kowa była równa zadany wartościom T_y i T_z . Ponadto wypadkowy moment tych wydatków względem obranego dowolnie punktu O musi być równy momentowi M_x sił T_y i T_z względem tegoż punktu O . Pierwszy warunek sprowadza się do spełnienia w każdym punkcie płaszcza podstawowej zależności (6.2b), pozostałe warunki dają trzy równania równoważności

$$\int_0^{s_c} q ds \cos \alpha = T_y, \quad \int_0^{s_c} q ds \sin \alpha = T_z, \quad \int_0^{s_c} q ds \rho = M_T, \quad (a)$$

gdzie oznaczenia są widoczne na rys. 6.15b. Z warunku (6.2b) uwzględniając, iż $n_x = \sigma \delta$, a σ określone wzorem (6.14), mamy

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial n_x}{\partial x} = -\delta \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{T_z^* z \delta}{J_y} + \frac{T_y^* y \delta}{J_z}, \quad (b)$$

gdzie pomocnicze wartości $T_z^* = dM_y^*/dx$, $T_y^* = dM_z^*/dx$ otrzymujemy z (6.15) przy uwzględnieniu (6.21)

$$T_z^* = \kappa [T_z - (T_y J_{yz}/J_z)], \quad T_y^* = \kappa [T_y - (T_z J_{yz}/J_y)]. \quad (6.22)$$

Całkując teraz wyrażenie (b) względem s (przy $x = \text{const}$) mamy

$$q = \frac{T_z^*}{J_y} \int_0^s z \delta ds + \frac{T_y^*}{J_z} \int_0^s y \delta ds, \quad (c)$$

gdzie q — wydatek styczny w bieżącym punkcie U o współrzędnej s mierzonej od punktu B na krawędzi swobodnej, na której wydatek $q_B = 0$. Uwzględniając, iż

$$\int_0^s z \delta \, ds = S_y^{0,s}, \quad \int_0^s y \delta \, ds = S_z^{0,s} \quad (d)$$

są momentami statycznymi względem osi centralnych y i z części przekroju między początkowym punktem B a bieżącym C , mamy ostatecznie

$$q = (T_z^* S_y^{0,s}/J_y) + (T_y^* S_z^{0,s}/J_z). \quad (6.23a)$$

Jeśli osie y i z są osiami centralnymi głównymi, to $T_y^* = T_y$, $T_z^* = T_z$ i wtedy

$$q = (T_z S_y^{0,s}/J_y) + (T_y S_z^{0,s}/J_z), \quad (6.23b)$$

przy czym uwagi o stosowaniu wzoru (6.23) są identyczne, jak to omówiono przy obliczeniu σ (wzory 6.14 i 6.17). W przypadku, gdy przekrój ma skupione pasy (rys. 6.15c) wzory (6.23) pozostają bez zmian, z tym tylko, że wartości $S_y^{0,s}$, $S_z^{0,s}$ doznają przeskoków o przyrost $A_i z_i$ względnie $A_i y_i$ przy przejściu od punktu płaszcza tuż przed pasem do punktu tuż za nim. Wreszcie w przypadku, gdy wprowadzamy zastępcze pasy (rys. 6.15d), przypisując im jednym zdolność przenoszenia naprężeń σ , wartości $S_y^{0,s}$, $S_z^{0,s}$ zmieniają się skokami zachowując stałą wartość na odcinku między kolejnymi pasami.

Otrzymany rozkład (6.23) wydatków q zapewnia nie tylko równowagę każdego elementu, lecz spełnia również tożsamościowo* dwa pierwsze warunki równoważności (a). Ostatni z warunków (b) po podstawieniu (6.23) przybiera postać

$$(T_z^*/J_y) \int_b^{s_c} S_y^{0,s} \varrho \, ds + (T_y^*/J_z) \int_0^{s_c} S_z^{0,s} \varrho \, ds = M_T, \quad (f)$$

gdzie $M_T = T_y e_z - T_z e_y$. Przekształcając teraz to równanie dla przypadku, gdy osie y i z są osiami centralnymi głównymi i gdy przeto $T_y^* = T_y$, $T_z^* = T_z$ otrzymujemy

$$T_z \left[e_y + \left(\int_0^{s_c} S_y^{0,s} \varrho \, ds / J_y \right) \right] + T_y \left[-e_z + \left(\int_0^{s_c} S_z^{0,s} \varrho \, ds / J_z \right) \right] = 0. \quad (g)$$

* A oto przykładowy dowód dla drugiego z nich. Biorąc pod uwagę, że $ds \sin \alpha = -dz$, piszemy ten warunek w postaci 2-członowej

$$\int_0^{s_c} q \, ds \sin \alpha = -(T_z^*/J_y) \int_0^{s_c} (S_y^{0,s} dz - T_y^*/J_z) \int_0^{s_c} S_z^{0,s} dz. \quad (e)$$

Pierwszy z członów przekształcamy całkując przez części

$$\int_0^{s_c} S_y^{0,s} dz = [S_y^{0,s} z]_0^{s_c} - \int_0^{s_c} z dS_y^{0,s} = -J_y,$$

co staje się jasne, jeżeli zauważyć, iż składnik pierwszy jest równy zeru ($S_y^{0,s_c} = 0$ — moment statyczny całego przekroju względem osi centralnej, $S_y^{0,0} = 0$ — moment statyczny zerowego pola), a $dS_y^{0,s} = z \delta \, ds$.

Analogicznie dowodzi się, że $\int_0^{s_c} S_z^{0,s} dz = -J_z$ i w wyniku otrzymujemy (patrz również wzory 6.22 i 6.16), że prawa strona równania (e) jest

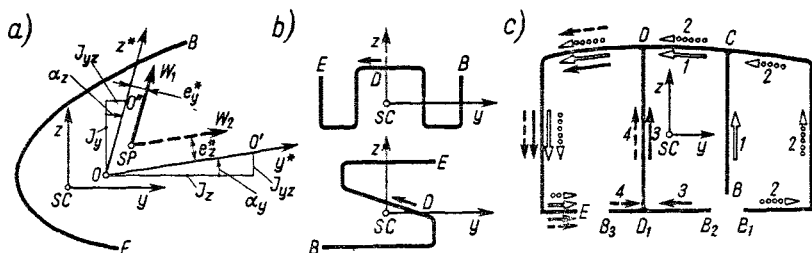
$$T_z^* + (T_y^* J_{yz}/J_z) = T_z.$$

c.b.d.d.

Równanie powyższe musi być spełnione zawsze niezależnie od tego jakie są wartości T_y i T_z . Jest to możliwe tylko wtedy, gdy każde z wyrażeń w nawiasach kwadratowych jest równe zero. Wynika stąd, że wypadkowa siła T musi przechodzić przez pewien szczególny punkt SP , tak zwany *środek sił poprzecznych*, którego współrzędne e_y i e_z względem obranego punktu O są

$$e_y = -\frac{1}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{0,s} \varrho \, ds, \quad e_z = \frac{1}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{0,s} \varrho \, ds. \quad (6.24)$$

Jeśli osie y i z nie są główne, to położenie środka SP sił poprzecznych określamy w specjalnie dobranym ukośnokątnym układzie współrzędnych* Oy^*z^* rys. 6.16a. Jeśli teraz obciąża-



Rys. 6.16. Określenie środka SP sił poprzecznych i kierunku obiegu

a) oznaczenia dla wzoru (6.25); b) określenie obiegów w profilach złożonych; c) określenie obiegu w profilu z odgałęzieniami według analogii hydrodynamicznej.

żenie stanowi siła tnąca W_1 równoległa do OO' , której rzuty na osie z i y są $T_z = W_1 \cos \alpha_z$, $T_y = T_z J_{yz}/J_y$, to ze wzorów (6.22) wynika $T_z^* = T_z$, $T_y^* = 0$, a równanie (f) ma postać

$$(W_1 \cos \alpha_z / J_y) \int_0^{s_c} S_y^{0,s} \varrho \, ds = -W_1 e_y^* \quad (h)$$

i podobnie przy obciążeniu siłą W_2 równoległą do OO'

$$(W_2 \cos \alpha_y / J_z) \int_0^{s_c} S_z^{0,s} \varrho \, ds = W_2 e_z^*,$$

skąd ostatecznie otrzymujemy odległości e_y^* , e_z^* jako

$$e_y^* = -\frac{\cos \alpha_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{0,s} \varrho \, ds, \quad e_z^* = \frac{\cos \alpha_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{0,s} \varrho \, ds, \quad (6.25)$$

gdzie $\tan \alpha_y = J_{yz}/J_y$, $\tan \alpha_z = J_{yz}/J_z$. Jak łatwo sprawdzić wzory (6.25) przechodzą w (6.24), gdy centralne osie y i z stają się również osiami głównymi.

W celu uniknięcia dwuznaczności w określeniu znaku momentów S_y i S_z , wyróżniamy początkową B i końcową E krawędź przekroju tak, aby obieg od B do E po obwodzie płaszcza widoczny był z środka SC jako ruch przeciwny do ruchu zegara (rys. 6.15c, d). W prętach o przekroju bardziej złożonym (rys.

* Podany układ odpowiada przypadkowi, gdy $J_{yz} > 0$, jeśli $J_{yz} < 0$, to $\angle O'O''$ jest rozwarty

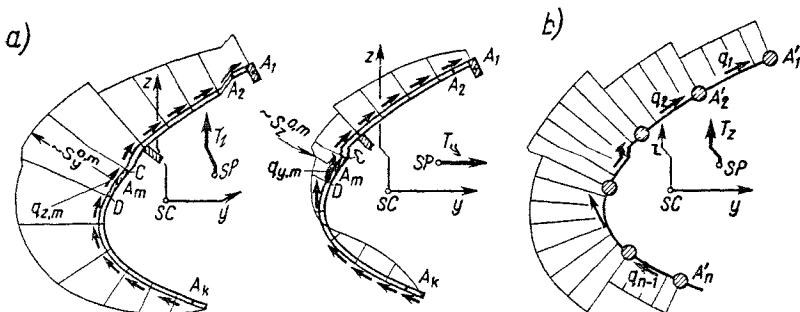
6.16b), kierunek obiegu według tej samej reguły ustalamy naprzód dla punktów D . Wreszcie dla profilu z odgałęzieniami (rys. 6.16c) wybieramy w sposób umowny podstawowy kontur $BCDE$, na którym ustalamy obieg 1, tak jak na rys. 6.15d. Pozostałe części profilu traktujemy jako odgałęzienia, a obiegi 2, 3, 4 ustalamy według hydrodynamicznej analogii z nurtem głównego strumienia i jego dopływów. Na odcinku płaszcza, w którym „nurty” się łączą (np. CD), momenty $S_y^{0,s}$ i $S_z^{0,s}$ obliczamy biorąc wszystkie części przekroju leżące w górze „głównego strumienia” i jego „dopływów” (np. BC i B_1C). Samo obliczenie wartości $S_y^{0,s}$ i $S_z^{0,s}$ przeprowadzamy zazwyczaj tabelarycznie (rys. 6.17), przy czym dzielimy

Przekrój pręta $x = \dots \text{cm}$, $T_y = \dots \text{kG}$, $T_z = \dots \text{kG}$, $T_y^1 = \dots \text{kG}$, $T_z^1 = \dots \text{kG}$													
Numer pasa zastępczego	A_i cm ²	y_i cm	z_i cm	$A_i y_i$ cm ³	$S_z^{0,s}$ cm ³	$A_i z_i$ cm ³	$S_y^{0,s}$ cm ³	q_y kG/cm	q_z kG/cm	q kG/cm	F_i cm ²	$2F_i S_y^{0,s}$ cm ⁵	$2F_i S_z^{0,s}$ cm ⁵
1	A_1	y_1	z_1	$A_1 y_1$	$S_z^{0,1}$	$A_1 z_1$	$S_y^{0,1}$	$q_{y,1}$	$q_{z,1}$	q_1	F_1	$2F_1 S_y^{0,1}$	$2F_1 S_z^{0,1}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	y_m	z_m	$A_m y_m$	$S_z^{0,m}$	$A_m z_m$	$S_y^{0,m}$	$q_{y,m}$	$q_{z,m}$	q_m	F_m	$2F_m S_y^{0,m}$	$2F_m S_z^{0,m}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	A_k	y_k	z_k	$A_k y_k$	$S_z^{0,k}$	$A_k z_k$	$S_y^{0,k}$	$q_{y,k}$	$q_{z,k}$	q_k	F_k	$2F_k S_y^{0,k}$	$2F_k S_z^{0,k}$
											$\sum 2F_i S_y^{0,s}$	$\sum 2F_i S_z^{0,s}$	

Rys. 6.17. Wzorec tablicy do określenia wydatków q i położenia SP

oznaczenia według rysunku 6.18 i 6.19, a ponadto $q_y = T_y^* S_z^{0,s} / J_z$, $q_z = T_z^* S_y^{0,s} / J_y$.

płaszczyznę na szereg odcinków, z których każdy traktujemy jak zastępczy pas o polu A_i i współrzędnych y_i , z_i środka ciężkości tego pola, a całkowanie (wzory d) zastępujemy sumowaniem. Mając te momenty wyznaczamy następnie q z odpowiedniego wzoru (6.23) i wynik nanosimy na obraz przekroju (rys. 6.18),



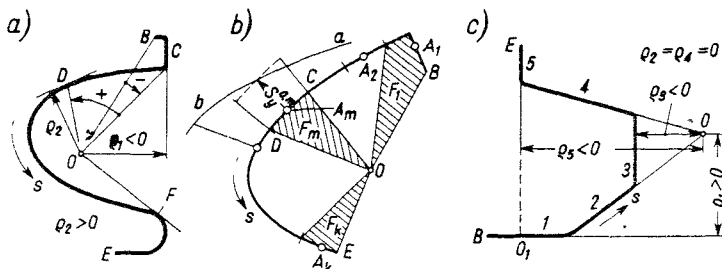
Rys. 6.18. Typowe wykresy przebiegu wydatków q

a) przypadek $T_z \neq 0$, $T_y = 0$; b) przypadek $T_z = 0$, $T_y \neq 0$ przypadek $T_z \neq 0$, $T_y = 0$ dla konstrukcji z pasami zastępczymi.

Siły T_y i T_z traktujemy jako dodatnie wtedy, gdy działają zgodnie z rys. 6.15a. Ta sama uwaga dotyczy q , jeśli podstawienie odpowiednich wartości liczbowych do wzoru (6.23) da wynik dodatni. Regułę powyższą można uczynić łatwiejszą do zapamiętania, jeśli umówić się, że w danym elemencie (rys. 6.15a) rozpatrywać będziemy tylko ten przekrój, który ma mniejszą współrzędną x . Przy tej umowie dodatnie T_y i T_z mają zwroty zgodne z zwrotami osi y i z , a dodatnie q mają zwrot przeciwny do ustalonego poprzednio obiegu po obwodzie.

Ostatnią kwestią wymagającą objaśnienia jest obliczenie położenia środka sił poprzecznych (wzory 6.24, 6.25). Ramię q traktujemy jako dodatnie, gdy ustalony poprzednio obieg po obwodzie płaszcza jest

widoczny z obranego punktu O jako ruch przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Tak więc dla profilu z rys. 6.15b ramię q jest dodatnie dla wszystkich punktów obwodu, natomiast dla profilu z rys. 6.19a jest ono dodatnie dla punktów obwodu ODF , a ujemne dla BC i FE . Samo obliczenie e_y i e_z lub e_y^* i e_z^* przeprowadzamy na ogół tabelarycznie w ten sposób, iż wyznaczone poprzednio w tablicy (rys. 6.17) wartości $S_y^{0,m}$ i $S_z^{0,m}$ traktujemy jako średnie na tym odcinku CD płaszcza, którego pole jest A_m (rys. 6.19b).



Rys. 6.19. Oznaczenia przy określaniu środka SP

a) określenie znaku q ; b) określenia pól F ; c) określenie q w profilu o ściankach płaskich.

Przy takim założeniu przedział całkowania $0, s_c$ całek z wzorów (6.24) lub (6.25) dzieli się na szereg przedziałów, w których S_y bądź S_z są stałe i mogą być wyłączone za znak całki. Pozostałe pod całką wyrażenia $\int q ds$ przedstawiają odpowiednio podwójne pola $F_1, \dots, F_m, \dots, F_k$ (rys. 6.19b), których wartość wyznaczamy z rysunku. W rezultacie poszukiwane całki dają się przedstawić jako

$$\int_0^{s_c} S_y^{0,s} q ds \approx \sum 2F_m S_y^{0,m}, \quad \int_0^{s_c} S_z^{0,s} q ds \approx \sum 2F_m S_z^{0,m}, \quad (j)$$

przy czym pola F są dodatnie, gdy ustalony poprzednio obieg widoczny jest z punktu O jako ruch przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Tak zmodyfikowane wyrażenia (j) nadają się do rachunku tabelarycznego. Jeśli otrzymane stąd wartości dają po podstawieniu do wzorów (6.24) lub (6.25) odległości e_y , e_z lub e_y^* , e_z^* dodatnie, to należy je odmierzyć od obranego punktu O zgodnie z dodatnim zwrotem osi y i z . W typowych przekrojach otwartych środek SP leży na zewnątrz konturu płaszcza.

Według tych samych reguł postępujemy w przypadkach, gdy rzeczywisty przekrój pręta zamieniamy wprowadzając pasy zastępcze (rys. 6.18c), bądź gdy przekrój składa się z szeregu prostych odcinków (rys. 6.19c). W tym ostatnim przypadku ramiona q zmieniają się skokami.

Inną, zalecaną zwłaszcza dla początkujących, metodą obliczenia e_y^* , e_z^* (lub e_y , e_z) jest wykorzystanie myśli przewodniej wzorów (h) oraz (i). Zakładając mianowicie dowolną liczbową wartość W_1 lub W_2 , wyznaczamy odpowiednio

$$q_x = T_x^* S_y^{0,s} / J_y \quad \text{lub} \quad q_y = T_y^* S_z^{0,s} / J_z \quad (k)$$

i rysujemy te wydatki na przekroju (rys. 6.18a). Obliczony względem dowolnego punktu O moment tych wydatków przyrównujemy odpowiednio do $-W_1 e_y^*$ lub $W_2 e_z^*$, otrzymując równania (h) lub (i) z jedynymi niewiadomymi e_y^* i e_z^* .

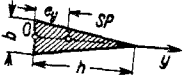
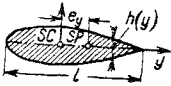
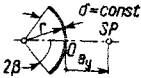
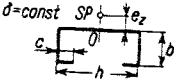
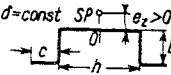
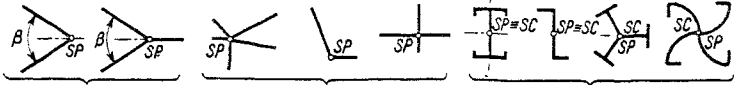
Środek sił poprzecznych (skrót SP) jest dla danego przekroju takim samym punktem charakterystycznym jak środek ciężkości. Jeśli zatem weźmiemy dwa różne punkty O i O_1 (rys. 6.19c), to w etapach pośrednich (obliczanie całek $\int S_y q ds$, $\int S_z q ds$) wystąpią różnice, jednakże wynik końcowy, to znaczy położenie SP na obrazie przekroju, będzie taki sam. Wynika stąd, że jeśli punkt O pokrywa się z SP, to

$$\int_0^{s_c} S_y^{0,s} q ds = 0, \quad \int_0^{s_c} S_z^{0,s} q ds = 0. \quad (l)$$

W przekrojach otwartych z jedną osią symetrii (np. y) SP leży na tej osi, gdyż odpowiednia całka we wzorach (h) lub (i) względem punktu O na tej osi jest równa zeru (np. $\int S_x \varrho ds$). Dla przekrojów punktowo symetrycznych (np. zetownik) i podwójnie lub wielokrotnie

POŁOŻENIE ŚRODKA SIŁ POPRZECZNYCH (SP)

Tablica 6.3

	$e_y \approx \frac{h}{10} \left[2 - \frac{2\nu}{5(1+\nu)} \right]$	ν — liczba Poissona
	$e_z = \frac{8r}{15\pi} \left(3 + \frac{\nu}{1+\nu} \right)$	ν — liczba Poissona
	$e_y \approx 1.2 \left(\int_l h^3 g dy \right) / \left(\int_l h^3 dy \right)$	Wzór słuszny dla dowolnego profilu symetrycznego o ile $h_{\max} < 0,15l$.
	$e_y = r \left(4 \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{2\beta - \sin 2\beta} - 1 \right)$	$0 < \beta \leq \pi,$ $0 < e_y \leq r.$
	$e_z = b \frac{3\xi + 2\eta(3 - 4\eta^2)}{2 + 6\xi - (1 - 2\eta)^2}$	$\xi = b/h, \quad \eta = c/h,$ $0 < \eta < 0,5$
	$e_z = b \frac{3\xi + 2\eta(3 - 4\eta^2)}{6\xi + (1 + 2\eta)^2}$	$\xi = b/h, \quad \eta = c/h$ $0 < \eta < \infty$
		

symetrycznych (dwuteownik itp.) SP pokrywa się z SC. Dla kilku typowych przekrojów położenie SP podaje tabl. 6.3 oraz 6.4 (art. 6.8), przy czym wyniki dla zwartych profili zaczerpnięto z teorii sprężystości.

Podsumowując otrzymane w tym artykule wyniki stwierdzamy: Jeśli w pryzmatycznym pręcie o przekroju otwartym naprężenia normalne (wzory 6.14 i 6.17) są rozłożone tak, że zgodnie z rys. 6.14, przemieszczenia przekroju w jego płaszczyźnie są tylko równoległe (brak skręcenia), to rozkład naprężeń stycznych określony jest wzorami (6.23),

a wypadkowa siła tnąca przechodzi przez szczególny punkt przekroju (środek sił poprzecznych) określony wzorami (6.24) lub (6.25). Powyższe stwierdzenie nie mówi o przemieszczeniach u , w kierunku wzdłużnej osi x pręta. Niewątpliwym jednak jest to, że zmienne po obwodzie wydatki q wywołują zmienność po obwodzie kąta β , a co za tym idzie spaczenie przekroju. Spaczenie to jest jednakowe we wszystkich przekrojach nie wyłączając przekrojów skrajnych, o ile tylko pręt jest przyzmatyczny, a siła tnąca stała. Jeśli te warunki nie są spełnione, bądź jeśli zamocowanie pręta uniemożliwia takie spaczenie, to w wyniku muszą powstać dodatkowe naprężenia normalne wyrównujące różnice spaczeń między przekrojem oporowym a podłożem, bądź między tymi przekrojami, w których następuje zmiana siły tnącej. Rozkład tych dodatkowych naprężeń jest wówczas odmienny od podanego wzorami (6.14) i (6.17), ma on jednak znaczenie tylko w przypadku krótkich prętów zbliżonych do modelu bryły i dlatego wpływ ten w normalnych przypadkach pomija się.

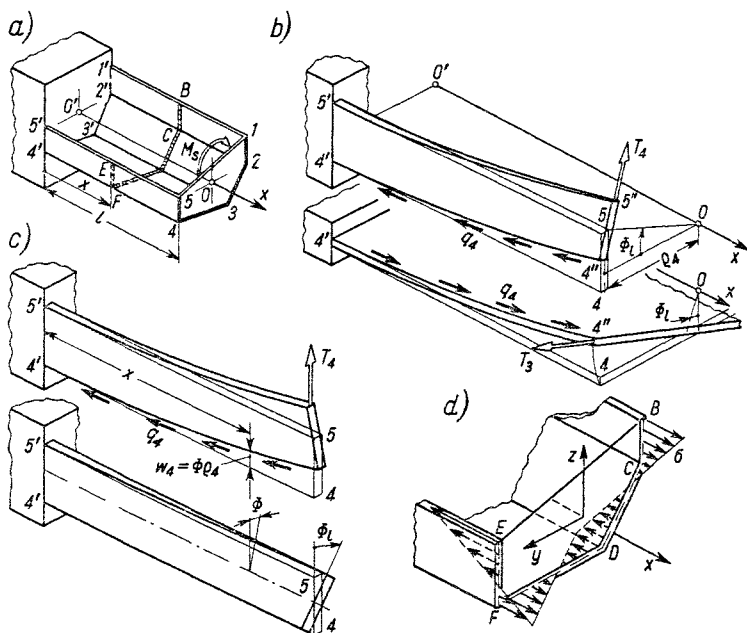
6.7. Nieswobodne skręcanie prętów o przekroju otwartym

Opisana w art. 6.5 i 6.6 analiza prętów o przekroju otwartym nie jest kompletna, albowiem rozpatruje ona tylko taki przypadek, gdy siła tnąca w każdym przekroju pręta przechodzi przez SP tego przekroju. W ogólnym przypadku gdy obciążenia zewnętrzne przyłożone są poza środkiem SP, można je do tego środka zredukować, a następnie rozdzielić na dwa proste obciążenia. Pierwsze z nich składa się z obciążeń poprzecznych przyłożonych w SP odpowiednich przekrojów, może być więc zatem rozpatrzone według wskazówek art. 6.6 i 6.7. Drugie z obciążeń składa się tylko z momentów o wektorach równoległych do osi x , przedstawia zatem przypadek skręcania, który teraz przeanalizujemy bardziej szczegółowo.

Jedną z możliwości przeniesienia momentu skręcającego przez profil otwarty opisano w art. 6.3, udowadniając jednak, że w tym przypadku swobodnego skręcania pojawiają się bardzo duże naprężenia i odkształcenia. Inna możliwość występuje wtedy, gdy w jakiś sposób usuwamy swobodę spaczenia co najmniej jednego z przekrojów pręta. Tak na przykład we wspornikowym pręcie (rys. 6.20a) takim przekrojem jest utwierdzony przekrój I' , ..., $5'$. Dzięki temu przy działaniu momentu M_x każda ze ścianek pręta pracuje dwójako (rys. 6.20b), a mianowicie ulega ona nie tylko skręceniu lecz i zginaniu w swej płaszczyźnie jako wspornikowa belka utwierdzona w przekroju $4'5'$. Rozdzielając te funkcje (rys. 6.20c) widzimy, że te dwa rodzaje odkształceń zależne są od kąta obrotu Φ danego przekroju. Uświadamiając sobie, że każda ze ścianek jest na zginanie w swej płaszczyźnie nadzwyczaj sztywna (o ile tylko długość l nie jest za duża), a natomiast na skręcanie jest bardzo wiotka, dochodzimy do wniosku, że *przeważająca część momentu M_x będzie przeniesiona przez zginanie ścianek* obciążonych na swobodnym końcu oddziaływaniami żebra pod postacią poprzecznych sił $T_4, \dots, T_1$ (rys. 6.20b). Te obciążenia wywołują w poprzecznych przekrojach każdej ścianki naprężenia normalne σ . Gdyby ścianki nie były ze sobą połączone na wzdłużnych krawędziach, to rozkład σ w każdej ze ścianek odpowiadałby rozkładowi znanemu z Wytrzymałości Materiałów. W szczególności na

krawędzi 44' ścianki 44'55' panowałyby naprężenia rozciągające, a na tejże krawędzi ścianki 33'44' — ściskające. Wynikałoby stąd, że dwie przylegające krawędzie ślizgałyby się po sobie. W rzeczywistej konstrukcji, gdzie tych przesunięć nie ma, na wspólnych krawędziach muszą istnieć wydatki styczne q , których zadaniem, jak na przykład q_4 , jest wyrównanie wydłużeń. W wyniku rozkład naprężeń σ (rys. 6.20d) będzie na obwodzie zmieniać się w sposób ciągły. Jest przy tym jasne, że w przypadku skręcania te naprężenia w każdym przekroju poprzecznym spełniają warunki

$$\int_{s_c} \sigma \delta ds = 0, \quad \int_{s_c} \sigma z \delta ds = 0, \quad \int_{s_c} \sigma y \delta ds = 0 \quad (a)$$



Rys. 6.20. Odształcenia przy nieswobodnym skręcaniu

a) obraz pręta o przekroju otwartym; b) obraz odształceń myślowo rozdzielonych ścianek pręta, 00' — oś obrotu;
c) rozkład całkowitych odształceń jednej ścianki na zginanie i skręcanie; d) orientacyjny rozkład σ .

wyrażające, że wypadkowa siła wzdłużna oraz momenty gnące są równe zeru. Z rysunku 6.20b,c wynika ponadto, że ugięcia w_i każdej ścianki nie są liniowymi funkcjami x , co pociąga za sobą stwierdzenie, iż w omawianym przypadku nieswobodnego skręcania kąt Φ obrotu przekrojów nie może być liniową funkcją x .

Przechodząc od analizy jakościowej do ilościowej jako pierwszy etap wyznaczmy rozkład σ po obwodzie płaszcza. Rysując w tym celu jeszcze raz przekrój pręta (rys. 6.20a) widziany tym razem w kierunku wzrastających x (rys. 6.21a), odczytujemy bezpośrednio

z rysunku

$$w_1 = \varrho_1 \Phi, \quad w_2 = \varrho_2 \Phi, \dots \text{itd.}, \quad (b)$$

jako ugięcia poszczególnych ścianek w przekroju $BCDFE$. Robiąc następnie kład ścianki BC przed i po odkształceniu (rys. 6.21b), wyznaczmy zależność między naprężeniami σ_0 we włóknie B i σ_1 we włóknie C . Uwzględniając, że promień krzywizny zgięcia tej ścianki jest $r_1 = 1/w_1''$, z prostych zależności geometrycznych otrzymujemy różnicę wydłużenia $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ włókna B i $\varepsilon_1 = \sigma_1/E$ włókna C równą

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = s_1/r_1 = s_1 w_1'' = s_1 \varrho_1 \Phi'', \quad (c)$$

gdzie $\Phi'' = d^2\Phi/dx^2$. Po prostych przekształceniach mamy

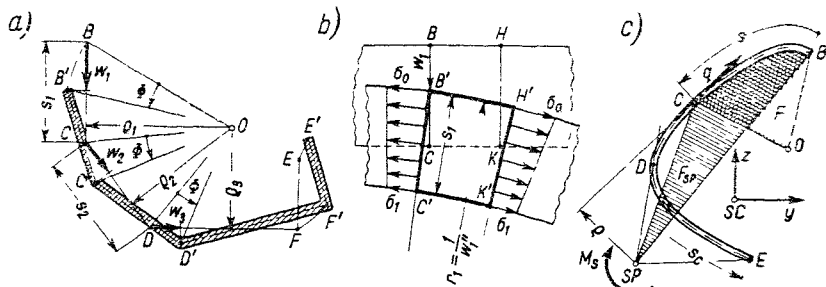
$$\sigma_1 = \sigma_0 - 2EF_1\Phi'', \quad (d)$$

gdzie F_1 — pole trójkąta BOC . Przechodząc następnie do ścianki CD mamy powtórzenie poprzedniego zadania, z tym tylko, że rolę σ_0 spełnia tym razem σ_1 , a rolę σ_1 naprężenie σ_2 we włóknie D . W wyniku otrzymujemy

$$\sigma_2 = \sigma_1 - 2EF_2\Phi'' = \sigma_0 - 2E\Phi''(F_1 + F_2), \quad (e)$$

gdzie F_2 — pole trójkąta COD . Powtarzając tę operację otrzymamy dla ścianki i

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} - 2EF_i\Phi'' = \sigma_0 - 2E\Phi'' \sum_1^i F_m. \quad (6.26a)$$



Rys. 6.21. Określenie odkształceń i oznaczenia przy skręcaniu nieswobodnym

a) określenie ugięć poszczególnych ścianek, kontur $BCDFE$ — profil przed odkształceniem, $B', \dots, E'$ — po skręceniu;
b) określenie odkształceń w elemencie ścianki BC ; c) oznaczenia pól.

Profil o płaszczy zakrzywionym (rys. 6.21c) uważamy za graniczny przypadek profilu o płaskich ściankach, gdy ich liczba staje się nieskończenie wielka. Zamiast wzoru (6.26a) mamy

$$\sigma(s) = \sigma_0 - 2E\Phi''F, \quad (6.26b)$$

gdzie

$\sigma(s)$ — naprężenie we włóknie C ;

F — pole powierzchni ograniczonej łukiem BC i promieniami OB i OC .

Otrzymane wzory (6.26) dają odpowiedź na postawione zadanie wyznaczenia rozkładu σ . Aby jednak te wzory można zastosować, należy określić położenie (dwie współrzędne)

środka O obrotu, gdyż dopiero wtedy znana będzie wartość F . Ponadto trzecią niewiadomą jest σ_0 działające we włóknie B na swobodnej krawędzi. Odpowiedź na te pytania otrzymujemy z równań (a). Zakładając mianowicie, że osie y i z są centralne (lecz niekoniecznie główne) z dwóch ostatnich równań (a), po podstawieniu wyrażenia (6.26b), otrzymujemy ostatecznie*, że środek obrotu przekroju musi zajmować takie położenie, przy którym

$$\int_{s_c} Fz \delta ds = 0, \quad \int_{s_c} Fy \delta ds = 0. \quad (f)$$

Jak łatwo udowodnić, to *szczególne położenie środka O obrotu pokrywa się ze środkiem SP sił poprzecznych***. Wykorzystując to stwierdzenie pole F określamy względem środka SP (rys. 6.21c), który to fakt zaznaczamy zmieniając symbol F na F_{sp} . Ostatnią niewiadomą, tj. σ_0 wyznaczamy z pierwszego z równań (a) w postaci

$$\sigma_0 = \left(2E\Phi'' \int_{s_c} F_{sp} \delta ds \right) / A, \quad (h)$$

gdzie $A = \int_{s_c} \delta ds$ — całkowite pole przekroju poprzecznego. Podstawiając tę wartość σ_0 do (6.26b) mamy w ostatecznym wyniku bardzo prostą zależność

$$\sigma(s) = 2E\Phi'' F_0, \quad (6.27)$$

gdzie F_0 — *główne pole wycinkowe* określone jako

$$F_0 = \left(\int_{s_c} F_{sp} \delta ds / A \right) - F_{sp}. \quad (6.28)$$

Pomijając na razie szczegóły obliczenia F_0 stwierdzamy, że do efektywnego określenia $\sigma(s)$ potrzebna jest jeszcze znajomość Φ'' , którą wyznaczamy z warunku równoważności wypadkowego momentu M_s i momentu od wydatków q . Te ostatnie obliczamy wstawiając $\sigma(s)$ ze wzoru (6.27) do równania (6.2b), a następnie całkując po obwodzie*** wzdłuż łuku $(0, s)$ i uwzględniając, że $(q)_{s=0} = 0$ mamy

$$t(s) = -2E\Phi''' \int_0^s F_0 \delta ds, \quad (6.29)$$

* Przy przekształceniach uwzględniamy, że $\int_{s_c} z \delta ds = 0$ i $\int_{s_c} y \delta ds = 0$ jako momenty statyczne całego przekroju względem centralnych osi, a ponadto, że $2E\Phi''$ nie jest równe zero.

** A oto dowód dla pierwszego z równań (f). Zauważając, że $z \delta ds = dS_y$ — przyrostowi momentu statycznego, całkujemy przez części to równanie

$$\int_{s_c} Fz \delta ds = \int_{s_c} F dS_y = [FS_y]_{s_c}^{s_c} - \int_{s_c} S_y^{0,s} dF, \quad (g)$$

w którym pierwszy składnik jest równy zero, gdyż zarówno $(S_y)_{s=0}$, jak i $(S_y)_{s=s_c} = 0$. Składnik drugi po podstawieniu $2 dF = q ds$ jest identyczny z odpowiednim wyrażeniem w równaniu (1) (art. 6.6). Przyrównanie do zera tego składnika oznacza, iż odległość e_y^* od punktu O jest równa zero. Drugie z równań (f) daje w wyniku $e_z^* = 0$, a to oznacza, że O pokrywa się z SP.

*** Przekształcenia są następujące. Wydatek $n_x = 2E\Phi'' F_0 \delta$, a jego pochodna $\partial n_x / \partial x = 2EF_0 \delta \Phi'''$, gdyż tylko Φ jest funkcją x . Z równania (6.2b) mamy więc

$$\partial q / \partial s = -2EF_0 \delta \Phi'''.$$

dzięki czemu warunek równoważności momentów $M_s = \int_{s_c} q\varrho \, ds$ (rys. 6.21c) względem SP przybiera ostatecznie postać*

$$M_s = -C_s \Phi''', \quad (6.30)$$

gdzie

$C_s = 4EJ_F$ — sztywność nieswobodnego skręcania, a

$$J_F = \int_0^{s_c} F_0^2 \delta \, ds \quad [\text{cm}^6] \quad (6.31)$$

tak zwany *główny wycinkowy moment bezwładności*.

Podsumowując przeprowadzone rozważania możemy stwierdzić, iż przy poczynionych założeniach, a mianowicie: nieodkształcalności poprzecznych przekrojów w ich płaszczyznach (art. 6.1) i pominięciu wpływu naprężeń stycznych na ugięcia ścianek**, nieswobodne skrócenie pręta charakteryzuje się:

- a) obrotem przekrojów względem osi przechodzącej przez SP,
- b) pojawieniem się w poprzecznych przekrojach naprężeń normalnych proporcjonalnych do głównego pola wycinkowego F_0 i do Φ'' (wzór 6.27);
- c) istnieniem w poprzecznych przekrojach naprężeń stycznych proporcjonalnych do Φ''' i geometrycznej wielkości $\int F_0 \delta \, ds$ (wzór 6.29);
- d) proporcjonalnością M_s do Φ''' (wzór 6.30).

Na zakończenie tych ogólnych rozważań sformułujmy jeszcze warunki brzegowe dla kąta Φ . We wszystkich przypadkach, gdy zamknięcie pręta stanowi żebro wiotkie w kierunku prostopadłym do jego płaszczyzny, w każdym punkcie tego przekroju $\sigma(s) \equiv 0$, skąd wynika, że $\Phi'' = 0$ (wzór 6.27.). Jeśli w przekroju końcowym $M_s = 0$, to $\Phi''' = 0$ (wzór 6.30). Wreszcie w przypadku, gdy w danym przekroju usunięto możliwość spaczenia,

* A oto przebieg przekształceń. Warunek równoważności

$$M_s = \int_{s_c} q\varrho \, ds = \int_{s_c} q_2 \, dF_{SP} = -4E\Phi''' \int_{s_c} \left(\int_0^{s_c} F_0 \delta \, ds \right) dF_{SP}$$

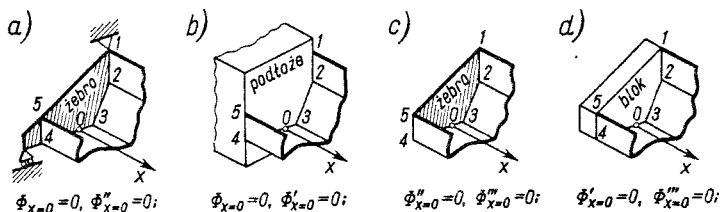
po uwzględnieniu, że $dF_{SP} = -dF_0$ i scałkowaniu przez części brzmi

$$M_s = 4E\Phi''' \left[F_0 \int_0^{s_c} F_0 \delta \, ds \right]_0^{s_c} - \int_0^{s_c} F_0 \delta F_0 \, ds = -4E\Phi''' \int_0^{s_c} F_0^2 \delta \, ds,$$

gdyż $\int_0^0 F_0 \delta \, ds = 0$ oraz $\int_0^{s_c} F_0 \delta \, ds = 0$. Ten ostatni wynik staje się jasny, jeśli zauważyć, iż jest to wielkość proporcjonalna do wypadkowej siły wzdłużnej (wzór 6.27), która musi być równa zeru (patrz wzór a).

** Założenie to zrobiono w momencie formułowania zależności (c) (rys. 6.21b), gdy narysowano odkształcony element ścianki z prostymi krawędziami $B'C'$ i $H'K'$. W rzeczywistości istnienie naprężeń stycznych modyfikuje tę zależność. Ten wpływ jest istotny tylko dla bardzo krótkich prętów, które zbliżają się do modelu bryły (patrz wstęp do rozdz. 6), w której problematyczne również staje się założenie o nieodkształcalności przekroju. Z tego powodu kwestię tę omówiono w rozdziale o bryłach cienkościennych.

wówczas zgodnie z rys. 6.20b, w każdej ściance $dw_t/dx = 0$. Wtedy według wzoru (b) w takim przekroju $\Phi' = 0$. Opierając się na tych stwierdzeniach, dla niektórych sposobów podparcia pręta (rys. 6.22) sformułowano odpowiednie warunki brzegowe. Jak wi-



Rys. 6.22. Określenie warunków brzegowych

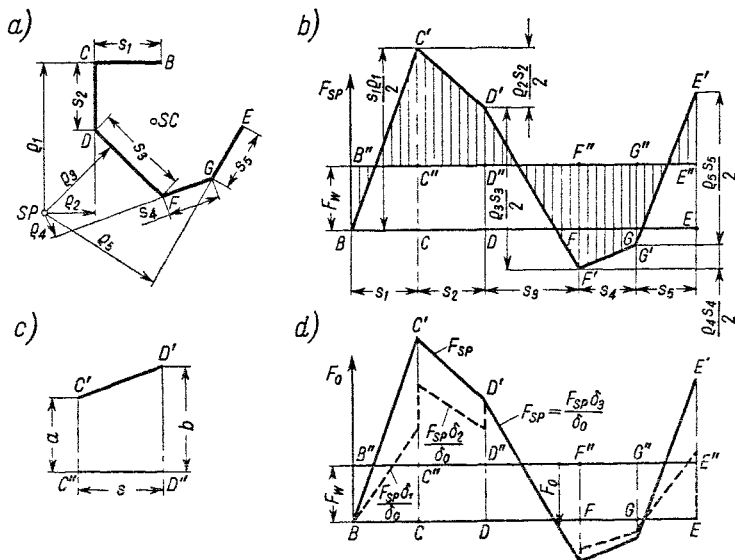
a) unieruchomienie żebra; b) utwierdzenie; c) koniec swobodny zamknięty żebrzem; d) koniec swobodny zamknięty blokiem uniemożliwiającym spalenie lecz pozwalającym na obrót.

dzimy dla pojedynczego pręta muszą być spełnione cztery warunki brzegowe, co przekracza liczbę będących do dyspozycji stałych całkowania równania (6.30). Sprzeczność ta jest tylko pozorna i będzie wyjaśniona w art. 6.9.

6.8. Sposoby wyznaczania momentu J_F i sztywności C_s

Podobnie jak w Wytrzymałości Materiałów, przy omawianiu zginania belek czynnością wstępną jest wyznaczanie momentów bezwładności, tak i w przypadku nieswobodnego skręcania analogiczną czynnością wstępną jest określenie sztywności nieswobodnego skręcania C_s (kGcm⁴). Ponieważ $C_s = 4EJ_F$, przeto zadanie sprowadza się do wyznaczenia głównego wycinkowego momentu bezwładności* J_F (cm⁶), a to z kolei do określenia głównego pola wycinkowego F_0 (cm²). Rozważania nasze rozpoczniemy od określenia tych wielkości dla profilu z płaskimi ściankami i stałej na całym obwodzie grubości δ (rys. 6.23a). Traktując położenie środka SP sił poprzecznych jako znane (art. 6.6), wyznaczamy względem tego punktu pola F_{SP} dla naroży B, C, D, F, G i E (porównaj rys. 6.21c), zachowując przy tym umowę co do obiegu obwodu (tj. od punktu B do E , patrz art. 6.6). Pola F_{SP} uważamy za dodatnie, gdy ustalony poprzednio obieg obwodu widoczny jest z punktu SP jako ruch przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Tak więc F_{SP} dla punktu C jest dodatnie i równe $F_1 = s_1 \varrho_1 / 2$, natomiast dla punktu D jest ono różnicą F_1 i $F_2 = s_2 \varrho_2 / 2$, gdyż ustalony obieg na odcinku CD widoczny jest z SP jako ruch zgodny z ruchem wskazówek zegara tj. $(F_{SP})_D = F_1 - F_2$. Podobnie w punkcie F pole $(F_{SP})_F$ wyraża się jako $(F_{SP})_F = (F_{SP})_D - F_3 = (F_{SP})_D - (s_3 \varrho_3 / 2)$, gdyż nadal ustalony obieg od B do E widoczny jest z punktu SP jako ruch zgodny z ruchem wskazówek zegara, itd. Rozwijając teraz obwód płaszcza na oś odciętych BE (rys. 6.23b) znalezione wartości F_{SP} odmierzymy jako rzędne w punktach odpowiadających narożom $B, \dots, E$ i tak otrzymane punkty $B, C', \dots, E'$ łączymy liniami prostymi otrzymując w ten sposób F_{SP} w funkcji s . Aby

* Geneza tej nazwy bierze się z podobieństwa wzoru (6.31) i wzorów (e) (art. 6.5), z tym tylko, że rolę współrzędnych y i z pełni tym razem główne pole wycinkowe F_0 .



Rys. 6.23. Wykreślne wyznaczenie wycinkowego momentu bezwładności J_F

a) obraz przekroju; b) wykres F_{SP} i określenie F_0 dla przypadku $\delta = \text{const}$; c) oznaczenia do wzoru (a); d) wykres F_{SP} i określenie F , dla $\delta \neq \text{const}$; jako δ_0 przyjęto δ_1 na odcinku DF

teraz otrzymać główne pole wycinkowe F_0 , zauważmy, że przy $\delta = \text{const}$ średnia ważona F_w

$$F_w = \left(\int F_{SP} \delta \, ds \right) / A \quad (6.32a)$$

upraszcza się, a mianowicie

$$(F_w)_{\delta=\text{const}} = \left(\int F_{SP} \, ds \right) / s_c \quad (6.32b)$$

i przedstawia średnią wartość F_{SP} . Określiwszy tę wartość przenosimy po prostu oś odciętych do położenia $B'' E''$ otrzymując szukane wartości F_0 jako

$$F_0 = F_w - F_{SP}, \quad (6.32c)$$

to znaczy wzięte z odwrotnym znakiem rzędne wykresu $BC' \dots E'$ względem nowej osi odciętych. Mając ten wykres możemy już łatwo obliczyć J_F , jako mnożony przez δ „moment bezwładności” linii* łamanej $BC' \dots E'$ względem nowej osi odciętych $B'' E''$. Dla ułatwienia podajemy tu, że „moment bezwładności” dla odcinka $C'D'$ względem $C'' D''$ (rys. 6.23c) jest

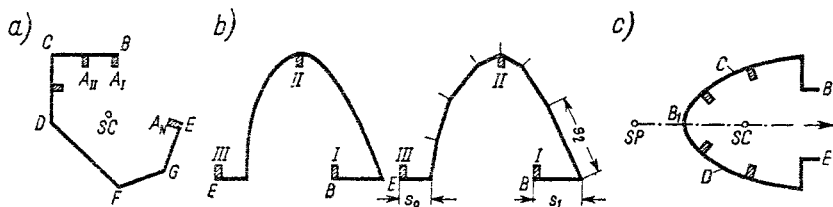
$$abs + [(b-a)^2 s/3]. \quad (a)$$

* Ścisłe biorąc moment bezwładności linii $z = f(y)$ względem osi y jest $\int z^2 \, ds$, a nie $\int z^2 \, dy$ jak w przypadku rozważanym, tj. $\int F_0^2 \, ds$. Z tego powodu nazwę moment bezwładności wzięto w cudzysłów.

Opisany sposób określenia J_F można uogólnić na przypadek, gdy grubość ścianek profilu nie jest stała. Rysując jak poprzednio* wykres F_{SP} (rys. 6.23d), tworzymy nowy wykres (linia przerywana), którego rzędne są zredukowane w stosunku δ_i/δ_0 , gdzie δ_0 — grubość jednej ze ścianek przyjęta jako wartość odniesienia. Obliczając teraz pole między osią BE a rzędnymi tego nowego wykresu i dzieląc przez zredukowaną długość obwodu $s_{xr} = \sum (s_i \delta_i/\delta_0)$ wyznaczamy F_w , a następnie F_0 (wzór 6.32c). Jeśli profil ma skupione pasy (rys. 6.24a), to zaznaczając ich położenia w odpowiednich miejscach na osi BE (rys. 6.23b,d) odczytujemy właściwe im rzędne F'_{SP} , to jest $F_I, F_{II}, \dots, F_N$, a średnią ważoną wartość F_w wyznaczamy jako

$$F_w = \left(\int_{s_c} F_{SP} \delta ds + \sum F_K A_K \right) / \left(\int_{s_c} \delta ds + \sum A_K \right), \quad (6.32d)$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie N pasów. Przy obliczaniu J_F udział pasów uwzględniamy dodając do $(J_F)_{płazcza}$ sumę wszystkich składników $F_{OK}^2 A_K$, gdzie F_{OK} — główne pole wycinkowe odpowiadające pasowi K . W przypadku wprowadzenia pasów zastępczych (rys. 6.15d, 6.18b), co jest równoznaczne z przypisaniem im jednym zdolności



Rys. 6.24. Inne przypadki wyznaczenia J_F

a) profil z pasami skupionymi; b) profil z płaszczem cylindrycznym; c) profil symetryczny.

przenoszenia naprężeń normalnych, we wszystkich wyrażeniach pomijamy składnik odpowiadający udziałowi płaszcza otrzymując

$$F_w = \sum F_K A_K / \sum A_K, \quad J_F = \sum F_{OK}^2 A_K. \quad (b)$$

Dla profilu ze ściankami zakrzywionymi sprowadzamy zadanie do poprzednich, rysując kontur zastępczy (rys. 6.24b) złożony z dostatecznej liczby ścianek płaskich.

W przypadku profilu symetrycznego (rys. 6.24c) wszystkie obliczenia ulegają znacznemu uproszczeniu, jeśli zauważyć, że w punkcie B_1 pole $F_0 \equiv 0$. Rozpoczynając zatem obliczenie F_{SP} od tego punktu otrzymujemy od razu wartości $F_0 = F_{SP}$, przy czym w symetrycznie położonych punktach C, D odpowiednie F_0 mają przeciwne wartości. Wartość $J_F = 2J'_F$, gdzie J'_F obliczone jest dla jednej tylko połowy profilu B_1E .

Dla profili otwartych z odgałęzieniami (rys. 6.25a) pewna dodatkowa trudność przy określeniu F_0 wynika z potrzeby zapewnienia ciągłości odkształceń w miejscach rozgałęzień to jest punktach C, D, F . Kwestię tę rozwiązujemy następująco: obieramy w sposób umowny płaszcz główny $BCDE$, dla którego ustalamy obieg I i obliczamy jak poprzednio (rys. 6.23) przebieg F_{SP} , otrzymując wykres $BC'D'E'$

* Dla zilustrowania różnicy postępowania linia $BC' \dots E'$ została przeniesiona z rys. 6.23b, tak jak gdyby zmiana grubości ścianek nie zmieniała położenia SP na przekroju (rys. 6.23a). Nie jest to prawdą.

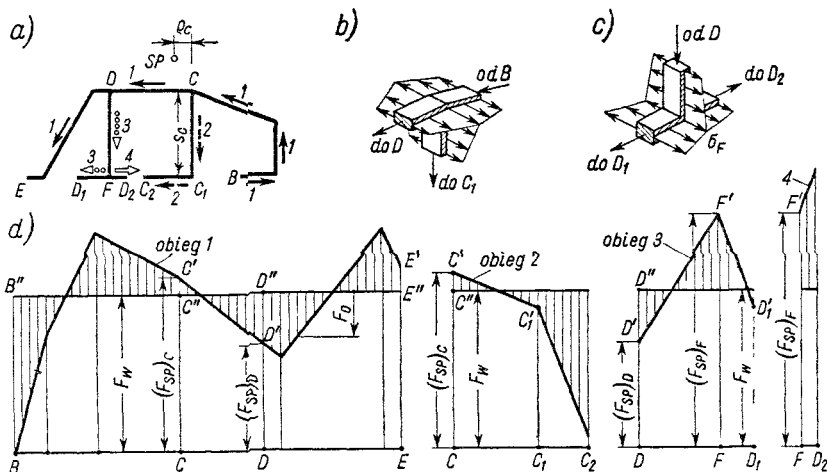
(rys. 6.25d). Przeanalizujemy teraz sytuację w punkcie C (rys. 6.25b), w którym z uwagi na ciągłość odkształceń naprężenia σ_c muszą być w ścianie CC_1 takie same jak w płaszczu głównym. Wynika stąd (patrz wzory 6.27 i 6.28), że pole F_{SP} w punkcie C ścianki CC_1 musi być równe znanej już wartości $(F_{SP})_C$ dla płaszcza głównego. Ten punkt jest więc dla nas punktem początkowym obiegu 2 na odgałęzieniu CC_1C_2 . Rysując teraz rozwinięcie obwodu ścianki CC_1C_2 odmierzymy rzędną $(F_{SP})_C$ w punkcie C , a pozostałe rzędne obliczamy jak poprzednio. Tak na przykład rzędna CC_1 jest równa różnicy $(F_{SP})_C$ i $(\sigma_c \varrho_c / 2)$ (patrz rys. 6.25a) itd. Analogicznie postępujemy dla odgałęzienia DFD_1 (obieg 3) otrzymując w wyniku wykres $D'F'D'_1$. Ścianka FD_2 stanowi przy tym odgałęzienie II stopnia, a wykres F_{SP} dla niej otrzymujemy biorąc odpowiednią rzędną $(F_{SP})_F$ z obiegu 3. W wyniku otrzymujemy szereg wykresów F_{SP} (rys. 6.25 d), z których, tak jak poprzednio (rys. 6.23 i wzory 6.32), wyznaczamy średnią ważoną F_w , biorąc oczywiście $\int F_{SP} \delta \, ds$ dla wszystkich obiegu, a pole A jako sumę pól wszystkich elementów. Wszystkie omówione poprzednio uproszczenia jak $\delta = \text{const}$ itp., jak również i dalsze postępowanie, tj. obliczenie F_0 i J_F mogą być tu w niezmienionej postaci zastosowane.

Dla niektórych profili odpowiednie wzory dla C_s podano w tabl. 6.4.

SZTYWNOŚĆ NIESWOBODNEGO SKRĘCANIA PROFILI OTWARTYCH

Tablica 6.4

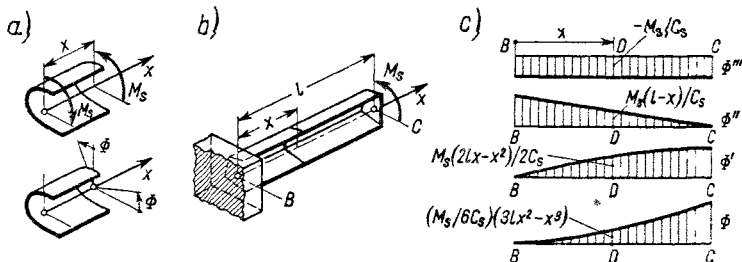
	$C_s = \frac{Eb^3h^2\delta}{12} \frac{2+3\xi}{1+6\xi}; \quad \xi = \frac{b}{h}; \quad e_x = b \frac{3\xi}{1+6\xi}$
	$C_s = \frac{Eb^3h^2\delta}{24}$
	$C_s = \frac{Eb^3h^2\delta}{12} \frac{\xi(2+\xi)+2\psi[1+2(1+\xi)(1+6\xi)+12\varepsilon^2(1+2\xi)]}{1+2\xi+2\psi};$ $\xi = \frac{b}{h}, \quad \psi = \frac{A_p}{h\delta}; \quad \varepsilon = \frac{c}{h}$
	$C_s = \frac{Eb^3h^2\delta}{12} \frac{\xi(2+\xi)+2\psi[3+2\xi+6\psi(1+\xi)+4\psi^2(1+2\xi)+2\psi^3]}{1+2\xi+2\psi};$ $\xi = \frac{b}{h}; \quad \psi = \frac{c}{h}$
	$C_s = \frac{Ec^3h^2\delta}{6} \frac{4+3\xi}{2-(1-\xi)^3}; \quad \xi = \frac{c}{h}; \quad e_y = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{(3-2\xi)\xi}{2-(1-\xi)^3}$
	$C_s = \frac{2Er^2\delta}{3} \left[\beta^3 - \frac{6(\sin\beta - \beta\cos\beta)^2}{\beta - \sin\beta\cos\beta} \right];$ $e_y = \left(2 \frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta - \sin\beta\cos\beta} - 1 \right) r$
	Przy dowolnych wymiarach, grubościach i ustawieniu płaskich ścianek $C_s \equiv 0$

Rys. 6.25. Określenie J_F dla profilu z odgałęzieniami

a) obraz profilu i oznaczenia obiegów, b, c) układy napięć w miejscach rozgałęzień C, F; d) wykresy F_{sp} oraz F_0 (to ostatnie dla przypadku $\delta = \text{const}$).

6.9. Określenie odkształceń i naprężeń przy nieswobodnym skręcaniu

Traktując sztywność C_s jako znaną, przechodzimy z kolei do obliczenia kąta Φ i jego pochodnych, których znajomość jest niezbędna dla wyznaczenia $\sigma(s)$ (wzór 6.27) i $q(s)$ (wzór 6.29). Jeśli jako podstawę przyjąć nadal założenie (art. 6.7), że *przeważająca część momentu M_s przeniesiona jest przez zginanie ścianek*, to utożsamiając tę „przeważającą część” z całkowitą wartością M_s , sprowadzamy zagadnienie określenia odkształceń do spłaskowania równania (6.30) przy znanych warunkach brzegowych i znanej już sztywności



Rys. 6.26. Wyznaczanie odkształceń przy nieswobodnym skręcaniu

a) oznaczenia dodatnich M_s i Φ ; b) przykład pręta wspornikowego; c) wyniki rozwiązania.

C_s . Zgodnie przy tym z wprowadzonymi już poprzednio w ogólnych rozważaniach umowami, dodatnie zwroty M_s i Φ przyjmujemy* według rys. 6.26a.

* Patrząc w kierunku wzrastających x i traktując bliższy przekrój jako utwierdzony widzimy dodatnie M_s i Φ w dalszym przekroju jako obrót przeciwny do ruchu zegara.

Jako najprostszy przypadek rozważmy wspornikowy pręt (rys. 6.26b) obciążony na swobodnym końcu dodatnim momentem M_s . Wykres momentów skręcających M_s wzdłuż osi pręta jest prostokątem, a $\Phi''' = -M_s/C_s = \text{const.}$ Całkując to wyrażenie mamy

$$\Phi'' = -M_s x/C_s + D_1, \quad (a)$$

gdzie D_1 — stała całkowania, której wartość wyznaczymy z warunku, iż dla $x = l$ $\sigma(s) \equiv \equiv 0$. Zgodnie ze wzorem (6.27) jest to możliwe tylko wtedy, gdy $(\Phi'')_{x=l} = 0$, skąd wynika

$$D_1 = M_s l/C_s$$

i ostatecznie

$$\Phi'' = M_s(l-x)/C_s. \quad (b)$$

Całkując z kolei równanie (b) wyznaczamy jednostkowy kąt skreńcenia φ jako

$$\varphi = \Phi' = (M_s/C_s)[lx - (x^2/2)] + D_2,$$

gdzie D_2 — druga stała całkowania, którą obliczymy z warunku, iż dla $x = 0$ kąt $\varphi = \Phi' = 0$ (rys. 6.22b). W rezultacie mamy $D_2 = 0$, a więc

$$\varphi = \Phi' = (M_s/C_s)[lx - (x^2/2)]. \quad (c)$$

Kolejne całkowanie równania (c) daje wartość Φ ze stałą całkowania $D_3 = 0$, gdyż dla $x = 0$ kąt $\Phi = 0$. Tak więc

$$\Phi = (M_s/6C_s)(3lx^2 - x^3), \quad (d)$$

przy czym maksymalna wartość Φ występuje dla $x = l$ i jest

$$\Phi_{\text{ekstr}} = M_s l^3/3C_s. \quad (6.33)$$

Otrzymane wyniki (b), (c), (d) (rys. 6.26c), jak i wzór (6.33), mają identyczną budowę, jak wykresy momentów gnących, kątów ugięcia i ugięcia w wspornikowej belki obciążonej na swobodnym końcu siłą skupioną P , z tym tylko, że w przypadku skręcania rolę wyrażenia P/EJ spełnia M_s/C_s . Analogia ta nie jest przypadkowa, lecz wynika z identyczności równań różniczkowych opisujących te dwa zjawiska. Wprowadzając mianowicie w przypadku zginanej belki siłę tnącą $T = dM_g/dx = EJw'''$ i porównując z równaniem (6.30) mamy

$$EJw''' = T, \quad C_s\Phi''' = -M_s, \quad (e)$$

Identyczność obu równań (e), a w konsekwencji i $w \equiv \Phi$ zajdzie wtedy, gdy dołączymy

$$EJ = C_s \quad \text{ i } \quad T = -M_s, \quad (6.34)$$

i gdy warunki brzegowe dla w będą identyczne, jak warunki dla Φ . Ten ostatni postulat będzie spełniony, jeśli w zginanej belce wprowadzimy podpory w sposób podany na tabl. 6.5 (pozycje 1÷5). Zapewnienie równości $EJ = C_s$ wymaga, aby w przypadku zmiennej sztywności C_s zmieniała się w tym samym miejscu sztywność EJ zginanej belki (pozycja 6). Wreszcie dla zapewnienia $T = -M_s$ musimy zginaną belkę obciążyć w sposób podany

Tablica 6.5

Odpowiedniość warunków brzegowych

1 $\phi=0; \phi''=0$	2 $\phi=0; \phi'=0$	3 $\phi''=0; \phi'''=0$	4 $\phi'=0; \phi'''=0$	5 $\phi''=0; C_s \phi''' = k \phi$
podpora $w=0; w''=0$	utwierdzenie $w=0; w'=0$	koniec swobodny $w''=0; w'''=0$	utwierdzenie przesuwne $w'=0; w'''=0$	podpora sprężysta $w''=0; EJ w''' = Kw$

Odpowiedniość sztywności i obciążeń

6 $EJ_1 = C_{s1}; EJ_2 = C_{s2}$	7 $P = M_s$	8 $P = M_s$	9 $q = m_s$	10 $M = 2B J_c$
---	--------------------	--------------------	--------------------	------------------------

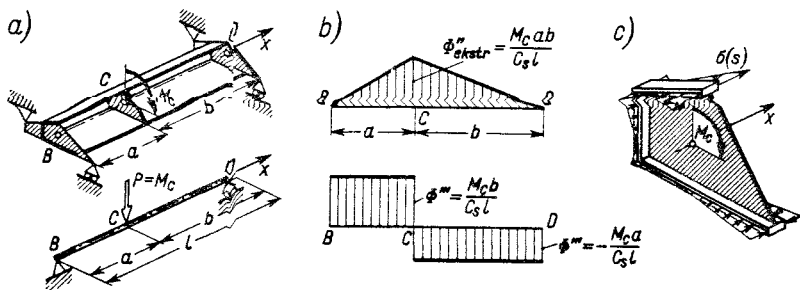
w pozycjach 7÷10 tejże tablicy*. Jeśli teraz rozwiążemy tak przekształconą belkę i w wyniku otrzymamy dla niej siłę tnącą T , moment gnący M_g i ugięcie w , to szukane wielkości dla pręta skręcanego:

$$M_s = -T, \quad \Phi''' = T/C_s, \quad \Phi'' = M_g/C_s, \quad \Phi = w. \quad (6.35)$$

Ilustracją tego postępowania jest pręt podparty na dwóch żebrowach krańcowych (rys. 6.27a), dla którego zastępczą zginaną belkę otrzymujemy po zastosowaniu reguł 1 i 7 tablicy 6.5. Wynik rozwiązania (rys. 6.27b) wykazuje, iż moment M_c dzieli się na dwie części $M_c b/l$ i $M_c a/l$ przeniesione odpowiednio przez BC i CD . Niezmiernie ważne jest to, iż ten podział zależy tylko od geometrii pręta, nie zależy zaś od tego, czy C_s jest stałe, czy nie. W odróżnieniu zatem od skręcania rur, gdzie analogiczne zadanie jest statycznie niewyznaczalne, mamy tu do czynienia z przypadkiem statycznej wyznaczalności. Fakt ten stanie się jasny, jeśli odrzucić w myśli jedną z części pręta np. CD i zauważyć, że pozostała część BC może pracować na skręcanie tylko wtedy, gdy w prze-

* A oto kilka uwag dodatkowych. Pozycje 3 i 4 przedstawiają swobodny koniec pręta zamknięty żebrową bądź blokiem uniemożliwiającym spalenie. Zmiana C_s (pozycja 6) przy wprowadzeniu tylko żebra jest prawidłowa z punktu widzenia wytrzymałości tylko wtedy, gdy następuje w wyniku jednakowej proporcjonalnej zmiany grubości wszystkich ścianek przekroju. Wreszcie obciążenie (pozycja 10) odpowiada działaniu samorównoważonego układu wydatków n , których rozkład jest identyczny z rozkładem $\sigma(s) \delta$ (wzór 6.27).

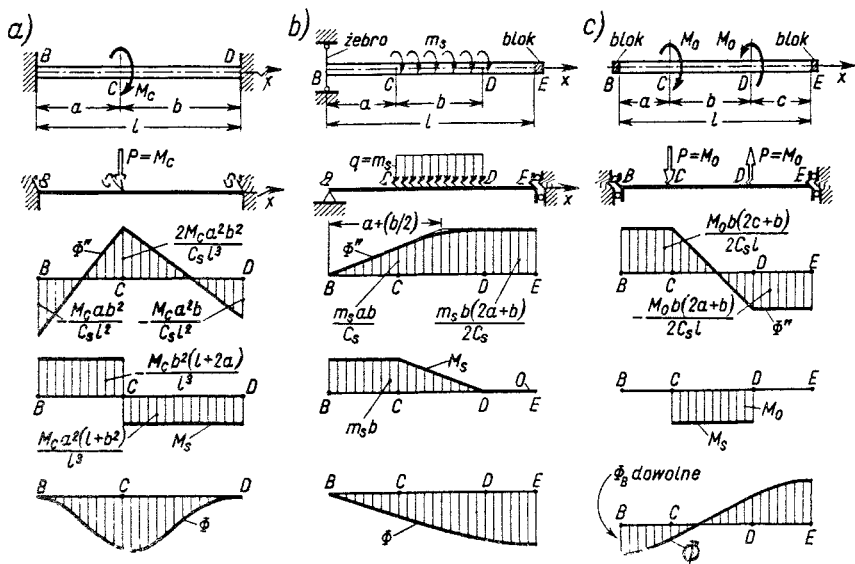
kroju C pojawiają się napężenia normalne. To samo da się powiedzieć o części CD , gdy od-
rzucimy część BC . Z równowagi jednak plasterka w miejscu C (rys. 6.27c) wynika, że
te napężenia muszą być równe i to jest właśnie dodatkowym warunkiem statycznym
określającym stosunek podziału M_C na obie części BC i CD .



Rys. 6.27. Przykład rozwiązania metodą analogii

a) rzeczywisty pręt i zastępcza belka; b) wyniki rozwiązania; c) układ napężeń σ w przekroju C .

W identyczny sposób rozwiązujemy wszystkie inne zagadnienia nieswobodnego skre-
cania prętów. Kilka przykładów tego podano na rys. 6.28, przy czym wykorzystano
wiadomości podawane w książce Wytrzymałości Materiałów, jak rozwiązanie belki 2-stron-
nie utwierdzonej (rys. 6.28a). Pewną innowację stanowi jedynie potrzeba wprowadzenia
podpór przenoszących moment gnący, lecz nie przenoszących siły poprzecznej (rys. 6.28b,c),



Rys. 6.28. Inne przykłady rozwiązania skręcania nieswobodnego metodą analogii

a) pręt obustronnie utwierdzony; b) pręt jednostronnie uinieruchomiony z blokiem na swobodnym końcu; c) pręt
z blokami na obu końcach swobodnych.

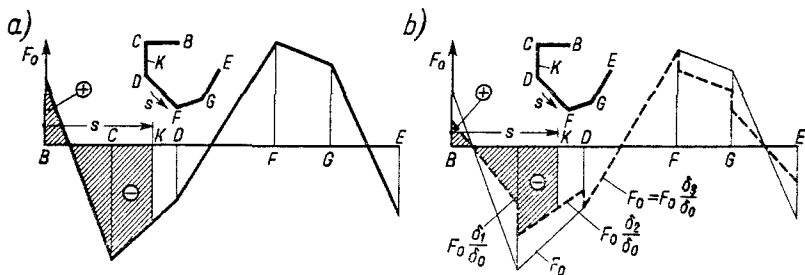
odpowiadających zamknięciu końca pręta sztywnym blokiem uniemożliwiającym spłaszczenie przekroju. Interesujące jest przy tym to, że niektóre zagadnienia (rys. 6.28c), które przy założeniu swobodnego skręcania rur byłyby statycznie wyznaczalne, na gruncie teorii nieswobodnego skręcania stają się statycznie niewyznaczalne.

Dodatkową ważną zaletą omawianej analogii jest możliwość oceny prawidłowości konstrukcji. Jeśli mianowicie zastępuje belka jest co najmniej konstrukcją statycznie wyznaczalną, to konstrukcja pierwotna (skręcany pręt) jest prawidłowa. Gdyby na przykład w przecie (rys. 6.28b) koniec E nie był zamknięty blokiem, lecz tylko żebrem, to zastępuje belka zamiast przesuwnego utwierdzenia E miałaby w tym miejscu koniec swobodny (patrz pozycja 3 tabl. 6.5) i nie byłaby dostatecznie podparta. Taki pręt byłby wobec tego konstrukcją nieprawidłową. Pozorny wyjątek od tej reguły stanowią pręty swobodne (rys. 6.28c), których unieruchomienie jest kwestią umownego określenia kąta Φ w jednym przekroju.

Obliczenie naprężeń $\sigma(s)$ po określeniu pola F_0 , sztywności C_s i kąta Φ oraz Φ'' sprowadza się właściwie do mechanicznego podstawienia odpowiednich wartości do wzoru (6.27). Oczywiście jest, że w konstrukcji o stałej sztywności C_s badanie $\sigma(s)$ ogranicza się do przekroju, w którym Φ'' osiąga ekstremum, albo, co jest równoznaczne, w którym moment gnący zastępczą belkę ma wartość ekstremalną. Rozkład σ po obwodzie tego niebezpiecznego przekroju jest bezpośrednio widoczny z przebiegu F_0 (rys. 6.23b, d).

Obliczenie naprężeń $\tau(s)$ sprowadza się do określenia z wykresów sił tnących $T = -M_s$ niebezpiecznego przekroju w zastępczej zginanej belce, a następnie do wyznaczenia w tym przekroju wydatku $q(s)$ z zależności

$$q(s) = (M_s/2J_F) \int_0^s F_0 \delta ds \quad (6.36)$$



Rys. 6.29. Obliczenie $\int F_0 \delta ds$

a) przypadek $\delta = \text{const}$; b) przypadek $\delta \neq \text{const}$, jako δ_0 przyjęto δ_0 ścianki DF . Obydwa wykresy F_0 wzięto z rys. 6.23.

będącej prostą modyfikacją wzoru (6.29). Jedyną rzeczą wymagającą wyjaśnienia jest tu obliczenie wartości całki występującej w (6.36). Dla profilu o stałej grubości δ ścianki (rys. 6.23a) całka ta oznacza mnożone przez δ pole między wykresem F_0 a osią odciętych $B''E''$ (rys. 6.23b) dla przedziału od $s = 0$ do bieżącej odciętej s (rys. 6.29a). Analogicznie dla pręta ze ściankami o różnej grubości całkę tę obliczamy jako mnożone przez δ_0 pole

zakreskowane na rys. 6.29b. Wreszcie w przypadku profilu o pasach skupionych (rys. 6.24a) do całki $\int F_0 \delta ds$ dodajemy sumę $F_{OK} A_K$ wszystkich pasów znajdujących się na odcinku od $s = 0$ do bieżącej wartości s . Tak więc w punkcie obwodu między pasem A_{II} a punktem C (rys. 6.24a) należy dodać $F_{OI} A_I$ i $F_{OII} A_{II}$ itd. Jeśli w wyniku podstawienia wartości liczbowych do (6.36) otrzymujemy $q(s) > 0$, to zwrot ich jest według umowy art. 6.6 (rys. 6.15 i 6.18).

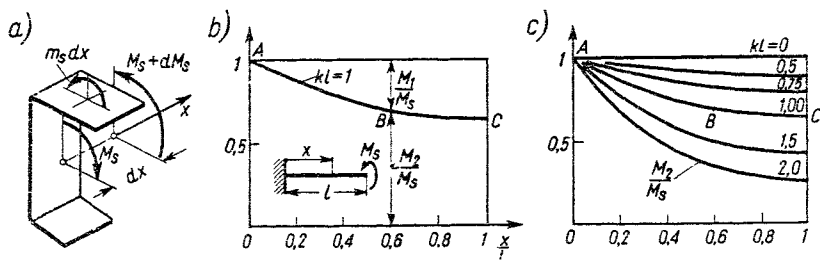
Obliczenie naprężeń zredukowanych σ_{red} w płaszczu polega na wyznaczeniu ich wartości z ogólnie znanego wzoru

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2(s) + 3\tau^2(s)}, \quad (f)$$

przy czym $\sigma(s)$ i $\tau(s)$ muszą odpowiadać temu samemu punktowi tego samego przekroju.

Zbadajmy obecnie dopuszczalność wstępnego założenia o dominującej roli nieswobodnego skręcania w przenoszeniu M_s . Wracając do rys. 6.20 zauważmy, że całkowity moment M_s przeniesiony jest nie tylko przez nieswobodne skręcanie lecz i przez skręcanie swobodne (rys. 6.20c). Wartości momentów odpowiadających obu tym formom przenoszenia skręcania są odpowiednio $-C_s \Phi'''$ i $C\Phi'$ (wzory 6.30 i 6.10), a ich suma jest równa całkowitemu momentowi M_s w danym przekroju, to znaczy

$$C\Phi' - C_s \Phi''' = M_s. \quad (6.37a)$$



Rys. 6.30. Analiza wpływu sztywności na skręcanie swobodne

a) równowaga elementu; b, c) wynik rozwiązania dla pręta wspornikowego z rys. 6.26, przy różnych M .

Jeśli na pręt działa ciągle skręcające m_s (kgGcm/cm), to z równowagi elementu (rys. 6.30a) mamy

$$dM_s/dx + m_s = 0, \quad (g)$$

a po podstawieniu i uporządkowaniu

$$C_s \Phi^{IV} - C\Phi'' = m_s, \quad (6.37b)$$

jako uogólnienie równania (6.37a). W tej postaci jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia otrzymamy tylko wtedy, gdy będą podane cztery warunki brzegowe (rys. 6.22). W przypadku statycznej wyznaczalności M_s jest znaną funkcją x spełniającą warunek równowagi pręta jako całości. Równanie (6.37a) jest wtedy pierwszą całką równania (6.37b) spełniającą tożsamościowo warunek brzegowy odnoszący się do Φ''' , tak że do dyspozycji zostają tylko warunki dla Φ , Φ' , Φ'' i odpada tym samym pozorna sprzeczność podkreślona w zakończeniu art. 6.7.

Przechodząc do analizy równania (6.37a) rozpatrzmy wspornikowy pręt (rys. 6.26b), gdy $M_s = \text{const}$. Rozwiązanie szczególne Φ_1 tego równania

$$\Phi_1 = M_s x / C \quad (h)$$

odpowiada swobodnemu skręcaniu. Rozwiązanie ogólne Φ_2 równania uproszczonego ($M_s \equiv 0$) ma postać

$$\Phi_2 = D_1 + D_2 \cosh kx + D_3 \sinh kx, \quad (i)$$

gdzie $k = \sqrt{C/C_s}$ (1/cm). Całkowity kąt $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ przedstawia się zatem wyrażeniem, w którym występują trzy stałe D . Wartości tych stałych wyznaczamy z warunków

$$\Phi_{x=0} = 0, \quad \Phi'_{x=0} = 0, \quad \Phi''_{x=l} = 0, \quad (j)$$

skąd $D_1 = -D_2 = -(M_s/Ck) \tanh kl$, $D_3 = -M_s/Ck$. Podstawiając te wyniki do wyrażenia na Φ mamy ostatecznie

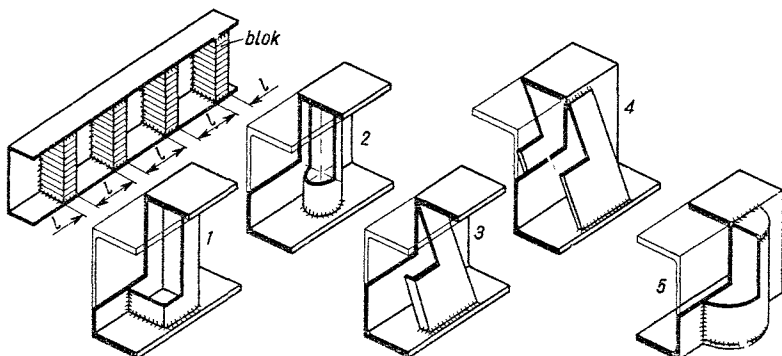
$$\Phi = \frac{M_s x}{C} - \frac{M_s}{Ck} \frac{\sinh kl - \sinh k(l-x)}{\cosh kl} \quad (k)$$

złożone z dwóch składników, w których pierwszy przedstawia kąt swobodnego skręcenia, drugi zaś wpływ nieswobodnego skręcania wynikającego z utwierdzenia przekroju $x = 0$. Ich znaczenie wystąpi szczególnie jasno, jeśli dodatkowo obliczymy część $M_1 = C\Phi'$ momentu M_s przeniesioną przez skręcanie swobodne, i część $M_2 = -C_s\Phi''$ przeniesioną przez skręcanie nieswobodne. Odpowiednie rachunki dają w wyniku

$$M_1 = M_s \left[1 - \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl} \right], \quad M_2 = M_s \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl}, \quad (l)$$

a ich przebieg dla $kl = 1$ podaje rys. 6.30b. Jak widać na swobodnym końcu (punkt O) prawie 33% momentu M_s przenoszone jest przez skręcanie swobodne (art. 6.3), natomiast w okolicy utwierdzenia udział ten spada do zera. Kreśląc podobne wykresy dla różnych kl widzimy, iż dla pręta, w którym $kl < 0,5$ udział momentu M_1 jest technicznie pomijalny. Analogiczny wniosek można wyciągnąć i dla innych przypadków obciążenia pręta, jeśli tylko pod pojęcie l podstawimy *największą* dla danej konstrukcji odległość między przekrojem, w którym istnieje maksymalna swoboda spaczenia ($|\Phi''| = \text{minimum}$), a przekrojem, w którym występuje maksymalne utwierdzenie przeciwko spaceniu ($|\Phi''| = \text{maximum}$). Tak więc dla pręta (rys. 6.27) tą długością będzie b (gdy $b > a$), a wartość kb pełnić będzie rolę poprzedniego parametru kl . Posługując się kryterium $kb < 0,5$ możemy od razu ocenić stan pracy konstrukcji i orzec do jakiego stopnia wystąpi wpływ swobodnego skręcenia. Analogiczne rozważania możemy przeprowadzić i dla przypadków pokazanych na rys. 6.28.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że parametrem decydującym o zachowaniu się skręcanej konstrukcji o przekroju otwartym jest nie sama wielkość k zależna tylko od geometrii przekroju, lecz



Rys. 6.31. Usztywnienia profilu otwartego
Warianty 1 i 2 — usztywnienia rurowe, 3 i 4 — płaskownikowe, 5 — nabudowane.

iloczyn kl . Aby więc stan nieswobodnego skręcania był dominujący, należy o ile tylko można skracać długość l . Konstrukcyjne zrealizowanie tego postulatów osiągamy przez wstawienie w krótkich odstępach usztywnień w postaci dodatkowych elementów 1 (rys. 6.31), które wspólnie z zasadniczym profilem przekształcają tę część w zamknięty blok usuwający swobodę spaczenia w tym miejscu. W rezultacie

zamiast pierwotnego pręta o długości L otrzymujemy szereg prętów o długości l , których stan obciążenia jest identyczny z rozpatrzonym na rys. 6.28c (gdy $a = c = 0$). Inne warianty usztywnień podane są pod pozycjami 2 ÷ 5 na tymże rysunku 6.31.

Na zakończenie warto uświadomić sobie ilościowo skutki jakie pociąga za sobą zrealizowanie nieswobodnego skręcania w porównaniu ze skręcaniem swobodnym. Przypuśćmy, że rozważany pręt jest stalową ceówką ($E = 2,6G = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$) o wymiarach $l = 1 \text{ m}$, $h = 2b = 300 \text{ mm}$, $\delta = \text{const} = 3 \text{ mm}$ obciążoną na końcach momentami $M_s = 100 \text{ kGm}$. Jeśli zamknięcie przekrojów końcowych stanowić będą cienkie żebra, to będziemy mieli przypadek skręcania swobodnego (art. 6.3), a obliczone z wzorów (6.9) na naprężenia $\tau_{\max}$ i całkowity kąt skręcenia $\Phi = \phi l$ wyniosą

$$\tau_{\max} \approx 5600 \text{ kG/cm}^2, \quad \Phi = 2,4 \text{ rad} = 138^\circ,$$

a więc wartości całkowicie nie do przyjęcia. Jeśli teraz zamknijemy obydwa końce sztywnymi blokami (rys. 6.31), to realizujemy w ten sposób przypadek (rys. 6.28c), gdy $a = c = 0$. Obliczając z tabl. 6.4 C_s znajdujemy wartość jej $1,33 \cdot 10^{11} \text{ kGcm}^2$, a z rysunku 6.28c $\Phi'_{\text{ekstr}} = 3,75 \cdot 10^{-6} \text{ rad/cm}^2$. Wykorzystując następnie wzór (6.27) przy uwzględnieniu, że $(F_0)_{\max} = 70,3 \text{ cm}^2$ mamy w przekrojach końcowych

$$\sigma_{\max} = 2E(\Phi')_{\text{ekstr}}(F_0)_{\max} = 1050 \text{ kG/cm}^2,$$

a kąt skręcenia

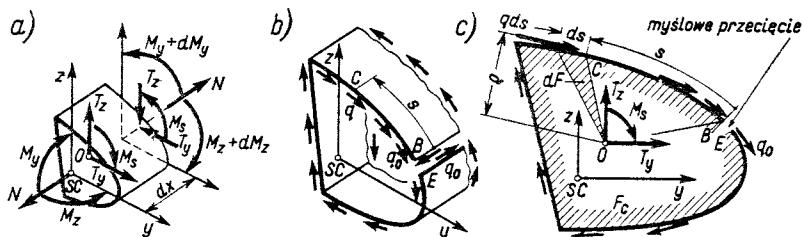
$$\Phi = M_s l^3 / 12 C_s = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,357^\circ,$$

a więc wartości całkowicie dopuszczalne. Jak widzimy przez wprowadzenie nieswobodnego skręcania następuje przeszło 9-krotna redukcja naprężeń (w przeliczeniu na σ_{red}) i ~ 400 -krotne zwiększenie sztywności i to jest głównym powodem, dla którego takie rozwiązania konstrukcyjne stosujemy, o ile oczywiście ze względów innych nie możemy zastosować przekrojów rurowych (art. 6.2 i 6.4). Z drugiej strony, gdy zamiarem konstruktora jest maksymalna wiotkość konstrukcji na skręcanie, to jego obowiązkiem jest usunięcie tych wszystkich utwierdzeń, które by mogły powodować pojawienie się skręcania nieswobodnego. Tak na przykład w konstrukcji (rys. 6.9) postulat ten będzie spełniony, jeśli żebra A i B będą dostatecznie wiotkie w kierunku prostym do ich płaszczyzn, co nie wyklucza możliwości przeniesienia momentu skręcającego przyłożonego w pośrednim przekroju płaszcza (rys. 6.27).

6.10. Przeniesienie obciążeń poprzecznych przez rury jednoobwodowe

Określenie stanu napięć w przypadku ogólnego obciążenia pręta o przekroju jednoobwodowym (rys. 6.32a) dzieli się wyraźnie na dwa zagadnienia, z których pierwsze dotyczy przeniesienia momentów gnących i siły wzdłużnej. Zagadnienie to zostało już omówione w art. 6.5, w wyniku czego naprężenia normalne σ określone są wzorami (6.14) ÷ (6.17), a odkształcenia wzorami (6.18) ÷ (6.20). Pozostaje zatem do rozwiązania tylko zagadnienie drugie, to jest określenie wydatków stycznych q wynikających z działania momentu M_s i sił tnących T_y, T_z zredukowanych do dowolnego punktu O . Te ostatnie wyrażają się nadal wzorami (6.21) wynikającymi z równowagi elementarnego odcinka pręta.

Rozwiązanie postawionego zadania jest właściwie tylko nieznaczną modyfikacją rozważań art. 6.6. Prowadząc mianowicie przecięcie wzdłużne między obranymi dowolnie i nieskończenie bliskimi punktami B i E konturu (rys. 6.32b), zamieniamy konstrukcję na profil otwarty (rys. 6.15) z tym tylko, że na stworzonych myślowo krawędziach B, E działa nieznaną na razie wydatek q_0 . Jeśli zatem wrócimy do art. 6.6 i prześledzimy etapy rozważań, to dochodzimy do wniosku, że nie ulegną zmianie ani równania równoważności



Rys. 6.32. Napęcia styczne w rurze jednoobwodowej
a) układ obciążeń, podane zwroty $M_y, \dots, T_z$ są dodatnie, b) układ wydatków stycznych q ;
c) oznaczenia.

(a), ani równowagi elementu (b). Różnica pojawi się dopiero w równaniu (c), gdyż tym razem na krawędzi B wydatek $q_B = q_0$. W wyniku zatem otrzymamy zamiast (6.23a) wzór

$$q = q_0 + (T_z^* S_y^{0,s} / J_y) + (T_y^* S_z^{0,s} / J_z), \quad (6.38a)$$

w którym T_z^* i T_y^* określone są wzorem (6.22), $S_y^{0,s}$ i $S_z^{0,s}$ są momentami statycznymi względem osi centralnych y i z części przekroju między obranym za początek punktem B i bieżącym C , a J_y i J_z — momenty bezwładności. Jeśli obrane osie y i z są głównymi, to $T_y^* = T_y$, $T_z^* = T_z$ i wtedy

$$q = q_0 + (T_z S_y^{0,s} / J_y) + (T_y S_z^{0,s} / J_z). \quad (6.38b)$$

Otrzymany rozkład (6.38) wydatków q spełnia tożsamościowo dwa warunki równoważności rzutów na oś y i z niezależnie* od tego, jaka jest wartość q_0 . Trzeci warunek przedstawiający równoważność momentów napiszemy względem środka redukcji O (rys. 6.32c)

$$\oint q \rho \, ds = q_0 \oint \rho \, ds + (T_z^* / J_y) \oint S_y^{0,s} \rho \, ds + (T_y^* / J_z) \oint S_z^{0,s} \rho \, ds = M_s,$$

a zauważając, że $\oint \rho \, ds = 2F_c$ — całkowite pole ograniczone konturem przekroju, otrzymujemy nieznaną dotychczas wartość

$$q_0 = (M_s / 2F_c) - (T_z^* / 2F_c J_y) \oint S_y^{0,s} \rho \, ds - (T_y^* / 2F_c J_z) \oint S_z^{0,s} \rho \, ds, \quad (6.39a)$$

gdzie jeszcze raz przypominamy, iż M_s jest momentem obciążeń względem obranego

* Porównaj art. 6.6. W równaniu (e) przybywa składnik $\oint q_0 \, ds \sin \alpha = -q_0 \oint dz \equiv 0$ nie zmieniający toku dowodu.

punktu O . Powyższy wzór można uprościć, jeśli wziąć pod uwagę, że zgodnie ze wzorem 6.25 i rys. 6.16a

$$-\left(\oint S_y^{0,s} \varrho \, ds\right) / J_y = e_y^* / \cos \alpha_z, \quad \left(\oint S_z^{0,s} \varrho \, ds\right) / J_z = e_z^* / \cos \alpha_y, \quad (a)$$

są wielkościami związanymi z położeniem SP względem układu osi OO' i OO'' , tak jak gdyby rozpatrywany przekrój był rzeczywiście otwarty w miejscu BE . Kąty α_y i α_z określa się przy tym z zależności $\operatorname{tg} \alpha_y = J_{yz}/J_z$, $\operatorname{tg} \alpha_z = J_{yz}/J_y$. W wyniku otrzymujemy

$$q_0 = [M_s + (T_y^* e_y^* / \cos \alpha_z) - (T_y^* e_z^* / \cos \alpha_y)] / 2F_c. \quad (6.39b)$$

W przypadku, gdy osie y i z są osiami centralnymi głównymi, wzór (6.39b) brzmi

$$q_0 = (M_s + T_z e_y - T_y e_z) / 2F_c. \quad (6.39c)$$

Mając wartość q_0 obliczamy całkowity wydatek q ze wzoru (6.38). Wszystkie uwagi odnośnie techniki obliczeń opisane w art. 6.6 stosują się tutaj bez żadnych zmian. Dotyczy to na przykład umowy co do kierunku obiegu, znaku q , obliczenia $S_y^{0,s}$, $S_z^{0,s}$, znaku ϱ , obliczenia e_y^* i e_z^* (lub e_y , e_z), postaci tablic itp. Podobnie jak w art. 6.6 (patrz wzór k) tak i tutaj przy braku wprawy obliczeniowej zaleca się określenie q_0 nie przez mechaniczne stosowanie wzorów (6.39), lecz przez wykorzystanie tej myśli przewodniej, która do tych wzorów doprowadziła. Obliczając mianowicie według wszystkich reguł art. 6.6 pomocniczy wydatek q'

$$q' = (T_z^* S_y^{0,s} / J_y) + (T_y^* S_z^{0,s} / J_z) \quad (6.40)$$

tak, jak gdyby przekrój był rzeczywiście otwarty w obranym miejscu BE , nanosimy zwroty tego wydatku na rysunku przekroju. Dzieląc następnie obwód na szereg odcinków, ustalamy średnie wartości q'_i na każdym z nich, a następnie obliczamy ich moment M_q jako sumę

$$M_q \approx 2 \sum q'_i F_i \quad (b)$$

wszystkich odcinków (rys. 6.19b). Mając M_q wyznaczamy q_0 ze wzoru

$$q_0 = (M_s - M_q) / 2F_c, \quad (6.41a)$$

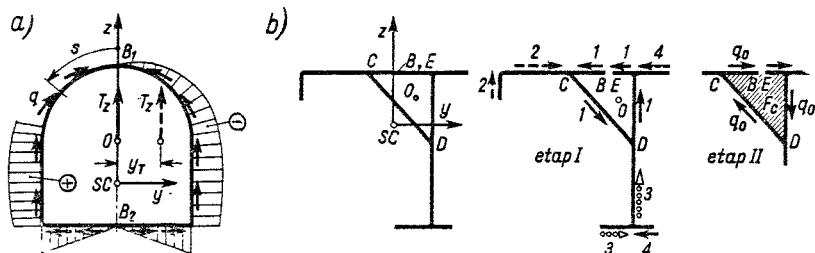
a następnie q jako

$$q = q' + q_0. \quad (6.41b)$$

Wartość wydatków q nie zależy od obioru miejsca BE , w którym dokonujemy myślowego przecięcia wzdłużnego, wpływa natomiast na pośrednie etapy obliczeń. Jeśli mianowicie oberzemy początek raz w punkcie B_1 , a raz w B_2 , to dla jednego i tego samego punktu C (rys. 6.32c) otrzymamy różne wartości momentów $S_y^{0,s}$ i $S_z^{0,s}$, a w następstwie różne wartości q_0 odpowiadające różnym punktom B_1 i B_2 . Końcowy jednak wynik, to jest rozkład q po obwodzie, będzie taki sam. Z uwagi na dokładność rachunków pożądane jest, aby w wyniku stosownego obioru miejsca BE wartość q_0 była możliwie mała. Osiągamy to lokując miejsce BE możliwie daleko od przewidywanej warstwy obojętnej, przy czym możemy oddzielnie obliczać q odpowiadające działaniu siły T_y , a oddzielnie działaniu siły T_z .

W symetrycznych przekrojach symetrycznie obciążonych (rys. 6.33a), wydatek q w punktach B_1 i B_2 jest równy zero. Przyjmując zatem B_1 jako początek ($s = 0$), wyznaczamy q ze wzoru (6.38b), w którym q_0 i T_y są równe zero, bez potrzeby określenia q_0 ze wzoru (6.39c). Powyższe rozważania można uogólnić na przypadek, gdy siła T_z jest równoległa do osi symetrii. Stosując bowiem zasadę superpozycji możemy oddzielnie obliczyć q od siły T_z przeniesionej na oś symetrii, oddzielnie zaś od $M_s = -T_z y_T$ (art. 6.2).

W przekrojach z odgałęzieniami (rys. 6.33b), po wprowadzeniu myślowego przecięcia wzdłużnego w miejscu BE , obliczamy wydatki q' według wskazówek art. 6.6 (rys. 6.16c),



Rys. 6.33. Układ wydatków stycznych

a) profil symetryczny z zaznaczonym rozkładem wydatków wywołanych przez T_z ; b) etapy rozwiązania profilu z odgałęzieniami, etap I określenie q' według podanych obiegów, etap II obszar działania q_0 .

oraz ich moment M_q względem obranego punktu O . Wydatek q_0 działa tylko w ściankach należących do rury $BCDE$, a jego wartość wyraża się wzorem (6.41a), w którym F_c jest polem ograniczonym konturem rury $BCDE$. Superpozycja według wzoru (6.41b) dotyczy tylko ścianek samej rury.

Charakter rozkładu wydatków stycznych zależy od rodzaju obciążenia. Jeśli $T_y = T_z = 0$, a $M_s \neq 0$, to ze wzorów (6.38) i (6.39) mamy $q = q_0 = \text{const} = M_s / 2F_c$ (wzór Bredta). Jeśli tylko siła $T_z \neq 0$ i działa ona w pobliżu środka ciężkości, to przebieg wydatków wykazuje zmianę zwrotu (rys. 6.33a) tak, że na części jest on przeciwny do kierunku obiegu ($q > 0$), na części zaś zgodny ($q < 0$) z obiegiem. Mając obliczone wydatki wyznaczamy naprężenia styczne $\tau(s) = q/\delta$, a następnie naprężenia zredukowane ze wzoru

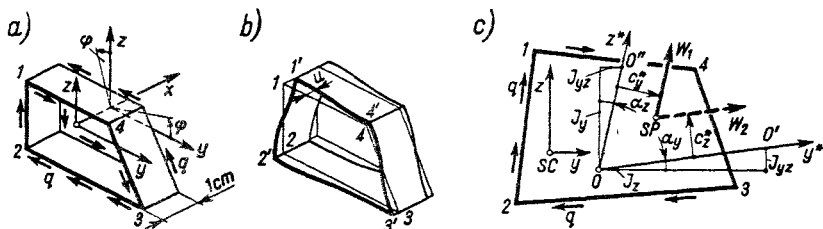
$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (c)$$

gdzie σ wyznaczone jest ze wzorów (6.14)÷(6.17).

Przypominając, iż odkształcenia pręta wywołane naprężeniami σ były już omówione (wzory 6.18÷6.20), zbadajmy obecnie odkształcenia wywołane istnieniem wydatków q . Odkształcenia te są dwójakiego rodzaju, a mianowicie polegają one na skręceniu przekrojów pręta względem siebie oraz na spaczeniu przekroju poprzecznego (rys. 6.34). Określenie pierwszego z tych odkształceń sprowadza się do wyznaczenia kąta skręcenia φ rad/cm rury, w której wydatek $q \neq \text{const}$. Jest to powtórzenie zagadnienia z art. 6.4, którego rozwiązanie (wzór 6.12) tj.

$$\varphi = \frac{1}{2GF_c} \oint (q ds/\delta) \quad (d)$$

daje poszukiwaną wielkość, przy czym dodatnia wartość tego kąta oznacza, iż obrót przekrojów odbywa się tak, jak to podaje rys. 6.34a. Co się tyczy drugiego odkształcenia (rys. 6.34b), to jest ono pomijalne dla prętów wydłużonych ($l > 8h$) i tylko w bardzo krótkich prętach zbliżających się swym wyglądem do brył ($l \approx h$) jest porównywalne z innymi odkształceniami (np. ugięciami). Z tego powodu odkształcenia te pomijamy w normalnych obliczeniach, uwzględniając je tylko w analizie zjawisk lokalnych, jak raptowne zmiany przekroju, utwierdzenia (rozdz. 8). Jako wskazówkę można przy tym



Rys. 6.34. Odkształcenia rury jednoobwodowej wywołane wydatekami q
a) skręcenie, b) spaczenie przekroju, c) oznaczenia przy obliczeniu położenia SP.

podać, iż ten lokalny wpływ rozciąga się na odcinek pręta o długości równej maksymalnemu gabarytowemu wymiarowi h przekroju poprzecznego. W porównaniu zatem do prętów o przekroju otwartym, w których wpływ nieswobodnego spaczenia rozciąga się z reguły na całą długość pręta, w prętach rurowych ma on charakter wtórnych zakłóceń,

Jak widać z wszystkich przeprowadzonych rozważań, określenie stanu napięć σ , τ oraz odkształceń w prętach rurowych nie wymaga stosowania pojęcia środka SP sił poprzecznych tak niezbędnego w analizie prętów o przekroju otwartym. Tylko w zagadnieniach dynamiki (drgań) jest ono pożyteczne. Jego definicja jako punktu przekroju, w którym przyłożona siła poprzeczna nie wywołuje względnego obrotu (tj. $\varphi = 0$) przekrojów pręta, pozwala od razu na określenie jego położenia. Załóżmy mianowicie, iż w SP przyłożona jest siła W_1 o składowych $T_z = W_1 \cos \alpha_z$, $T_y = T_z \tan \alpha_z = T_z J_{yz}/J_y$ (rys. 6.34c). Przy takim obciążeniu pomocnicze wartości $T_z^* = T_z = W_1 \cos \alpha_z$, $T_y^* = 0$, a wydatek q określony ze wzoru (6.38a), przy uwzględnieniu (6.39a) i podstawieniu $M_s = -W_1 C_y^*$ jest

$$q = -\frac{W_1 c_y^*}{2F_c} - \frac{W_1 \cos \alpha_z}{2F_c J_y} \oint S_y^{0,s} q \, ds + \frac{W_1 S_y^{0,s} \cos \alpha_z}{J_y}. \quad (e)$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (d), przy założeniu, że $\varphi = 0$, wyznaczamy odległość c_y^* środka SP od osi OO'' przeprowadzonej przez obrany punkt O . Wprowadzając oznaczenia

$$dp = ds/\delta, \quad dF = q \, ds, \quad p = \oint ds/s$$

otrzymujemy poszukiwaną odległość c_y^* jako

$$c_y^* = \frac{2F_c \cos \alpha_z}{J_y} \oint S_y^{0,s} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dF}{F_c} \right). \quad (6.42a)$$

Analogicznie obliczamy odległość c_z^* od osi OO' jako równą

$$c_z^* = -\frac{2F_c \cos \alpha_y}{J_z} \oint S_z^{0,s} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dF}{F_c} \right). \quad (6.42b)$$

Jeśli osie y i z są centralne główne, to $\alpha_y = \alpha_z = 0$ i odległości $c_y = c_y^*$, $c_z = c_z^*$ są współrzednymi SP w układzie równoległych do y i z osi przechodzących przez punkt O , a ich wartości

$$c_y = \frac{2F_c}{J_y} \oint S_y^{0,s} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dF}{F_c} \right), \quad c_z = -\frac{2F_c}{J_z} \oint S_z^{0,s} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dF}{F_c} \right), \quad (6.43)$$

o ile są dodatnie, należy odmierzyć od punktu O zgodnie z dodatnim zwrotem osi y i z . W praktyce obliczenia odległości c_y^* , c_z^* (lub c_y , c_z) przeprowadzamy zazwyczaj tabelarycznie. Dzieląc mianowicie obwód na szereg odcinków s_i , ustalamy dla każdego z nich średnie wartości $S_y^{0,s}$, $S_z^{0,s}$ średnie grubości δ_i oraz z rysunku przekroju odpowiednie F_i , a następnie obliczamy sumy

$$\sum (S_y^{0,s}) \left(\frac{s_i}{p\delta_i} - \frac{F_i}{F_c} \right), \quad \sum (S_z^{0,s}) \left(\frac{s_i}{p\delta_i} - \frac{F_i}{F_c} \right) \quad (f)$$

zastępujące w przybliżeniu całki ze wzorów (6.42) lub (6.43).

$$q_1 = (T_z/2h_{sr})[1 - (y_T/b) + (A_1 h_1 h_2/2J) + (A h_1 h_2/6J) + (A h_2^2/12J)],$$

$$q_2 = -(T_z/2h_{sr})[(y_T/b) + (A_2 h_1 h_2/2J) + (A h_1 h_2/6J) + (A h_1^2/12J)],$$

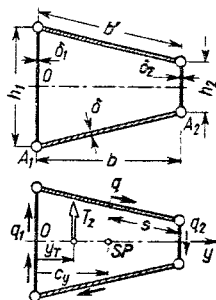
$$q = q_2 + (T_z/4J)[2A_2 h_2 + 2A h_2 \xi + A(h_1 - h_2)\xi^2],$$

$$c_y = (b/p)[p_1 + (A_1 p_1 - A_2 p_2)(h_1 h_2/2J) + (A h_2^2 p'/J) + \\ + (A h_1 h_2/6J)(p_1 - p_2 + p') + (A/12J)(p_1 h_2^2 - p_2 h_1^2 + 4p' h_2^2)],$$

gdzie

$$A = b'\delta, \quad 6J = 3(A_1 h_1^2 + A_2 h_2^2) + A(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2), \quad \xi = s'/b,$$

$$p_1 = h_1/\delta_1, \quad p_2 = h_2/\delta_2, \quad p' = b'/\delta, \quad p = p_1 + p_2 + 2p', \quad h_{sr} = (h_1 - h_2)/2.$$



Rys. 6.35. Wyniki rozwiązania skrzynkowego przekroju

Ścianki h_1 i h_2 nie przenoszą naprężeń σ i dlatego $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, lecz $q = f(s)$, jeśli pokrycia nie przenoszą naprężeń σ , to $A = 0$. Zwroty q podane na rysunku odpowiadają dodatnim wartościom.

W przekrojach złożonych (np. z odgałęzieniami) zaleca się jedynie wykorzystanie tej myśli przewodniej, która doprowadziła do wzorów (6.42) lub (6.43). Zakładając mianowicie obciążenie siłą T_z (np. 1 kg, 1 t) wyznaczamy dla wszystkich odcinków liczbowe wartości q' (wzór 6.40) oraz ich moment M_q względem obranego punktu O . Ponadto wyznaczamy kąt φ_1 wywołany przez te wydatki q' , to jest

$$\varphi_1 = (1/2GF_c) \oint (q' ds/\delta), \quad (g)$$

przy czym w przekrojach złożonych całkowanie nie dotyczy odgałęzień*. Wydatek q_0 dobieramy, tak aby odpowiadający mu kąt φ_z skręcenia był równy $-\varphi_1$, to jest

$$q_0 \oint (ds/\delta) = - \oint (q' ds/\delta), \quad (h)$$

a następnie z warunku równoważności momentów

$$-T_z c_y = M_q - 2q_0 F_c \quad (i)$$

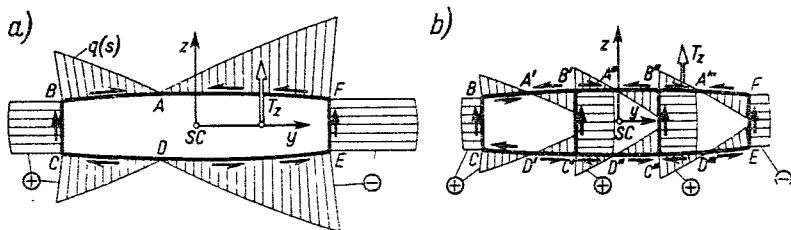
wyznaczamy szukaną odległość c_y . Analogicznie obliczamy odległość c_z .

* Tak na przykład w profilu (rys. 6.33b) całkowanie obejmuje tylko elementy rury BCDE.

W przekroju symetrycznym środek SP leży na osi symetrii. W przypadku profilu z dwiema lub więcej osiami symetrii $SP \equiv SC$. W dowolnym wypukłym profilu środek SP leży na ogół wewnątrz profilu. Dla często stosowanego przekroju skrzynkowego wynik obliczeń podaje rys. 6.35.

6.11. Przeniesienie obciążeń poprzecznych w rurach wieloobwodowych

Jeśli przekrój jednoobwodowej rury ma kształt spłaszczony (rys. 6.36a), to rozkład q odpowiadający działaniu siły T_z jest nieracjonalny, albowiem w narożach B, C, E, F występują jednocześnie duże naprężenia σ (od M_y) i duże τ (od T_z). Dla usunięcia tego niepożądanego zjawiska* stosujemy przekrój wieloobwodowy (rys. 6.36b), w którym siłę T_z przenosi więcej ścianek, a nie tylko dwie jak poprzednio, dzięki czemu następuje znaczna redukcja wartości wydatków q . Podobny wynik daje interpretacja pracy profilu,



Rys. 6.36. Rozkład wydatków q w rurze jedno- i wieloobwodowej

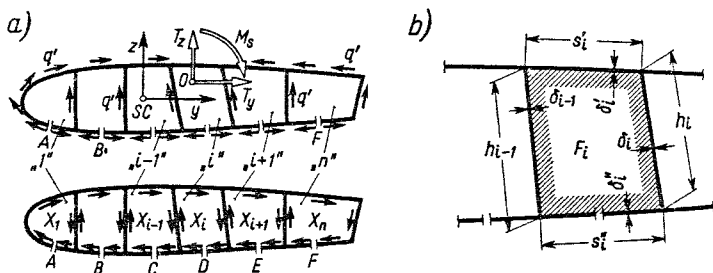
a) przekrój jednoobwodowy; b) przekrój wieloobwodowy o tym samym obrysie co przekrój z rys. a i tym samym obciążeniu.

jako zespołu równolegle pracujących prętów o przekroju otwartym. Zauważmy mianowicie, że przekrój jednoobwodowy stanowi jak gdyby zespół dwóch ceówek $ABCD$ i $DEFA$ o bardzo długich pólkach $AB, \dots, FA$. Wprowadzenie dodatkowych ścianek $B'C'$ i $B''C''$ równoznaczne jest z podziałem przekroju na cztery równoległe belki, dwie ceówki i dwie dwuteówki o znacznie krótszych pólkach $A'B, A'B', \dots$ itd., co z kolei powoduje znaczne zmniejszenie wydatków q .

Podobnie jak w rurze jednoobwodowej, tak i tu obliczenie naprężeń dzieli się na dwa zagadnienia, z których pierwsze dotyczy przeniesienia momentów gnących oraz siły wzdłużnej i którego rozwiązanie stanowią jak poprzednio wzory (6.14)÷(6.17) określające wartość naprężeń normalnych σ . Zagadnienie drugie, to jest określenie wydatków styczn-

* Dodatkowym ważnym powodem jest chęć zabezpieczenia się przed katastrofalnymi niekiedy skutkami, jakie pociąga za sobą uszkodzenie szwów w rurze jednoobwodowej. Jeśli bowiem w rurze (rys. 6.36a) wzdłużny szew w narożu B pęknie, to rura staje się profilem otwartym, którego sztywność na skręcanie raptownie maleje co najmniej kilkakrotnie. Zjawisko to nie występuje w tak drastycznej formie w rurach wieloobwodowych.

nych q wywołanych przez T_y , T_z i M_s , rozwiązujemy w dwóch etapach. W etapie pierwszym zamieniamy przekrój na otwarty, wprowadzając tyle myślowych przecięć wzdłużnych $A, B, \dots F$, ile obwodów ma przekrój (rys. 6.37). Wydatki styczne q' (wzór 6.40) w takim otwartym przekroju z odgałęzieniami wyznaczamy według wskazówek art. 6.6



Rys. 6.37. Analiza napieć stycznych w rurze wielobowodowej

a) układ wydatków q' po wprowadzeniu myślowych przecięć $A, B, \dots, F$ oraz układ niewiadomych X ; b) oznaczenia dla rury „ i ”.

(rys. 6.16c). W etapie drugim obliczamy niewiadome wydatki $X_1, \dots, X_n$ działające na krawędziach wprowadzonych myślowo przecięć. Korzystamy przy tym z warunku, że jednostkowy kąt φ skręcenia każdej składowej rury musi być taki sam. Postępując jak w art. 6.4 wyznaczamy dla rury i kąt φ ze wzoru (6.12)

$$2GF_i\varphi = \frac{(X_i - X_{i-1})h_{i-1}}{\delta_{i-1}} + X_i \left(\frac{s'_i}{\delta'_i} + \frac{s''_i}{\delta''_i} \right) + \frac{(X_i - X_{i+1})h_i}{\delta_i} + \oint \frac{q' ds}{\delta}, \quad (a)$$

gdzie ostatni składnik przedstawia wielokrotność kąta skręcenia izolowanej rury i , obciążonej wydatkiem q' . Całkowanie (sumowanie) obejmuje tylko elementy rozpatrywanej rury i , przy czym za dodatnie q' uważamy te wydatki, które mają zwrot zgodny z X_i . Wprowadzając oznaczenia

$$p_{i-1,i} = h_{i-1}/\delta_{i-1}, \quad p_{i,i} = p_{i-1,i} + p_{i,i+1} + (s'_i/\delta'_i) + (s''_i/\delta''_i), \quad p_{i,i+1} = h_i/\delta_i,$$

mamy po uporządkowaniu równania (a)

$$-p_{i-1,i}X_{i-1} + p_{i,i}X_i - p_{i,i+1}X_{i+1} + \oint (q' ds/\delta) = 2GF_i\varphi, \quad (6.44)$$

a zatem równanie podobne do (6.13b) z tym tylko, że po lewej stronie pojawia się składnik z q' . Dla pierwszej i ostatniej rury mamy równania dwuczłonowe względem niewiadomych X . Równań (6.44) mamy tyle, ile jest rur, a więc tyle ile jest niewiadomych X . Ponadto niewiadomym jest kąt φ . Brakujące równanie otrzymujemy z warunku równowagi momentów względem obranego środka redukcji O , to jest

$$\sum 2F_iX_i + \int_0 q' \varrho ds = M_s, \quad (6.45)$$

gdzie

$\int_0 q' \varrho ds$ — moment wydatków q' ze wszystkich ścianek względem punktu O ,

M_s — moment obciążenia zewnętrznego względem tegoż punktu O .

Liczbowe rozwiązanie układu (6.44) przeprowadzamy traktując φ jako wartość znaną, w wyniku czego otrzymujemy niewiadome X w postaci

$$X_i = a_i + b_i \varphi, \quad (b)$$

gdzie a_i odpowiada rozwiązaniu układu (6.44) dla $\varphi = 0$, b_i — rozwiązaniu, gdy $q' \equiv 0$ a $\varphi = 1$. Podstawiając te wartości X do wzoru (6.45) otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą φ , po wyznaczeniu której z równań (b) obliczamy niewiadome X , a następnie wypadkowe wydatki q w płaszczyźnie zewnętrznej jako

$$q = q' + X_i, \quad (c)$$

względnie w ściankach wewnętrznych jako

$$q = q' + X_i - X_{i-1}. \quad (d)$$

W celu uniknięcia błędów przy prowadzeniu obliczeń zaleca się korzystanie z rysunku przekroju. Tak więc po obliczeniu q' należy koniecznie nanieść na rysunek przekroju ich rzeczywiste zwroty (rys. 6.37a) i dopiero potem obliczać wyrażenia $\oint (q' ds/\delta)$ konfrontując dla każdej ścianki zgodność ich zwrotów z założonym zwrotem X_i . Podobne postępowanie stosujemy przy wyznaczaniu momentu q' względem punktu O , ustalając dla każdej ścianki, czy działający w niej wydatek q' daje moment dodatni czy ujemny.

Podobnie jak i w przekrojach jednoobwodowych, tak i tutaj znajomość położenia SP środka sił poprzecznych jest całkowicie zbędna zarówno przy obliczaniu naprężeń, jak i odkształceń (φ).

W nielicznych zagadnieniach, gdy znajomość SP jest konieczna, położenie jego wyznaczamy z tych samych równań (6.44) i (6.45). Zakładając mianowicie, że obciążenie $T_z = 1$ kG ($M_s = -1 \cdot c_y$, $T_y = 0$) przyłożone jest w SP ($\varphi = 0$), wyznaczamy dla tego obciążenia q'_z , a następnie rozwiązujemy układ (6.44), w którym $\varphi = 0$. Wyznaczone stąd wydatki X' wstawiamy do wzoru (6.45), w rezultacie czego mamy znaną wartość całej lewej strony tego równania. Prawa strona równania (6.45) jest równa $M_s = -1c_y$, gdzie c_y — odległość SP od punktu O w kierunku równoległym do osi y . W wyniku więc

$$c_y = - \sum 2F_i X'_i - \int_0 q'_z ds. \quad (6.46a)$$

Zakładając z kolei obciążenie $T_y = 1$ kG ($T_z = 0$, $M_s = 1 \cdot c_z$), otrzymujemy podobnie

$$c_z = \sum 2F_i X'_i + \int_0 q'_y ds, \quad (6.46b)$$

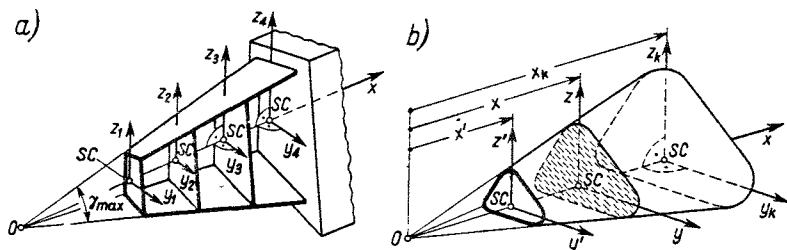
gdzie

q'_y — wydatek styczny dla przekroju z myślowymi przecięciami odpowiadający sile $T_y = 1$ kG, X'_i — wydatki otrzymane ze wzoru (6.44) dla $q' = q'_y$, $\varphi = 0$.

Środek SP w przekrojach wieloobwodowych leży z reguły wewnątrz profilu, zwłaszcza gdy płaszczyzna zewnętrzna jest wypukła. W przypadku, gdy przekrój ma oś symetrii, SP leży na tej osi, a gdy tych osi jest dwie lub więcej to $SP = SC$.

6.12. Wpływ zbieżności płaszcza

Poza rozpatrywanymi dotychczas (art. 6.1÷6.11) prętami przyzmatycznymi spotykamy w praktyce przypadki, gdy płaszczyzna pręta jest powierzchnią ściętego ostrosłupa lub stożka o konturze otwartym lub zamkniętym (rurowym) (rys. 6.38a,b). Zbieżność tworzących jest przy tym z reguły mała ($\gamma_{\max} < 6^\circ$), na skutek czego różnice w stanie napięć między konstrukcją przyzmatyczną a zbieżną mają charakter poprawek nie zaś zmian natury



Rys. 6.38. Przykłady prętów zbieżnych i ich układów odniesienia

a) pręt zbieżny o przekroju otwartym; b) rura zbieżna jednoobwodowa SC — środki ciężkości odpowiednich równoległych do siebie przekrojów.

zasadniczej. Ten potwierdzony doświadczalnie fakt upoważnia nas do przeanalizowania wpływu zbieżności w sposób uproszczony. Punktem wyjścia tej uproszczonej analizy jest umowne określenie poprzecznego przekroju zbieżnego pręta w ten sposób, iż przekrój taki jest zawsze prostopadły do osi x łączącej środki ciężkości poszczególnych przekrojów i przechodzącej przez wierzchołek O (rys. 6.38). Z warunku, iż tak określona oś x jest prosta wynika, że grubości poszczególnych ścianek płaszcza są stałe, bądź wszystkie zmieniają się w tym samym stosunku. Przy takim ograniczeniu parametry określające własności przekroju, tj. A , J_y , J_{yz} , J_z zmieniają się wzdłuż osi x w pewien szczególny sposób, i mianowicie w przypadku płaszcza o stałej grubości poszczególnych ścianek:

$$A = \xi A', \quad J_y = \xi^3 J'_y, \quad J_{yz} = \xi^3 J'_{yz}, \quad J_z = \xi^3 J'_z, \quad (a)$$

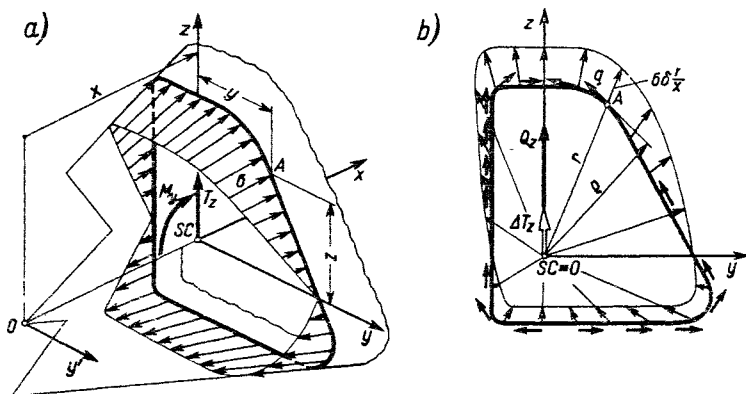
gdzie A' , J'_y , J'_{yz} , J'_z — odpowiednie wartości w pewnym obranym przekroju o współrzędnej x' , a współczynnik $\xi = x/x'$. Analogicznie w przypadku, gdy grubości ścianek w przekroju x są k_δ razy większe niż w obranym przekroju x' , to

$$A = k_\delta \xi A', \quad J_y = k_\delta \xi^3 J'_y, \quad J_{yz} = k_\delta \xi^3 J'_{yz}, \quad J_z = k_\delta \xi^3 J'_z. \quad (b)$$

Wreszcie w przypadku pręta ze skupionymi pasami (rys. 6.13b) prostoliniowość jego osi narzuca, iż przekroje pasów muszą zmieniać się w stosunku $k_\delta \xi$ i wtedy odpowiednie parametry określone są wzorami (b).

Opisane powyżej uproszczenie dotyczyło geometrii pręta. Podstawowe uproszczenie statyczne polega na założeniu, że w lekkozbieżnej konstrukcji rozkład naprężeń normalnych (rys. 6.39a) odpowiadających działaniu momentów gnących i siły wzdłużnej jest w danym przekroju poprzecznym nadal określony wzorami (6.14)÷(6.17), z tym tylko, iż kierunek działania normalnego naprężenia w danym punkcie obwodu płaszcza pokrywa się z kierunkiem tworzącej przechodzącej przez ten punkt, a wartości J_y , J_{yz} , J_z , A odpowiadają rozpatrywane-

mu przekrojowi. Jedyna zatem zmiana, w porównaniu z prętem pryzmatycznym o identycznym poprzecznym przekroju co i pręt zbieżny, przejawia się w zmianie kierunku naprężeń σ w ten sposób, iż przestają być one równoległe do osi x pręta i wszystkie przechodzą przez wierzchołek O . Ta zmiana kierunku σ pociąga za sobą pewną poważniejszą zmianę w rozkładzie wydatków stycznych q . Biorąc na początek przypadek, gdy obciążenie



Rys. 6.39. Układ naprężeń w pręcie zbieżnym

a) układ naprężeń normalnych, dla prostoty narysowany dla przypadku gdy $J_{yz} = 0$, $M_x = 0$, $N = 0$; b) układ sił wewnętrznych w płaszczyźnie przekroju. $\sigma \delta r/x$ — składowa naprężeń normalnych z rys. a, gdzie O — wierzchołek stożka.

zenie danego przekroju stanowi tylko M_y i T_z (rys. 6.39a), napiszmy względem osi y' równanie równowagi momentów tych obciążeń z momentem naprężeń σ i wydatków q (nie narysowanych na rys. 6.39a). Równanie to brzmi

$$T_z x - M_y = Q_z x, \quad (c)$$

gdzie Q_z — wypadkowa siła z wydatków stycznych q (rys. 6.39b). W wyniku otrzymujemy, iż ta wypadkowa

$$Q_z = T_z - (M_y/x) \quad (6.47a)$$

jest mniejsza niż byłaby ona w pręcie pryzmatycznym. Fakt ten stanie się jasny, jeśli narysować układ sił wewnętrznych w płaszczyźnie przekroju (rys. 6.39b). Jak widać, na ten układ składają się nie tylko wydatki q , lecz i składowe naprężenia normalne o natężeniu $\sigma \delta r/x$ kG/cm. Te ostatnie dają, jak łatwo udowodnić*, wypadkową $\Delta T_z = M_y/x$, tak iż wypadkowa samych wydatków q jest tylko $Q_z = T_z - \Delta T_z$, co odpowiada wartości według wzoru (6.47a). W przypadku ogólnym (rys. 6.40a) następuje zmniejszenie nie

* A oto dowód. Składowa obciążenia $\sigma \delta r/x$ na oś z jest $\sigma \delta z/x$, a suma wszystkich takich składowych wynosi $\oint (\sigma \delta z/ds/x)$. Po podstawieniu σ ze wzoru (6.14) i po elementarnych przekształceniach mamy

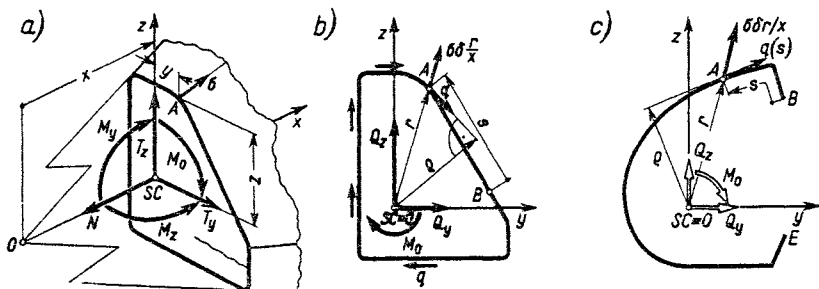
$$\Delta T_z = \oint (\sigma z \delta ds/x) = (M_y^*/x) + (M_x^* J_{yz}/x J_z),$$

a po uwzględnieniu (6.15) i (6.16), w których podstawiamy $M_y \neq 0$, $M_x = 0$, otrzymujemy $\Delta T_z = M_y/x$. Analogicznie udowadniamy, że druga składowa na oś y jest równa zero, tzn. $\oint \sigma \delta y ds/x = 0$.

tylko wypadkowej Q_z , wydatków q w kierunku osi z , lecz i ich wypadkowej w kierunku osi y , tj. Q_y , która ma wartość

$$Q_y = T_y - (M_z/x). \quad (6.47b)$$

W rezultacie zatem tych rozważań dochodzimy do wniosku, że działający w płaszczyźnie przekroju układ wydatków (rys. 6.40b) ma być równoważny tylko części sił tnących T_y i T_z , tj. siłom Q_y i Q_z oraz momentowi M_0 względem osi pręta przechodzącej zgodnie z umową przez SC rozpatrywanego przekroju. Jest to najbardziej istotna zmiana spowodowana



Rys. 6.40. Oznaczenia w ogólnym przypadku obciążenia pręta zbieżnego

a) układ wypadkowych obciążeń; b) układ napięć w płaszczyźnie przekroju; c) przypadek pręta otwartego.

zbieżnością pręta. Jej wartość wyrażająca się w procentowym zmniejszeniu sił T_y i T_z zależy oczywiście od sposobu obciążenia pręta. Jak wynika z szeregu przeliczeń może ona dochodzić do 20÷30% pierwotnych wartości sił tnących.

Przechodząc do określenia samych wydatków q rozróżniamy różne metody postępowania w zależności od kształtu przekroju. Jeśli mianowicie przekrój pręta zbieżnego jest jedno- lub wieloobwodową rurą, to wydatki q obliczamy jak dla konstrukcji pryzmatycznej, wstawiając jedynie w odpowiednich wzorach siły Q_y i Q_z , zamiast rzeczywistych sił T_y , T_z . Tak na przykład w rurze jednoobwodowej rys. 6.40b zamiast wzorów (6.38) mamy w przypadku ogólnym ($J_{yz} \neq 0$)

$$q = q_0 + (Q_z^* S_y^{0,s}/J_y) + (Q_y^* S_z^{0,s}/J_z), \quad (6.48a)$$

baż w przypadku szczególnym, gdy $J_{yz} = 0$

$$q = q_0 + (Q_z S_y^{0,s}/J_y) + (Q_y S_z^{0,s}/J_z), \quad (6.48b)$$

przy czym pomocnicze wartości Q_y^* i Q_z^* są

$$Q_z^* = \kappa [Q_z - (Q_y J_{yz}/J_z)], \quad Q_y^* = \kappa [Q_y - (Q_z J_{yz}/J_y)], \quad (6.49)$$

gdzie κ określone jest wzorem (6.16), a Q_y i Q_z wzorami 6.47. Wartości wydatku q_0 działającego w obranym za początek punkcie B (rys. 6.40b) wyznaczamy z równania równowagi momentu obciążeń zewnętrznych tj. Q_y , Q_z i M_0 z momentem od wydatków q . Jako środek redukcji obieramy przy tym z reguły SC przekroju tak, iż moment obciążeń zewnętrznych jest po prostu M_0 . Moment wydatków q przedstawiamy w postaci sumy $2F_c q_0$ i momentu M_q wydatków $q' = (Q_z^* S_y^{0,s}/J_y) + (Q_y^* S_z^{0,s}/J_z)$, to jest

$$M_q = \oint q' \rho ds = (Q_z^*/J_y) \oint S_y^{0,s} \rho ds + (Q_y^*/J_z) \oint S_z^{0,s} \rho ds, \quad (6.50)$$

skąd wydatek q_0 otrzymujemy w postaci

$$q_0 = (M_0 - M_q)/2F_c. \quad (6.51)$$

Wszystkie dalsze uwagi odnoszące się do obliczeń są identyczne jak w art. 6.10 i 6.11 i nie ma potrzeby ich powtarzać. Jednostkowy kąt skręcenia nadal obliczamy ze wzoru (6.12) wstawiając oczywiście wymiary odnoszące się do rozpatrywanego przekroju. W przypadku pręta zbieżnego o przekroju otwartym (rys. 6.40c), wydatki q obliczamy jak dla pręta przyzmatycznego (wzory 6.23), wstawiając jedynie siły Q_y i Q_z (lub Q_y^* , Q_z^*) zamiast T_y i T_z (względnie T_y^* , T_z^*). Otrzymany w ten sposób układ napięć q nie jest jednak wynikiem ostatecznym, gdyż nie spełnia on na ogół równania równoważności momentów. Jeśli jak poprzednio umówimy się, iż środkiem redukcji obciążeń jest SC danego przekroju i że względem tego punktu formułujemy równanie równoważności, to różnica

$$M_s = M_0 - \int_{sc} q \varrho \, ds \quad (d)$$

przedstawia sobą tę niezrównoważoną przez napięcia część momentu M_0 , która musi być przeniesiona przez skręcanie zbieżnego pręta otwartego i która wywołuje w nim dodatkowy układ napięć q_s . Wartość tego dodatkowego układu zależy od tego, czy istnieje, względnie czy nie istnieje swoboda spaczenia przekrojów poprzecznych. Wyłączając pierwszą wersję, jako całkowicie nieprzydatną z punktu widzenia techniki (patrz art. 6.3), zajmijmy się tylko analizą nieswobodnego skręcania (patrz art. 6.7), przy czym ograniczymy się do przypadku, gdy grubość ścianki δ nie zależy od x . Dla takich prętów można z techniczną dokładnością przyjąć, że zasadnicza zależność (6.30), to jest

$$M_s = -C_s \Phi''', \quad (e)$$

zostaje nadal słuszna, z tym tylko, że sztywność nieswobodnego skręcania C_s odpowiada rozpatrywanemu przekrojowi i przy poczynionych założeniach zmienia się w funkcji $\xi = x/x'$ jako

$$C_s = C'_s \xi^5, \quad (f)$$

gdzie C'_s — sztywność nieswobodnego skręcania w obranym przekroju x' , obliczona tak, jak gdyby pręt był przyzmatyczny. Obliczenie kąta skręcenia Φ i odpowiednich pochodnych przeprowadzamy przy identycznych jak w art. 6.9 warunkach brzegowych, z tym tylko, iż tym razem sztywność C_s jest zmienna wzdłuż osi x . Naprężenia normalne wyznaczamy ze wzoru (6.27), wstawiając jedynie odpowiadającą danemu przekrojowi wartość F_0 , która dla rozpatrywanych prętów zmienia się, a mianowicie

$$F_0 = F'_0 \xi^2. \quad (g)$$

Przeprowadzona analiza odpowiada ogólnemu obciążeniu pręta lekkiobieżnego i może być zastosowana do przypadków szczególnych, gdy niektóre składowe obciążenia są równe zeru. Jeśli na przykład w jednoobwodowym pręcie istnieje tylko $M_0 \neq 0$, to mamy przypadek skręcania ($q = q_0 = M_0/2F_c = \text{const}$) (wzór 6.51), różniący się od skręcania przyzmatycznego pręta tylko tym, iż F_c jest zmienne wzdłuż osi x , a mianowicie

$$F_c = F'_c \xi^2. \quad (h)$$

Analogicznie rozpatruje się przypadek skręcania rury wieloobwodowej. Z innych szczególnych przypadków interesujące jest działanie samych tylko momentów M_y i M_z ($T_z = 0$, $T_y = 0$). Jak wynika ze wzorów (6.47), istnieją wtedy siły Q_y i Q_z , a w konsekwencji i wydatki q (wzory 6.48). Jest to zrozumiałe, jeśli zważyć, iż w danym przekroju poprzecznym (rys. 6.39b) wydatki te muszą zlikwidować wypadkową ΔT_z od składowych napięć normalnych.

Istotną rzeczą w odniesieniu do prętów zbieżnych jest to, że pojęcie środka sił poprzecznych jako pewnego stałego punktu przekroju niezależnego od obciążenia przestaje istnieć. Aby to udowodnić, przeanalizujemy jeszcze raz przypadek przedstawiony na rys. 6.40c, zakładając, iż osie y i z są osiami centralnymi głównymi, a obciążenie przekroju stanowi tylko siła T_z i moment M_y . Postępując jak w art. 6.6, napiszmy równanie równowagi momentów względem osi przechodzącej przez SC. Równanie to ma postać (porównaj rys. 6.15b)

$$T_z e_y = - \frac{Q_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{0,s} \rho \, ds, \quad (i)$$

gdzie $Q_z = T_z - (M_y/x)$. Jak widać odległość e_y nie jest stała, lecz zależy od stosunku $Q/T_z = 1 - (M_y/T_z x)$ i jest funkcją bezwymiarowego parametru $M_y/T_z x$. Jeśli $M_y/T_z x = 0,5$, to odległość e_y dla pręta zbieżnego jest 2-krotnie mniejsza niż w pręcie przyrównanym. Podobnie udowadnia się zależność e_z od stosunku $M_z/T_y x$. Na tym tle staje się jasne, iż pojęcie środka sił poprzecznych stosuje się ściśle tylko do prętów przyrównanych. Jeśli więc korzystamy z tego pojęcia, jak na przykład w analizie nieswobodnego skręcania prętów zbieżnych, to musimy sobie zdawać sprawę, że jest to jedynie pierwsze przybliżenie uzasadnione słabą zbieżnością pręta.

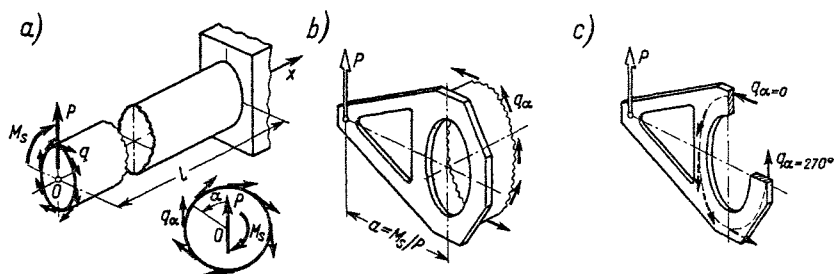
6.13. Statyka żeber

Analizowane dotychczas stany napięć w płaszczu pręta cienkościennego są prawidłowe z punktu widzenia ekonomii ciężaru konstrukcji, gdyż każdy z elementów pracuje w dwuwymiarowym płaskim stanie naprężeń, w którym można osiągnąć pełne wykorzystanie materiału. *Aby jednak te stany napięć zrealizować, wydatki styczne pochodzące od zewnętrznych obciążeń poprzecznych pręta muszą być rozłożone na obwodzie płaszcza ściśle w taki sposób, jak to opisano w art. 6.6, 6.7 i 6.10÷6.12.* Biorąc jako przykład kołową rurę (pręt) obciążony na swobodnym końcu przez P i M_s (rys. 6.41), spełnimy sformułowany powyżej zasadniczy postulat tylko wtedy, gdy w każdym przekroju poprzecznym, a więc i w obciążonym ($x = 0$), rozkład wydatków stycznych q_α będzie określony ze wzorów (6.38) i (6.39), to znaczy*

$$q_\alpha = (M_s/2\pi r^2) - (P \sin \alpha/\pi r). \quad (a)$$

* W omawianym przykładzie $T_z = P$, $J_y = \pi r^3 \cdot \delta$, $J_{yz} = 0$, a moment statyczny licząc od górnego punktu ($\alpha = 0$) jest $S_y^{0,s} = r^2 \delta \sin \alpha$. Podstawiając do (6.38b) mamy $q_\alpha = q_0 + (P \sin \alpha/\pi r)$, a następnie z równowagi momentów względem środka koła $M_s = q_0 2\pi r^2$, skąd ostatecznie mamy wzór (a).

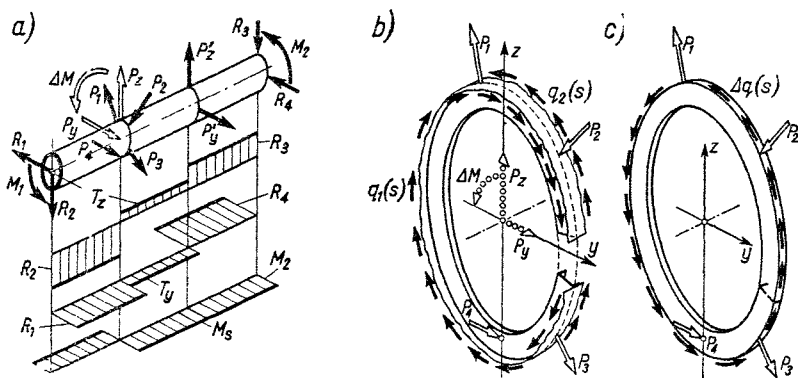
Jeśli teraz to obciążenie zewnętrzne będzie przyłożone do swobodnego końca pod postacią siły skupionej P działającej na ramieniu $a = M_s/P$ (rys. 6.41b), to konieczne jest zastosowanie elementu pośredniczącego (wreگی, żebra) zamieniającego to skupione obciążenie na rozłożony w sposób ciągły po obwodzie płaszcza wydatek q_α (wzór a). Zgodnie zatem z III zasadą dynamiki układ wydatków q_α przedstawiający oddziaływanie rury na żebro jest taki, jak podaje rys. 6.41c.



Rys. 6.41. Wprowadzenie obciążeń poprzecznych

a) teoretyczny układ obciążeń pręta; b) realizacja obciążenia przez skupioną siłę; c) statyka żebra.

W zupełnie podobny sposób postępujemy, gdy obciążenie zewnętrzne układem sił $P_1, \dots, P_4$ o wypadkowych składowych P_y, P_z i wypadkowym momencie ΔM przyłożone jest w przekroju pośrednim (rys. 6.42a). W przekroju tym występuje odpowiedni przeskok



Rys. 6.42. Statyka wreگی wprowadzającej obciążenie poprzeczne

a) układ obciążeń pręta i wypadkowych sił wewnętrznych; $R_1, \dots, R_4, M_1, M_2$ – reakcje ustalające pręt; b) układ oddziaływań i obciążeń wreگی; c) statyka wreگی.

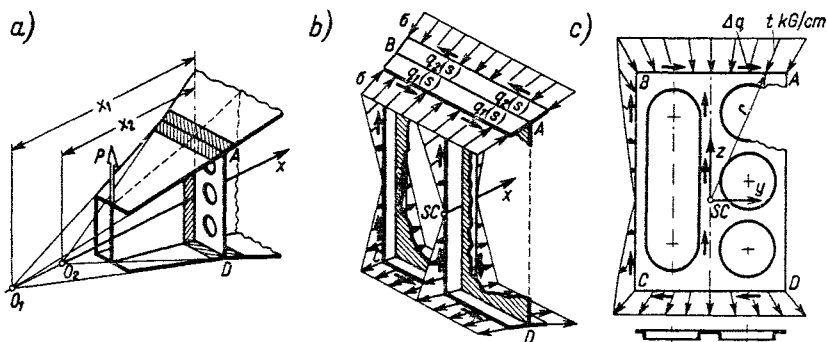
wypadkowych sił wewnętrznych T_y, T_z i M_s i towarzyszący temu przeskok $\Delta q(s)$ wydatków stycznych z $q_1(s)$ na $q_2(s)$:

$$\Delta q(s) = q_2(s) - q_1(s), \quad (b)$$

gdzie jak poprzednio wartości $q_2(s)$ i $q_1(s)$ obliczone są z odpowiednich wzorów art. 6.6, 6.7 lub 6.10÷6.12. Zrealizowanie tego przeskoku wydatków, tzn. zamiana układu sku-

pionych sił $P_1, \dots, P_4$ na rozłożony w sposób ciągły po obwodzie przyrost $\Delta q(s)$, wymaga wprowadzenia dodatkowego elementu (wręgi) (rys. 6.42b), którego statykę (rys. 6.42c) otrzymujemy bezpośrednio z układu oddziaływań.

Zagadnieniem podobnym do rozpatrywanych jest statyka wręg w miejscach załomu płaszcza prętów zbieżnych (art. 6.12). Ograniczając się na razie do przypadku, gdy pomimo załomu płaszcza oś pręta zostaje prosta* (rys. 6.43a), otrzymujemy z wzorów art. 6.12



Rys. 6.43. Statyka załomu płaszcza pręta lekkiobieżnego

a) szkic konstrukcji; b) układ oddziaływań sił wewnętrznych w miejscu załomu; c) statyka żebra, na rys. b żebro to jest częściowo usunięte, a reszta zaznaczona kreskowaniem.

raptowną zmianę sił Q_y i Q_z (wzory 6.47), co z kolei powoduje również raptowną zmianę wydatków $q_1(s)$ na $q_2(s)$ (wzory 6.48 i 6.51) w przekrojach tuż przed i tuż za załomem. Równowagę wyizolowanego załomu zapewnia różnica między składowymi naprężeń normalnych $\sigma(s) \delta r/x_1$ i $\sigma(s) \delta r/x_2$ (patrz rys. 6.39), przy czym same naprężenia $\sigma(s)$, jak również δ i r nie doznają na załomie przeskoku. W wyniku statyka miejsca załomu jest taka, jak podają rys. 6.43b, c i różni się tym tylko od poprzednio rozpatzonego przypadku (rys. 6.42c), iż obydwa równoważące się ze sobą obciążenia, to jest

$$\Delta q = q_2(s) - q_1(s), \quad t = (\sigma \delta r)(x_1 - x_2)/x_1 x_2, \quad (c)$$

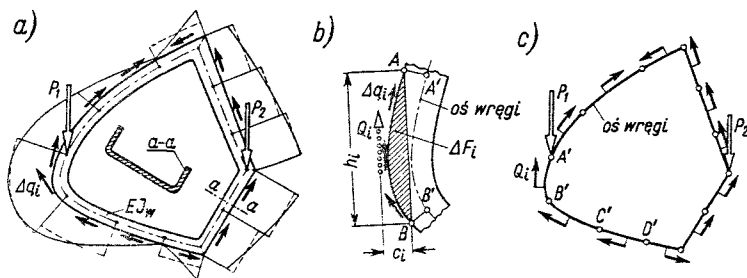
rozłożone są po obwodzie w sposób ciągły. Ponieważ rozkład Δq i t po obwodzie jest różny, zachodzi konieczność umieszczenia w miejscu załomu wręgi (żebra), w którym ten samozrównoważony układ Δq i t zamyka się. Na ogół zbieżności są małe, dzięki czemu ten układ obciążeń ma małe wartości liczbowe. W efekcie w samej wrędze powstają nieduże tylko siły wewnętrzne. Nie oznacza to jednak, iż w miejscu załomu wręga jest niepotrzebna. Gdyby bowiem wręgi nie było, to jej rolę musiałby przejąć pas płaszcza przylegający do załomu (zakreskowany na rys. 6.43a). Pas jednak taki jest na działanie obciążeń t mało sztywny, w wyniku czego w miejscu załomu nastąpi spłaszczenie przekroju w kierunku osi z . Na skutek tego wydłużenia takich włókien płaszcza, jak A i D (rys. 6.43b) będą mniejsze niż wtedy, gdyby tego spłaszczenia nie było, a same włókna przenoszą mniejsze naprężenia. Przy stałej wartości M_z , pociąga to za sobą dociążenie

* Ogólny przypadek, gdy w danym miejscu następuje załom osi pręta, rozpatrzony jest w rozdz. 7.

innych włókien (np. B i C), które takiej swobody nie mają, a to dociążenie z kolei może spowodować przedwczesne zniszczenie konstrukcji.

W wyniku tych rozważań otrzymujemy regułę, iż *w celu prawidłowego wprowadzenia obciążeń poprzecznych w pręcie cienkościennym, konieczne jest zastosowanie dostatecznie mocnego pojedynczego żebra, którego równowagę zapewnia różnica wydatków stycznych działających w przekrojach pręta leżących po obu stronach żebra.*

Przyjmując, że obciążenia wręgi są już znane, przechodzimy z kolei do podania kilku uwag dotyczących wyznaczania sił wewnętrznych. Ograniczając się tu do przypadku żeber (wręg) ramowych i kratowych* typu B i C (rys. 6.1a) konstatujemy, iż dla żeber (wręg) ramowych (rys. 6.42c) jedyna różnica w porównaniu do typowych zagadnień statyki ram płaskich (rozdz. 5) polega na pojawieniu się ciągłych obciążeń stycznych Δq przyłożonych na ogół mimośrodkowo względem osi prętów ramy. Ta pewna odmienność



Rys. 6.44. Statyka ramowego żebra (wręgi)

a) szkic konstrukcji i układ obciążeń; b) zastąpienie ciągłego obciążenia Δq_i siłą skupioną Q_i ; c) statyka wyidealizowanej wręgi.

znika, jeśli zadowalając się całkowicie dopuszczalnym przybliżeniem zastąpimy ciągłe obciążenia szeregiem sił skupionych (rys. 6.44) o wartościach

$$Q_i = (\Delta q_{sr})_i h_i, \quad (d)$$

gdzie

$(\Delta q_{sr})_i$ — średnia na danym odcinku wartość Δq ,

h_i — długość odpowiedniej cięciwy.

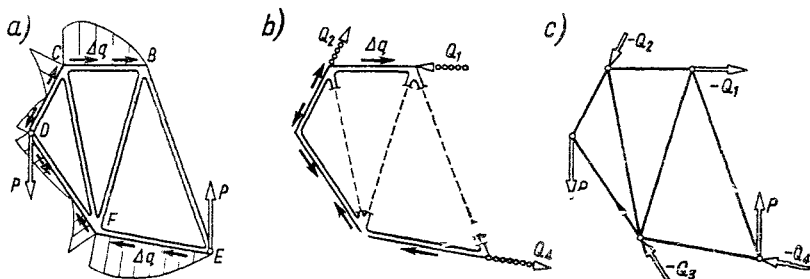
Linia działania zastępczej siły Q_i biegnie w odległości (wzór 6.4)

$$c_i = 2\Delta F_i / h_i \quad (e)$$

od cięciwy. Mając te siły Q wyznaczamy według zwykłych reguł momenty gnące, siły wzdłużne i tnące w tych punktach osi ramy, które odpowiadają podziałowi obciążenia ciągłego (rys. 6.44c). Jeśli wręga jest jednoobwodową ramą statycznie niewyznaczalną, to czynnością wstępną jest zamiana jej na konstrukcję statycznie wyznaczalną przez wprowadzenie trzech myślowych przegubów lub myślowego przecięcia (porównaj art. 5.4), a dopiero potem wyznaczanie sił wewnętrznych stanu „0”, „1”, i „2” i „3”, obliczenie niewiadomych X_1 , X_2 , X_3 itd.

* Analizę żeber typu A , tj. tarcz płaskich podano w rozdz. 7.

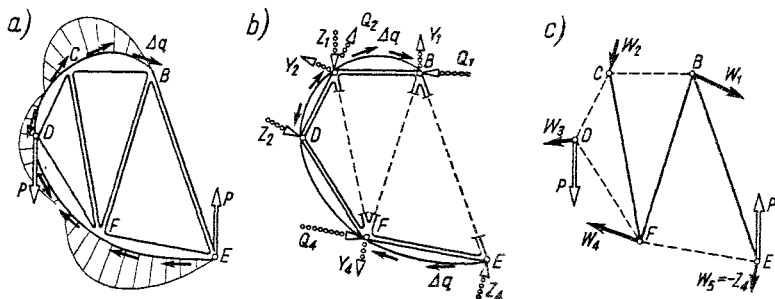
Jeśli rozpatrywane żebro jest kratownicą o wszystkich prętach prostych, co odpowiada przypadkowi, gdy ścianki płaszcza są płaskie (rys. 6.45), to obliczenie sił wewnętrznych dzieli się na dwa etapy. W pierwszym z nich wprowadzając siły Q równoważące Δq na odpowiednich prętach (rys. 6.45b), rozpatrujemy ściskanie lub rozciąganie każdego z prę-



Rys. 6.45. Statyka kratowego żebra o prętach prostych

a) układ obciążeń kratownicy; b) wprowadzenie skupionych sił Q ; c) ogólne obciążenie kratownicy.

tów oddzielnie, przy czym siły wzdłużne są zmienne wzdłuż osi prętów. W etapie drugim rozwiązujemy kratownicę obciążoną przyłożonymi w węzłach siłami — Q oraz siłami skupionymi P . Opisane postępowanie jest więc identyczne, jak podane w art. 2.1 (rys. 2.2). Jeśli rozpatrywane żebro jest kratownicą, w której przylegające do zakrzywionego płaszcza pręty muszą być też zakrzywione (rys. 6.46), to metoda postępowania zostaje jak

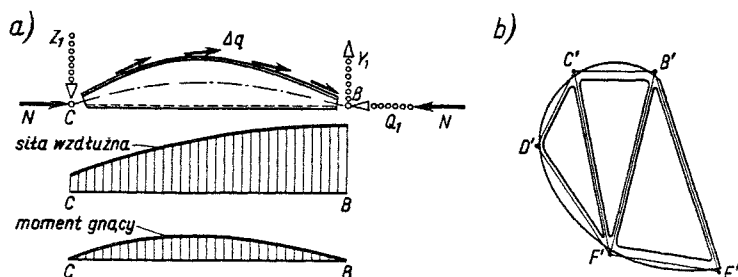


Rys. 6.46. Statyka kratowego żebra o prętach zakrzywionych

a) szkic konstrukcji i układ obciążeń; b) wprowadzenie sił Q , Y , Z równoważących poszczególne Δq w obrębie odpowiedniego pręta (na rys. podano przykładowo tylko trzy układy); c) ogólne obciążenie kratownicy siłami W z których każda np. W_2 — wypadkowa z sił — Q_2 , — Y_2 , — Z_1 (rys. b).

poprzednio z tym tylko, iż w etapie pierwszym zrównoważenie wydatków Δq w obrębie danego pręta wymaga wprowadzenia nie jednej lecz trzech sił: Y_i , Z_i , Q_i . Wskutek tego w drugim etapie obciążenie kratownicy stanowią poza siłami P , siły W będące wypadkowymi wszystkich sił — Y , — Z , — Q przyłożonych w danym węźle. Rozwiązanie tego drugiego zadania składowego daje w wyniku siły N_i działające wzdłuż linii łączących przeguby prętów. Siły te w prostych prętach powodują tylko ściskanie lub rozciąganie, natomiast w prętach zakrzywionych występuje również zginanie. W wyniku pełna statyka

zakrzywionego pręta kratownicy jest taka jak podaje rys. 6.47a. Opisany sposób analizy jest oczywiście przybliżony, gdyż pominięto w nim usztywniający wpływ momentów węzłowych. Ponieważ jednak otrzymane z takiej przybliżonej analizy siły wewnętrzne idą w kierunku zwiększenia bezpieczeństwa, rezygnujemy z dokładnej analizy, w której zebro jest traktowane jako wieloobwodowa rama. Jest to tym bardziej uzasadnione, że z reguły teoretyczną siatkę prętów ustawiamy tak, aby w zakrzywionych prętach otrzymać momenty gnące częściowo dodatnie a częściowo ujemne (rys. 6.47b), dzięki czemu wartości ich ulegają znacznej redukcji.



Rys. 6.47. Statyka zakrzywionego pręta kratownicy

a) układ obciążeń wyizolowanego pręta BC z rys. 6.46, siły Y_1 , Z_1 , Q_1 z rys. 6.46b, siły N_1 z rozwiązania kratownicy (rys. 6.47b); b) korekta teoretycznej siatki prętów.

Opisane powyżej metody rozwiązania nie wykluczają innych sposobów, jak metoda analityczna w obliczeniu ram itp. Stosowanie jednak innych metod niż przybliżone nie jest wskazane z uwagi na pracochłonność, która nawet w metodach przybliżonych nie jest mała, a w metodach analitycznych znacznie wzrasta. Tylko w przypadku szczególnie prostych konstrukcji (wregi kołowe, prostokątne) analityczne metody rozwiązania mogą okazać się racjonalne.

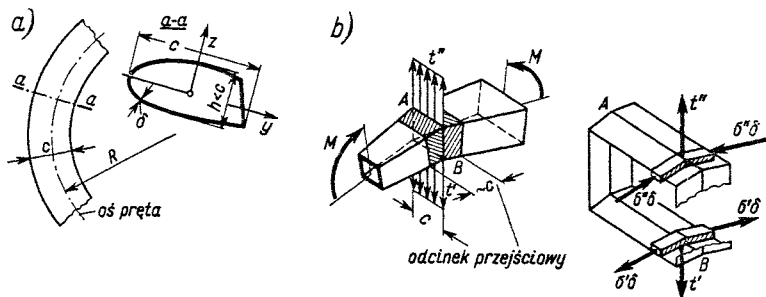
Z przedstawionej analizy pracy zeber wynika bardzo ważny wniosek konstrukcyjny, a mianowicie iż w cienkościennych prętach prostych jedynymi zębami niezbędnymi z punktu widzenia statyki są zebra wprowadzające obciążenia poprzeczne bądź zebra umieszczone w miejscu załomu płaszcza. W odróżnieniu od tych statycznie niezbędnych zeber istnienie pozostałych zeber, tzw. nienośnych uzasadnione jest innymi względami, na przykład stateczności ścianek (patrz rozdz. 11). Ponieważ obciążenia zeber nienośnych są bardzo małe, mogą być wykonane znacznie lepiej aniżeli zebra niezbędne.

6.14. Stosowalność modelu pręta do analizy ustrojów

W wyniku dotychczasowych rozważań otrzymujemy możliwość dokonania ścisłej analizy wytrzymałościowej tych ustrojów, które dadzą się sprowadzić do modelu prostego pręta spełniającego podstawowe założenia art. 6.1. Takie stwierdzenie za cenę ścisłości wyników ogranicza bardzo klasę zagadnień, które mogą być rozwiązane według podanych wzorów, a co za tym idzie zmniejsza praktyczną przydatność tych metod. Z tego powodu

zachodzi pytanie, czy zgadzając się na pewien stopień niedokładności wyników (np. 10%) nie można rozszerzyć zakresu stosowalności opisanych sposobów na ustroje wykazujące odstępstwa od przyjętego modelu. Odpowiedź na to pytanie nie jest jednoznaczna, gdyż zależy od charakteru odstępstwa i jego liczbowej wartości. Niektóre z tych odstępstw były już omawiane, jak na przykład kwestia nieswobodnego spaczenia skręcanych rur (art. 6.2 i 6.10), usuwania żeber nienośnych (art. 6.14), nie wyczerpują one jednak innych przypadków, w których mamy do czynienia w praktyce konstrukcyjnej.

Jednym z często spotykanych odstępstw natury geometrycznej jest zakrzywienie osi pręta cienkościennego (rys. 6.48a) scharakteryzowane wartością bezwymiarowego parametru $c^2/R\delta_{sr}$ wiążącego ze sobą maksymalny gabarytowy wymiar c poprzecznego prze-



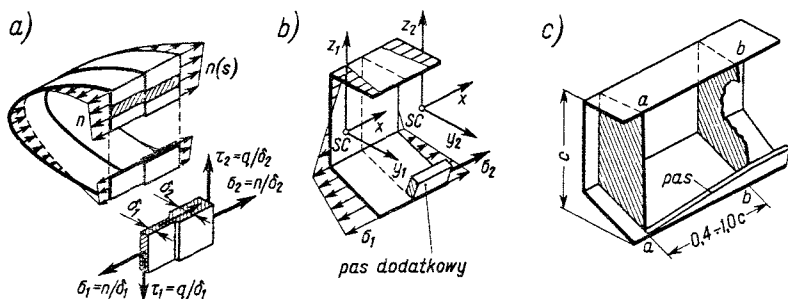
Rys. 6.48. Konstrukcje zakrzywione lub załamane

a) parametry zakrzywienia pręta; b) załom osi pręta prostego, σ' , σ'' — naprężenia normalne wynikające z niedozwolonego tu zastosowania wzorów (6.14)÷(6.17); t' , t'' wypadkowe (w kg/cm) z sił σ' i σ'' .

kroju, promień R zagięcia osi i średnią grubość δ_{sr} płaszcza. Opierając się na wynikach bardziej dokładnej analizy można podać przybliżoną regułę, iż zastosowanie wzorów dla prętów prostych jest dopuszczalne z techniczną dokładnością (10%) dla prętów lekko zakrzywionych o ile $c^2/R\delta_{sr} \leq 0,5$. Innymi słowy, jeśli zakrzywiony pręt spełnia powyższy warunek, to nie wchodząc w szczegóły jego budowy (np. rozstaw żeber), naprężenia normalne i styczne w danym przekroju wyznaczamy jak dla pręta prostego z identycznym w danym przekroju-momentem gnącym, siłą tnącą itd.

Z powyższej reguły wynika bardzo ważny wniosek, iż stosowanie modelu prostego pręta w miejscu załomu osi (rys. 6.48b) jest niedopuszczalne ($R \rightarrow 0$). Stwierdzenie to stanie się jasne, jeśli zauważyć, że w miejscu załomu przy bezkrytycznym stosowaniu wzorów art. 6.5 pojawiałyby się ciągłe obciążenia t' i t'' wynikające z raptownej zmiany kierunku tworzących płaszcza (analogia do rys. 6.43b). Obciążenia takie działając prostopadle do płaszcza powodowałyby jego zginanie. W odróżnieniu od rozpatrzonego poprzednio przypadku (rys. 6.43) temu niepożądanemu zjawisku nie zapobiega na ogół wstawienie pojedynczego żebra i zagadnienie musi być rozpatrzone z uwzględnieniem zachowania się elementów sąsiadujących z załomem (patrz art. 7.16). Długość tego przejściowego odcinka, w którym to współdziałanie zachodzi i w którym wobec tego nie wolno stosować wzorów odpowiadających prostym prętom, zależy od rozwiązania konstrukcyjnego. Przy prawidłowym rozwiązaniu jest ona rzędu maksymalnego gabarytowego wymiaru c poprzecznego przekroju w miejscu załomu.

Drugim rodzajem odstępstw również natury geometrycznej jest nieunikniona w konstrukcji zmiana przekroju poprzecznego. Rozróżnić tu należy dwa przypadki: zmiany regularnej, polegającej na proporcjonalnym powiększeniu grubości lub przekrojów pasów wszystkich elementów i nieregularnej, gdy zwiększenie przekroju dotyczy nie wszystkich elementów. W przypadku regularnej zmiany (rys. 6.49a) położenie takich charakterystycznych punktów jak środek ciężkości, środek sił poprzecznych zostaje niezmienione, jak również nie zmieniają się wydatki styczne i normalne odpowiadające wszystkim stanom obciążeń (zginanie, skręcanie itd). Jedynym następstwem takiej zmiany przekroju jest raptowna zmiana naprężeń $\sigma = n/\delta$ i $\tau = q/\delta$, wyrównująca się jednak na długości kilku grubości ścianek płaszcza, a więc pomijalnej w porównaniu do wszystkich wymiarów



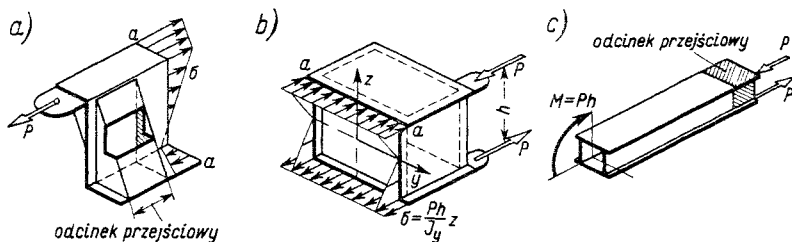
Rys. 6.49. Zmiana przekroju poprzecznego

a) zmiana regularna, b) raptowna zmiana nieregularna, c) stopniowa zmiana prawidłowa z punktu widzenia Wytrzymałości.

pręta. W takim przypadku zatem stosowalność wyprowadzonych dotychczas wzorów jest dozwolona nawet w bezpośredniej bliskości miejsca zmiany przekroju. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku zmiany nieregularnej (rys. 6.49b). Jeśli na przykład dany odcinek pręta jest zginany, to bezkrytyczne zastosowanie wzorów (6.14)÷(6.17) dawałoby raptowną zmianę nie tylko wielkości, lecz i charakteru rozkładu naprężeń po jednej i drugiej stronie rozpatrywanego przekroju (rys. 6.49b). W rzeczywistości ta zmiana jednego rozkładu na drugi odbywa się nie raptownie, lecz na odcinku pręta o długości równej w przybliżeniu maksymalnemu gabarytowemu wymiarowi poprzecznego przekroju pręta. Opisywane tu zagadnienie jest analogiczne do raptownej zmiany przekroju w pręcie zwartym, w którym zastosowanie ogólnie znanych wzorów Wytrzymałości Materiałów dopuszczalne jest dopiero w pewnej odległości od miejsca zmiany przekroju. Różnica tkwi tylko w tym, że w belce o przekroju zwartym zamiana jednego stanu naprężeń w drugi odbywa się wewnątrz istniejącego materiału, podczas gdy w pręcie cienkościennym wymaga to wprowadzenia dodatkowych elementów (żeber).

Przedstawione w drastycznej postaci konsekwencje nieregularnej zmiany przekroju mogą być złagodzone, jeśli zmiana ta zachodzi stopniowo na odcinku pręta o długości $1 \div 2c$ (rys. 6.49c). W takim przypadku rozkład naprężeń normalnych w obu przekrojach $a-a$ i $b-b$ można z techniczną dokładnością wyznaczyć jak dla prętów pryzmatycznych wstawiając oczywiście odpowiednie dla tych przekrojów wartości J_y , J_z , J_{yz} , C_s itd.

Z omawianym ostatnio zagadnieniem (rys. 6.49b) wiąże się ściśle pominięte dotychczas milczeniem zagadnienie wprowadzenia sił wzdłużnych (rys. 6.50). Jeśli mianowicie według wzorów (6.14) ÷ (6.17) obliczyć naprężenia w pewnym przekroju $a-a$ i wyizolować końcowy odcinek pręta (rys. 6.50b), to widzimy, iż w gruncie rzeczy zadanie to jest identyczne z rozpatrzonym poprzednio i polega na zamianie równoważnych sobie układów sił o różnym charakterze rozkładu po obwodzie płaszcza. Podobnie jak poprzednio prawidłowe zrealizowanie takiej zamiany wymaga wprowadzenia dodatkowych elementów konstruk-



Rys. 6.50. Wprowadzenie siły wzdłużnej

cyjnych (zeber), przy czym otrzymujemy tu typowe zagadnienie statyki bryły (patrz art. 7.6 i 7.12). Innymi słowy w zagadnieniach takich normalne wzory statyki cienkościennych prętów można stosować dla części pręta leżącej poza początkową bryłą.

Na zakończenie kilka uwag poświęcimy sprawie dostatecznej sztywności statycznie niezbędnych zeber wprowadzających skupione obciążenia poprzeczne (art. 6.13). Jeśli zebro jest typu płaskiej tarczy Δ (rys. 6.1a) lub kratownicy (rys. 6.45, 6.46), to jak okazuje się z dokładnej analizy, sztywność ich jest zawsze wystarczająca, aby zrealizować rozkład naprężeń stycznych przewidziany przez teorię. Inaczej jednak przedstawia się sytuacja, jeśli wręga jest ramą (rys. 6.44a), gdyż jej sztywność EJ_w na zginanie może mieć zasadniczy wpływ na rozkład naprężeń w płaszczu pręta. Parametrem decydującym o wielkości tego wpływu jest bezwymiarowa wielkość η

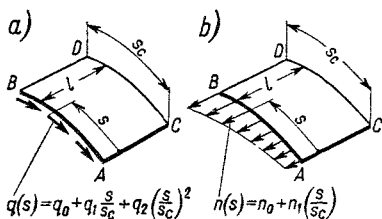
$$\eta = (J_w/J_p)(c/l)^3 \quad (a)$$

zależna od maksymalnego momentu bezwładności J_p poprzecznego przekroju płaszcza, maksymalnego gabarytowego wymiaru c poprzecznego przekroju i rozstawu l wręg. Okazuje się, że wpływ ten można zaniedbać, jeśli parametr $\eta \geq 1 \cdot 10^{-3}$, to znaczy, iż wręga taka jest dostatecznie sztywna, aby zrealizować przewidziany przez teorię rozkład naprężeń stycznych po obwodzie płaszcza. Bardziej dokładna analiza tego zagadnienia podana jest w rozdz. 8.

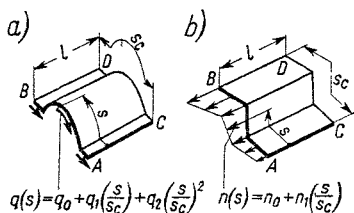
6.15. Zadania

1. Cylindryczne odcinki płaszcza obciążone są na brzegach AB w sposób podany na rys. 6.51. Wykorzystując zależność (6.2) określić rozkład wydatków q i n na pozostałych brzegach BD , CD i AC . Przeprowadzić dyskusję dla szczególnych przypadków (np. $q_1 = q_2 = 0$, $n_1 = 0$ itd.).

2. Zachowując stan obciążeń brzegów AB odcinków płaszcza z zad. 1 zmieniono ich kształt (rys. 6.52) zachowując jednak te same wymiary s_c i l . Udowodnić, że rozkład wydatków na pozostałych brzegach nie ulegnie zmianie. Czy to samo stwierdzenie jest słuszne dla wypadkowych sił w przekrojach AB i CD ?



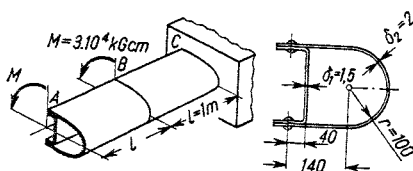
Rys. 6.51.



Rys. 6.52.

3. Poddany czystemu ścinaniu ($q = 100 \text{ kG/cm}$) odcinek płaszcza (rys. 6.4a) ma w przekroju poprzecznym kształt kołowego łuku o promieniu $r = 60 \text{ cm}$ i cięciwie $AB = r$ (rys. 6.4c). Wyznaczyć wypadkową siłę T i jej położenie w poprzecznym przekroju.

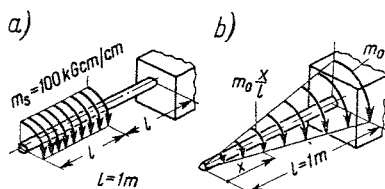
4. Przyrząteczną duralową ($G = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$) rurę obciążono w sposób podany na rys. 6.53. Wyznaczyć maksymalne naprężenia styczne oraz kąty obrotu przekroju A i B względem przekroju C .



Rys. 6.53.

5. Jak zmieniają się poszukiwane w poprzednim zadaniu wielkości, jeśli na odcinku $BC = l$ pogrubić cewkę 2-krotnie a cylindryczny płaszcz pogrubić 1,5-krotnie.

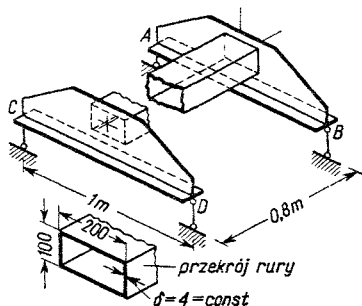
6. Zwinięty w rurę stalowy arkusz blachy ($\delta = 0,2 \text{ cm}$) o długości $l = 2 \text{ m}$ i obwodzie $s_c = 1,6 \text{ m}$ ukształtowano kolejno (rys. 6.7a) jako rurę kołową ($r = 25,5 \text{ cm}$), kwadratową ($b = h = 40 \text{ cm}$), prostokątną ($b = 78 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$). Porównać sztywności i naprężenia w tych rurach, jeśli we wszystkich przypadkach moment skręcający jest ten sam $M_s = 8 \cdot 10^4 \text{ kGcm}$, $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.



Rys. 6.54.

7. Cienkościenna przyrząteczna rura o stałej sztywności $B = 4GF^2/\oint ds/\delta = 6,4 \cdot 10^5 \text{ kGcm}^2$ obciążona jest w sposób podany na rys. 6.54. Wyznaczyć przebieg momentów skręcających i kątów skręcenia.

8. Wózek złożony z dwóch niedoksztalcanych w swych płaszczyznach belek AB i CD , związanych poprzeczną cieniocienną rurą prostokątną (rys. 6.55), złączony jest z podłożem w czterech punktach A, B, C, D . Jakie naprężenia powstaną w poprzecznej rurze, jeśli z pewnych przyczyn punkt D przemieści się pionowo o $f = 1 \text{ cm}$? ($G = 8 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$).

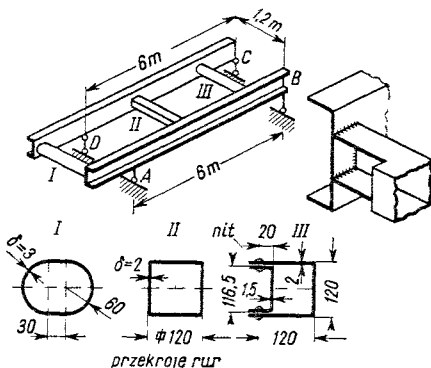


Rys. 6.55.

Uwaga: Pionowe ścianki belek AB i CD są na tyle wiotkie w kierunku do tych ścianek prostopadłych, że pozwalają na swobodne spaczenie sztorcowych przekrojów poprzecznej rury.

9. Jak zmieniają się naprężenia w rurze (zad. 8), jeśli rozciąć ją wzdłuż jednej z tworzących?

10. Stalowa rama terenowego samochodu (rys. 6.56) składa się z dwóch równoległych podłużnic bardzo sztywnych na zginanie ($EJ \approx \infty$), lecz jednocześnie bardzo wiotkich na skręcanie ($C \approx 0$). Połączenie podłużnic stanowią trzy rurowe poprzeczki o podanym przekroju. Jakie naprężenia powstaną



Rys. 6.56.

w tych rurach, jeśli na skutek nierówności drogi czwarty punkt podparcia (D) ramy znajduje się o $h = 25 \text{ cm}$ ponad płaszczyznę wyznaczoną przez trzy pozostałe punkty podparcia A, B, C .

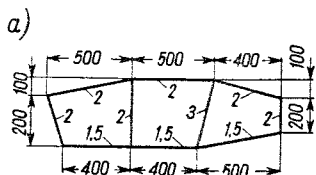
Uwaga: Połączenie poprzeczek podłużnicami pozwala na swobodne spaczenie sztorcowych przekrojów poprzeczek.

11. Jak zmieniają się naprężenia w rurach poprzeczek (zad. 10), jeśli każdą z nich rozciąć wzdłuż jednej z tworzących, a pozostałe warunki pracy ramy zostawić bez zmian?

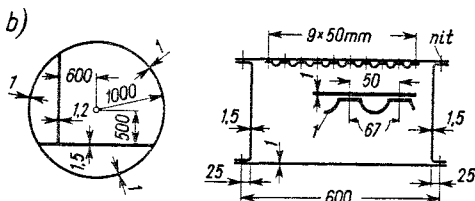
12. Rozpatrywany w sposób uproszczony w zad. 10 ustrój jest identyczny z ramami (art. 5.7), których rozwiązanie prowadziło do układu równań (f) str. 190. Wyjaśnić od strony fizycznej, na czym polega różnica między tymi dwoma schematami.

13. W podanych dwóch rurach wieloobwodowych (rys. 6.57) wyznaczyć przebieg q i kąt φ , jeśli w obu przypadkach $M_s = 2 \cdot 10^6$ kGcm, $G = 7,8 \cdot 10^6$ kG/cm².

14. Jak zmienia się poszukiwane w poprzednim zadaniu wielkości, jeśli nie zmieniając obciążenia usunąć wszystkie ścianki wewnętrzne?



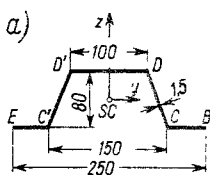
Rys. 6.57.



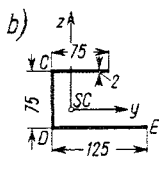
Rys. 6.58.

15. W prostokątnej rurze (rys. 6.58) jedną ze ścianek wzmocniono blachą falistą. Jak zmieniła się przez to sztywność rury na skręcanie?

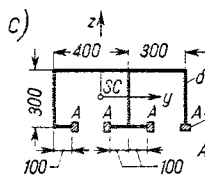
16. Stosując wzory (6.14) ÷ (6.17) obliczyć w prętach o podanych przekrojach otwartych (rys. 6.59a ÷ d) rozkład naprężeń normalnych, wyznaczyć ekstremalne ich wartości i punkt płaszcza, w których te ekstremalne wartości występują.



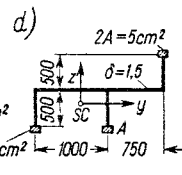
$$M_y = 8 \cdot 10^3 \text{ kGcm}; \\ M_z = 12 \cdot 10^3 \text{ kGcm};$$



$$M_y = 10^4 \text{ kGcm}; \\ M_z = 0$$



$$M_y = 4 \text{ tm}; \\ M_z = 0$$



$$M_y = -2 \text{ tm}; \\ M_z = 1 \text{ tm}$$

Rys. 6.59.

17. Dla podanych przekrojów otwartych (rys. 6.59a ÷ d) wyznaczyć położenie środka SP sił poprzecznych.

18. Zakładając, iż w prętach (rys. 6.59a, b) siła poprzeczna $T_y = 250$ kG, $T_z = -200$ kG przechodzi przez odpowiedni SP (patrz zad. 17) wyznaczyć rozkład wydatków stycznych q po obwodzie płaszcza.

19. W prętach (rys. 6.59c, d) siła tnąca ($T_z = 2$ t, $T_y = 0$) przechodzi przez SP odpowiedniego przekroju patrz zad. 17. Wyznaczyć przebieg wydatków q po obwodzie płaszcza.

20. Dla podanych przekrojów otwartych (rys. 6.59 a–d) wyznaczyć sztywność C_s nieswobodnego skręcania zakładając, iż $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm². Położenie środków SP wziąć z zad. 17.

21. Wprowadzając w punktach $B, C, \dots, E$ profilu (rys. 6.59a) sześć odpowiednio dobranych zastępczych pasów (porównaj rys. 6.13), powtórzyć wszystkie rachunki dla tego profilu z zadań 16, 17, 18 i 20 i wyniki porównać z poprzednio otrzymanymi.

22. Wprowadzając w profilu (rys. 6.59d) sześć zastępczych pasów (trzy w miejscach pasów istniejących i trzy w narożach i węźle ścianki poziomej) powtórzyć wszystkie rachunki dla tego profilu z zadań 16, 17, 19, 20 i wyniki porównać z poprzednio otrzymanymi.

23. Stalowy pręt o przekroju dwuteowym (długość $l = 100$ cm, inne wymiary w mm według tabl. 6.4: $b = 80$, $h = 100$, $\delta_p = 0,5\delta = 1,5$) skrócono tak, iż kąt skręcenia Φ zmienia się wzdłuż osi x według prawa $\Phi = \Phi_0 \sin(\pi x/l)$ ($\Phi_0 = 4^\circ$, $0 \leq x \leq l$). Wyznaczyć przebieg momentów skręcających

M_s i ciągłych obciążeń skręcających m_s przy pominięciu sztywności C na swobodne skręcanie. Jak zmieni się przebieg tych wielkości, jeśli uwzględnić sztywność C ($E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $G = 8 \cdot 10^5$ kG/cm²)?

24. Uwzględniając wyniki zadania 23 obliczyć naprężenia normalne i styczne w narożach i środku pól w przekrojach poprzecznych $x = 0$, $(l/4)$, $(l/2)$.

25. Pręt o profilu (rys. 6.59b) utwierdzony idealnie na obu końcach (rys. 6.28a) obciążono $M_c = 2 \cdot 10^8$ kGcm. Posługując się wynikami zadań 17 i 20 wyznaczyć wartości naprężeń normalnych i stycznych w punktach C, D, E przekroju utwierdzonego (B na rys. 6.28a) i przekroju obciążonego (C na rys. 6.28a). Dane liczbowe $a = 60$ cm, $b = 40$ cm.

26. Wyznaczyć kąt skręcenia przekroju C pręta z zadania 25, jeśli $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm². Czy rodzaj materiału wpływa przy nieswobodnym skręcaniu na wielkość naprężeń?

27. Przyrzutowy pręt o przekroju otwartym (rys. 6.28b) obciążono w przekrojach C i D dwoma równymi i zgodnie skierowanymi momentami M ($m_s = 0$). Wyznaczyć z dokładnością do stałego parametru przebieg naprężeń normalnych w jednym z włókien wzdłużnych tego pręta. Wyznaczyć przebieg kąta skręcenia Φ . Dane liczbowe $M = 10^4$ kGcm, $a = b = (l/3) = 50$ cm, $C_s = 2,1 \cdot 10^{10}$ kGcm⁴.

28. Pierwotnie przyrzutowy pręt o przekroju otwartym (rys. 6.28c) ($a = b = c = 40$ cm, $M_0 = 10^4$ kGcm, $C_s = 2,1 \cdot 10^{10}$ kGcm⁴) usztywniono na odcinku BC przez dwukrotne pogrubienie wszystkich ścianek płaszcza. Jakie zmiany pociągnie za sobą takie usztywnienie?

29. Skręcany wspornikowy pręt (rys. 6.26b) ($l = 100$ cm, $C = 1 \cdot 10^6$ kGcm², $C_s = 4 \cdot 10^{10}$ kGcm⁴) wzmocniono pogrubiając dwukrotnie wszystkie ścianki płaszcza. Korzystając z wyników podanych na rys. 6.30b, określić, jaką zmianę w sposobie pracy spowoduje to wzmocnienie.

30*. Przyrzutowy pręt (rys. 6.28a) o przekroju otwartym wzmocniono w przekroju C krótkim, lecz niemniej nieodkształcalnym blokiem (typu pokazanego na rys. 6.31). Jakie zmiany pociągnie za sobą to wzmocnienie?

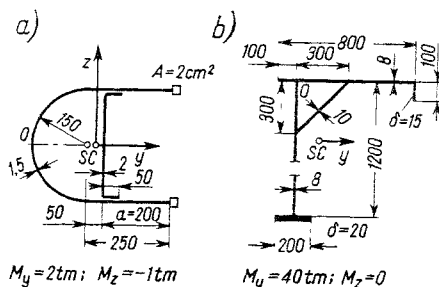
31*. Przyrzutowy pręt o przekroju otwartym (rys. 6.28c) obciążony na końcach ($a = c = 0$) wzmocniono wstawiając na długości l w równych odstępach cztery krótkie nieodkształcalne bloki (rys. 6.31). Jakie zmiany pociągnie za sobą to wzmocnienie?

32. Jednoobwodowa rura (rys. 6.33a) wykonana z blachy o stałej grubości ($\delta = 2$) ma górną część przekroju w postaci półwałka kołowego ($r = 200$), całkowita zaś wysokość $B_1B_2 = 2r$. Zakładając, iż $M_y = 3$ tm, $M_z = -1$ tm, obliczyć naprężenia normalne w płaszczu.

33. Zakładając, iż obciążenie punktu (zad. 32) stanowi poza M_y i M_z również siła poprzeczna $T_z = 2$ t, $T_y = 1$ t przyłożona w punkcie B_1 , obliczyć przebieg wydatków stycznych q oraz jednostkowy kąt skręcenia φ ($G = 2,8 \cdot 10^6$ kG/cm²).

34. W rurze z zad. 32 wyznaczyć położenie SP .

35. Wyznaczyć naprężenia normalne w rurach jednoobwodowych z odgałęzieniami (rys. 6.60a, b).



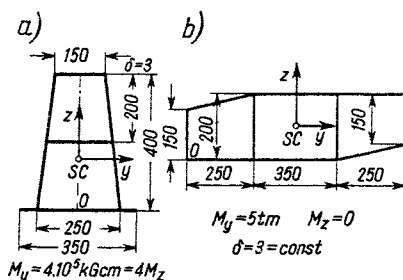
Rys. 6.60.

36. W badanym przekroju pryzmatycznej rury jednoobwodowej (rys. 6.60a) działają: siła tnąca ($T_y = -500$ kG, $T_z = 1$ t) zredukowana do punktu O oraz moment skręcający $M_s = -1$ tm (umowa co do znaków według rysunku 6.32a). Wyznaczyć przebieg wydatków stycznych q i jednostkowy kąt skręcenia φ ($G = 7,8 \cdot 10^5$ kG/cm²).

37. W badanym przekroju pryzmatycznej belki (rys. 6.60b) siła tnąca zredukowana do punktu O jest $T_z = 8$ t ($T_y = 0$). Wyznaczyć wydatki styczne q i jednostkowy kąt skręcenia φ ($G = 8 \cdot 10^5$ kG/cm²).

38. Wyznaczyć naprężenia normalne w rurach wieloobwodowych (rys. 6.61).

39. W badanych przekrojach pryzmatycznych belek (rys. 6.61) obciążenia poprzeczne zredukowane do punktu O są $T_y = 1$ t $T_z = -4$ t, $M_s = 1$ tm. Wyznaczyć przebieg wydatków stycznych q i jednostkowy kąt skręcenia φ ($G = 8 \cdot 10^5$ kG/cm²).



Rys. 6.61.

40. Wprowadzając w profilu (rys. 6.61b) 14 zastępczych pasów (4 pasy na narożach, 4 pasy w miejscach połączenia wewnętrznych ścianek z płaszczem i 6 pasów pośrodku odpowiednich odcinków górnego i dolnego płaszcza), powtórzyć wszystkie rachunki dla tego profilu z zadań 38 i 39 i wyniki porównać z otrzymanymi poprzednio.

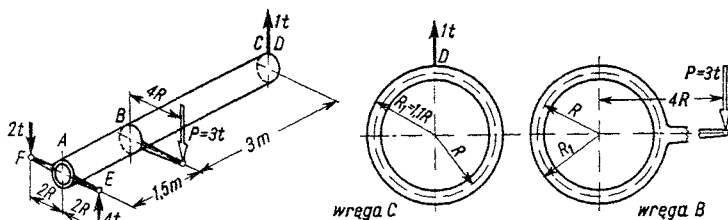
41. Zakładając, iż przekrój (rys. 6.60a) należy do belki lekkoźbieżnej i odległy jest od wierzchołka stożka o $x = 2$ m (porównaj rys. 6.38b) obliczyć wpływ tej zbieżności, jeśli obciążenie poprzeczne jest takie jak w zad. 36, a momenty gnące takie jak na rysunku 6.60a.

42. Zakładając, iż przekrój (rys. 6.61a) jest przekrojem lekkoźbieżnej belki, a jego odległość od wierzchołka stożka $x = 4$ m (porównaj rys. 6.38b) obliczyć wpływ tej zbieżności, jeśli obciążenie poprzeczne jest takie jak w zadaniu 39, a momenty gnące takie jak na rysunku 6.61a.

43. Zakładając, iż przekroje (rys. 6.59a, b) są przekrojami belek lekkoźbieżnych leżącymi w odległości $x = 2$ m od wierzchołka stożka i że obciążenie poprzeczne każdego z przekrojów zredukowane do odpowiedniego środka ciężkości jest $T_y = 250$ kG, $T_z = -200$ kG wyznaczyć niezrównoważoną przez napięcia q wartość momentu skręcającego.

44. Zakładając, iż pręt (rys. 6.26b) o $\delta = \text{const}$ jest prętem lekkoźbieżnym, w którym wierzchołek stożka leży na osi x w odległości $x = 3l$ od przekroju B , a sztywność C_s w przekroju $x = l$ jest $C_s = 8 \cdot 10^8$ kGcm⁴, obliczyć kąt skręcenia przekroju swobodnego C ($x = l = 50$ cm), jeśli $M_s = 10^2$ kGcm.

45. Cienkościenne rura o przekroju kołowym i stałej grubości (promień płaszcza $R_1 = 33$ cm) podparta w przekrojach A i C (rys. 6.62) wzmocniona jest trzema wręgami o stałych sztywnościach ($R = 30$ cm). Wyznaczyć statykę wręg B i C oraz obliczyć ekstremalne wartości momentów gnących w tych wręgach (porównaj rys. 5.18 ÷ 5.20).



Rys. 6.62.

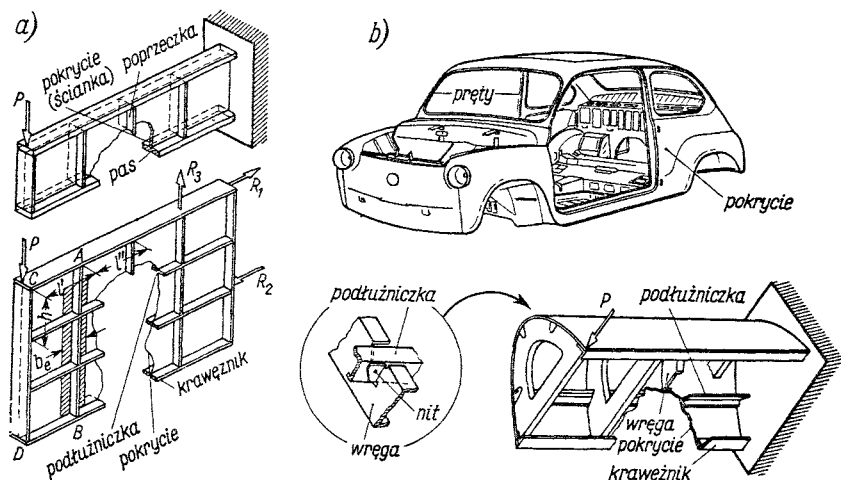
46. Jak zmieni się statyka wręg B i C z zad. 45, jeśli płaszczyzna rury nie jest cylindrem, lecz składa się z dwóch stożków ściętych złączonych podstawami. Promienie podstaw tych stożków są $(R_1)_A = (R_1)_C = 11 \text{ cm}$, $(R_1)_B = 33 \text{ cm}$.

7. STATYKA TARCZ I BRYŁ CIENKOŚCIENNYCH

7.1. Zastępczy model ustroju

Omówione w rozdziale 6 zagadnienia dotyczyły tych konstrukcji, które dają się sprowadzić do modelu cienkościennego pręta (tabl. 6.1). Obecnie będziemy rozpatrywać drugi typ cienkościennych ustrojów płaskich lub przestrzennych, w których wymiary gabarytowe są tego samego rzędu. Tego rodzaju ustroje nazywamy *cienkościennymi tarczami* lub *bryłami* w zależności od tego, czy są one płaskie, czy przestrzenne.

Typowa cienkościenna tarcza lub bryła jest zespołem złożonym ze szkieletu i pokrycia. Szkielet z kolei składa się z pasów wzdłużnych (podłużniczek, krawężników) i elementów poprzecznych (węg, żeber) tworzących ruszt płaski lub przestrzenny. Połączenia ele-

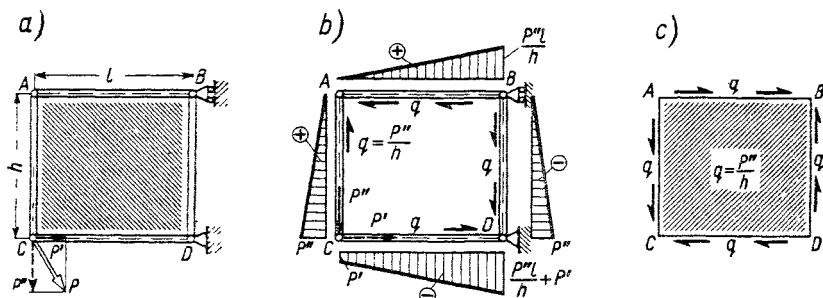


Rys. 7.1. Przykłady cienkościennych tarcz (rys. a) i brył (rys. b)

Na dolnym rysunku (b) podano typowy węzeł szkieletu.

mentów rusztu traktujemy jako idealnie płaskie przeguby pozwalające na zmianę kąta w płaszczyźnie rusztu. Taki szkielet jest sam w sobie mechanizmem i dopiero powiązanie go za pomocą pokrycia usuwa swobodę zmiany kątów między podłużnicami i poprzeczkami, dając w wyniku sztywną całość. Widać to wyraźnie na przykładzie prostokątnej

tarczy (rys. 7.2), w której możliwość zmiany kątów $A, \dots, D$ ograniczona jest sztywnością pokrycia na działanie odkształceń postaciowych. Jeśli założyć, że pręty szkieletu są bardzo sztywne na siły wzdłużne i jednocześnie dość wiotkie na zginanie, to jedynym możliwym oddziaływaniem pokrycia na te pręty są naprężenia styczne τ , dające na jednostkę długości pręta wydatek styczny q (rys. 7.2b). Pomijając na razie kwestię wyznaczenia sił wewnętrznych (art. 7.2) stwierdzamy, iż w takim ujęciu jedyną funkcją pokrycia jest



Rys. 7.2. Statyka tarczy

a) szkic ustroju; b) statyka szkieletu; c) statyka ścianki.

jego praca na ścinanie. podczas gdy pręty szkieletu pracują na rozciągające lub ściskające siły wzdłużne. Ustrój z tak rozdzielonymi funkcjami jej elementów nosi nazwę *konstrukcji półskorupowej*.

W rzeczywistości pręty szkieletu (rys. 7.2) ulegają wydłużeniom (pręty AB i AC) lub skróceniom (pręty BD i CD), wskutek czego pasma pokrycia przylegające do prętów szkieletu ulegają takim samym odkształceniom. Innymi słowy pasma te współpracują całkowicie z prętami w przenoszeniu naprężeń normalnych. Współpraca pasm bardziej odległych od prętów nie może być już tak prosto określona i jej charakter zależy od proporcji geometrycznych i od rodzaju obciążenia. Ponieważ ściśle określenie tej współpracy w przypadku tarcz i brył cienkościennych jest nadzwyczaj trudne, konieczne jest wprowadzenie uproszczonego modelu zastępczego. Otrzymujemy go przez zastąpienie rzeczywistego ustroju konstrukcją półskorupową, w której zostawiamy pokrycie o niezmiennym kształcie i grubości, ale tylko jako element oddziałujący na pręty szkieletu pod postacią wydatków stycznych q . Drugą funkcję pokrycia uwzględniamy zwiększając przekroje prętów szkieletu tak, aby siła przeniesiona przez zastępczy pręt była w przybliżeniu równa sile przenoszona w ustroju rzeczywistym przez pręt szkieletu i współpracujący z nim pasek pokrycia. Opierając się na danych z teorii sprężystości, szerokość b_e paska współpracującego z prętami o długości l przyjmujemy równą $l/6$. Tak więc w tarczy (rys. 7.2a) zastępcze pola przekrojów prętów AB i AC są odpowiednio

$$A_{AB} + (l\delta/6), \quad A_{AC} + (h\delta/6),$$

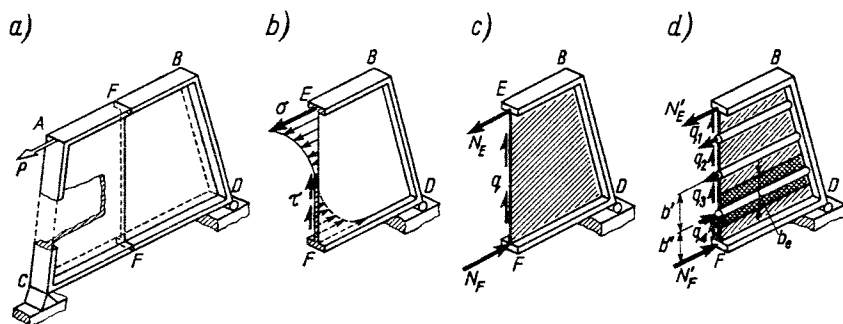
gdzie A_{AB} , A_{AC} są odpowiednio polami przekrojów prętów AB i AC , a δ jest grubością ścianki. W tarczy wielościankowej (rys. 7.1a) szerokości b_e dla pasów AB i CD o długości $AB = CD = l$ otrzymuje się odpowiednio $l/3$ i $l/6$, z tym, iż nie mogą one być większe

niż wartości $0,5 (l' + l'')$ i $0,5l'$ odpowiadające pełnej współpracy całej ścianki. Innymi słowy jako pola zastępczych pasów AB i CD należy brać mniejszą z dwóch wartości

$$\text{pas } AB \begin{cases} A + (l\delta/3), \\ A + 0,5(l' + l''), \end{cases} \quad \text{pas } CD \begin{cases} A + (l\delta/6), \\ A + (l'\delta/2). \end{cases}$$

Analogicznie wyznaczamy pola zastępczych przekrojów pasów poziomych, np. CA , przyjmując jako l całą długość tego pasa (od punktu C , aż do punktu przyłożenia siły R_1 , z tym, że rolę wymiaru l' lub l'' odgrywa teraz wymiar h).

Opisany dobór pól zastępczych pasów odpowiada przypadkowi (rys. 7.1a), gdy liczba rzeczywistych podłużniczek jest dostateczna do tego, aby rozkład sił wewnętrznych odpowiadający modelowi zastępczemu oddawał dość wiernie układ sił wewnętrznych w konstrukcji rzeczywistej. Jeśli tak nie jest, to można temu zaradzić przez wprowadzenie fikcyjnych pasów. Przypuśćmy mianowicie, że chcemy możliwie dokładnie zbadać rozkład sił wewnętrznych w dużym ustroju o postaci nieźebrowanej tarczy (rys. 7.3a) i niech ten



Rys. 7.3. Wprowadzenie fikcyjnych prętów zastępczych

a) szkic konstrukcji; b) rzeczywisty rozkład naprężeń σ ; c) stan naprężeń w ustroju maksymalnie uproszczonym; d) stan naprężeń po wprowadzeniu fikcyjnych prętów zastępczych.

rzeczywisty rozkład jest taki, jak podaje rys. 7.3b. Model zastępczy (rys. 7.3c), w którym prętami szkieletu są tylko cztery obramowujące pręty, nie spełnia postawionego zadania, gdyż nie da żadnej informacji jak przebiegają naprężenia normalne w ściance traktowanej jako jeden element przenoszący tylko ścinanie. Informację tę można uzyskać dopiero wtedy, gdy podzielimy ściankę fikcyjnymi prętami na kilka mniejszych ścianek (rys. 7.3d). Zachowując nadal model konstrukcji półskorupowej, pole przekroju fikcyjnego pasa określamy jako

$$b_e \delta = 0,5 (b' + b'') \delta,$$

przy czym ścianki łączące te fikcyjne pasy pracują już tylko na ścinanie. Wprowadzając podobne pasy w kierunku pionowym, otrzymamy w wyniku ustrój analogiczny do podanego na rys. 7.1a, dający możliwość względnie wiernego opisu rozkładu naprężeń w przekrojach ścianki równoległych do boków AB i CD . Należy jednak zdawać sobie sprawę, iż wprowadzenie zbyt dużej liczby fikcyjnych prętów pociąga za sobą duże komplikacje rachunkowe, gdyż konstrukcja staje się ustrojem wielokrotnie statycznie niewyznaczal-

nym*. Z tego powodu liczbę fikcyjnych prętów ograniczamy do niezbędnego minimum.

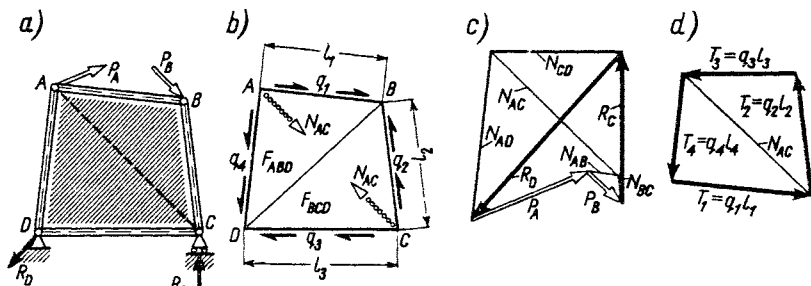
Podobnie jak i w konstrukcjach kratowych (rys. 2.2), tak i w konstrukcjach cienkościennych główną uwagę poświęcimy zagadnieniom, w których obciążenia przyłożone są w węzłach szkieletu (rys. 7.1, 7.2, 7.3). Przy takim obciążeniu o pracy pokrycia decyduje jego sztywność na ścinanie i rozciąganie. Podobnie zatem jak w przypadku prętów (art. 6.1) zakładamy, że rozkład naprężeń stycznych i normalnych w pokryciu jest równomierny w kierunku jego grubości δ . W konsekwencji wprowadzamy również pojęcia wydatków stycznych q i normalnych n (rys. 6.2) określonych zależnościami (6.1).

Podsumowując przeprowadzone rozważania stwierdzamy, że uproszczona analiza tarcz i brył cienkościennych opiera się na następujących założeniach:

- Obciążenia zewnętrzne przyłożone są tylko w węzłach szkieletu.
- Oddziaływania ścianek na zastępcze pręty szkieletu są jedynie oddziaływaniami stycznymi do osi tych prętów.
- Rozkład naprężeń w ściankach jest równomierny na ich grubości i jest w pełni określony przez wydatki q i n .

7.2. Statyka najprostszych tarcz

Pokazane na rysunkach 7.2 i 7.3 tarcze stanowią podzespoły, z szeregu których można budować bardziej złożone ustroje. Przykładem tego są tarcze (rys. 7.1a), które można uważać jako wynik połączenia czterech, względnie dwunastu podzespołów z rys. 7.2.



Rys. 7.4. Rozwiązanie tarczy z 4-kątną ścianką

a) szkic konstrukcji; b) statyka ścianki; c) wykresine rozwiązanie po wprowadzeniu pręta AC ; d) określenie wydatków na bokach ścianki.

Punktem wyjścia analizy tych złożonych ustrojów jest umiejętność rozwiązania tych podzespołów, których wspólną cechą jest to, że szkielet ich tworzy czworobok przegubowy.

Rozwiązanie takiej najprostszej tarczy (rys. 7.4a) rozpoczynamy od myślowego przecięcia ścianki i zbadaniu warunków jej równowagi. Zgodnie z założeniem (b) art. 7.1

* Uprzedzając dalsze rozważania można podać, iż tarcza (rys. 7.3a), w której wprowadzimy trzy poziome i trzy pionowe fikcyjne pręty staje się ustrojem 9-krotnie statycznie niewyznaczalnym.

oddziaływania prętów na ściankę są wyłącznie styczne do osi prętów (rys. 7.4b). Oznaczając *średnie* wartości wydatków na poszczególnych bokach przez $q_1, \dots, q_4$ i pisząc równania równowagi momentów względem punktów D, C, B otrzymujemy (wzór 6.5) zależności

$$q_2 = q_1 F_{ABD} / F_{BCD}, \quad q_4 = q_1 F_{ABC} / F_{ACD}, \quad q_3 = q_4 F_{ABD} / F_{BCD}, \quad (7.1)$$

w których F_{ABD} oznacza pole trójkąta ABD , F_{BCD} — pole trójkąta BCD itd. Pisząc następnie równanie równowagi dla jednego z prętów szkieletu, np. AB , mamy

$$q_1 l_1 = P'_A + P'_B, \quad (a)$$

jako czwarte równanie niezbędne do wyznaczenia z niego i równań (7.1) nieznanych wydatków $q_1, \dots, q_4$. W równaniu (a) siła P'_A jest składową w kierunku AB siły P_A określonej z rozłożenia P_A na kierunek AB i AD . Podobnie P'_B jest składową w kierunku AB siły P_B , określoną z rozłożenia P_B na kierunek AB i BC .

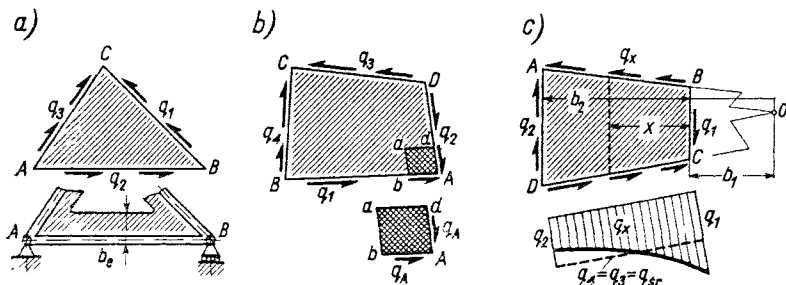
Zamiast podanego analitycznego sposobu wyznaczenia $q_1, \dots, q_4$ można zastosować metodę wykreślną. Wprowadzając mianowicie siły $T_1 = q_1 l_1, \dots, T_4 = q_4 l_4$ zauważmy, że wypadkowa z sił T_1 i T_4 musi być równa i przeciwnie skierowana niż wypadkowa z sił T_2 i T_3 . Wynika stąd, że wypadkowa ta musi mieć kierunek przekątnej AC , a jej wartość jest taka jaką miałyby siła N_{AC} , gdyby zamiast ścianki istniał pręt AC (rys. 7.4a). Jeśli więc zastąpimy ściankę takim prętem i rozwiążemy za pomocą wykresu Cremony (rys. 7.4c) taką kratownicę, to otrzymamy siłę N_{AC} , która w danym przypadku jest ściskająca. Wracając teraz do rzeczywistej ścianki (rys. 7.4b) i wysuwując siły N_{AC} , tak jak działają one na pręt AC , rozkładamy je na kierunki AB i AD oraz na kierunki CB i CD , otrzymując w ten sposób wartości sił $T_1, \dots, T_4$ (rys. 7.4d) i wydatków $q_1 = T_1/l_1, \dots, q_4 = T_4/l_4$.

Przebieg sił w pasach można określić w różnoraki sposób. Jeden z nich polega na analizie równowagi prętów szkieletu (rys. 7.2b) obciążonego znanymi już oddziaływaniami ścianki i siłami zewnętrznymi. Tak na przykład pręt CD obciążony jest na końcu C siłą P' , a na swej długości wydatkiem $q = P''/h$. Wskutek tego siła wzdłużna w tym przęcie musi zmieniać się liniowo od wartości P' do $[P' + (P''l/h)]$. Inny sposób polega na wykorzystaniu wykresu Cremony (rys. 7.4c), jeśli zauważyć, że określone z niego wartości sił w prętach są rzeczywistymi ich wartościami w tych węzłach, w których nie ma fikcyjnego pręta AC . Innymi słowy siła w przęcie AB w okolicy węzła B jest równa sile N_{AB} odczytanej z tego wykresu. Siła w tymże przęcie w okolicy węzła A jest algebraiczną sumą T_1 i N_{AB} , to jest

$$T_1 + N_{AB}, \quad (b)$$

a w pozostałych przekrojach zmienia się w przybliżeniu liniowo. Mając zatem wartości sił wzdłużnych na końcach pręta, możemy określić przebieg sił wzdłużnych na całej jego długości.

Otrzymane rozwiązanie obejmuje prawie wszystkie najprostsze tarcze spotykane w praktyce jak tarcze prostokątne, trapezowe itp. W przypadku ścianki trójkątnej (rys. 7.5a) średnie wartości wydatków q_1, q_2, q_3 muszą być równe zeru, gdyż inaczej nie istniałaby równowaga tej ścianki. Współdziałanie tej ścianki wyraża się jedynie w zwią-



Rys. 7.5. Różne przypadki statyki ścianki

a) wykazanie niemożności istnienia średnich $q \neq 0$ w ściance trójkątnej; b) uzasadnienie nierówności rozkładu q ; c) statyka ścianki trapezowej.

szeniu pól przekrojów zastępczych pasów szkieletu i wynikającej stąd redukcji naprężeń w pasach.

Niezmiernie istotną kwestią jest wyjaśnienie, do jakiego stopnia rzeczywisty rozkład wydatków q na poszczególnych bokach czworokąta pokrywa się z obliczonymi średnimi wartościami $q_1, \dots, q_4$. Łatwo dowiedzieć, że ten rozkład nie może być na ogół równomierny. Rozważając bowiem sytuację, jaka istnieje w elementarnym ukośniku naroża A (rys. 7.5b), widzimy, że równowaga tego ukośnika możliwa jest tylko wtedy, gdy oba styczne wydatki na bokach bA i dA są sobie równe. Ponieważ średnie wartości $q_1, \dots, q_4$ nie są na ogół sobie równe, więc spełnienie poprzedniego warunku wymaga, aby rzeczywiste wydatki styczne były na długości boków zmienne. Tylko w ścianie prostokątnej lub równoległobocznej rzeczywisty rozkład wydatków stycznych może być równomierny, gdyż wtedy $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$.

Pewną orientację w zakresie rzeczywistego rozkładu wydatków daje analiza ścianki trapezowej (rys. 7.5c), w której założenie równomierności rozkładu q_1 i q_2 nie przeczy możliwości spełnienia równowagi elementarnych ukośników w narożach, o ile tylko wydatki q_x na bokach AB i CD będą zmienne od wartości q_2 w narożach A i D , do q_1 w B i C . Prawo zmienności q_x otrzymamy z równania równowagi momentów względem punktu O przecięcia prostych AB i CD , a mianowicie

$$q_1 b^2 = q_x x^2 = q_2 b_2^2 = \text{const}, \quad (7.2)$$

gdzie odległości b_1, x, b_2 mierzone są od punktu O . Tak więc, gdy stosunek długości $AD : BC = 1,5$ wtedy $q_1 = 2,25q_2$, a średnie wartości na bokach AB i CD są $q_3 = q_4 = 1,5q_2$, dając tym samym miarę nierównomierności rozkładu wydatków*. Ta nierównomierność jest tym mniejsza, im bardziej czworokątna ścianka zbliża się do prostokąta. Ograniczając się tylko do takich pseudoprostokątnych ścianek przyjmujemy w obliczeniach, iż wyteżenie materiału ścianki odpowiada średniej wartości

$$q^* = 0,25(q_1 + q_2 + q_3 + q_4).$$

W praktycznych zagadnieniach spotyka się niekiedy przypadek, gdy w czworokątnej tarczy dwa pasy szkieletu są łagodnie zakrzywione po łukach współśrodkowych kół (rys. 7.6a). Uwzględniając, że pasy te są na ogół dość wiotkie na zginanie, a sztywne jedynie na siły wzdłużne, jako najbliższy rzeczywistości** obierzemy taki schemat pracy, w którym pasy będą pracować wyłącznie na rozciąganie lub ściskanie. Wymaga to jednak odstępiania od założenia, że oddziaływania między ścianką a pasami są

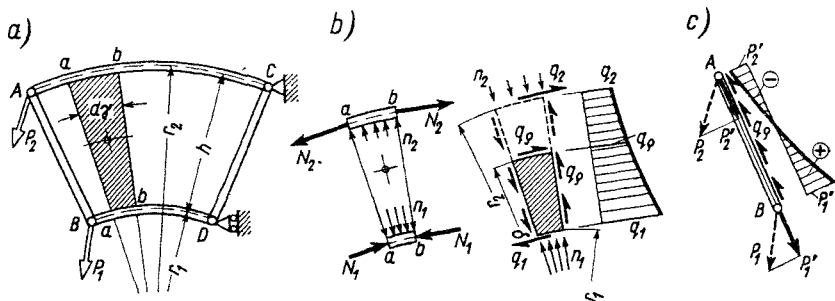
* Orientacyjność wzoru (7.2) wynika stąd, że tak określony rozkład q_x nie spełnia warunku ciągłości odkształceń.

** Podstawowym kryterium jest w tym przypadku zasada minimum energii. Gdyby przypuścić, że pasy pracują na zginanie, to ilość energii odpowiadająca takiemu schematowi statycznemu byłaby bardzo duża w porównaniu z ilością energii odpowiadającą schematowi obranemu.

tylko styczne. Jeśli mianowicie obciążenia P_1 i P_2 dają w środku ciężkości przekroju $a-a$ moment gnący M_a i siłę wzdłużną N_a , to z elementarnego rozłożenia mamy siły w pasach

$$N_1 = (M_a/h) - (N_a A_1/A), \quad N_2 = (M_a/h) + (N_a A_2/A), \quad (c)$$

przy czym A_1 , A_2 są polami przekrojów zastępczego pasa górnego i dolnego, zaś $A = A_1 + A_2$. Rozdziając teraz elementarny wycinek tarczy na części składowe (rys. 7.6b) widzimy, że równowaga pasów



Rys. 7.6. Statyka tarczy z pasami zakrzywionymi
 a) szkic ustroju; b) statyka elementów pasów i elementu ścianki; c) statyka pręta AB.

w założonym stanie prostego rozciągania lub ściskania możliwa jest tylko wtedy, gdy między ścianką a pasami istnieć będą wydatki normalne n_1 i n_2

$$n_1 = N_1 dy/r_1 dy = N_1/r_1, \quad n_2 = N_2/r_2 \quad (d)$$

powodujące ściskanie ścianki w kierunku promieniowym*.

Ponadto wycinek ścianki ścinany jest wydatkami stycznymi, które, zgodnie ze wzorem (7.2), zmieniają się według prawa

$$q_1 r_1^2 = q_p r^2 = q_2 r_2^2 = B = \text{const.} \quad (e)$$

Wartość stałej B wyznaczamy z warunku równoważności między siłą tnącą T_a a wypadkową wydatków q w tym przekroju, tj.

$$T_a = \int_{r_1}^{r_2} q_p dq = \int_{r_1}^{r_2} B q^{-2} dq = B [(1/r_1) - (1/r_2)], \quad (f)$$

skąd otrzymujemy ostatecznie B , a w konsekwencji

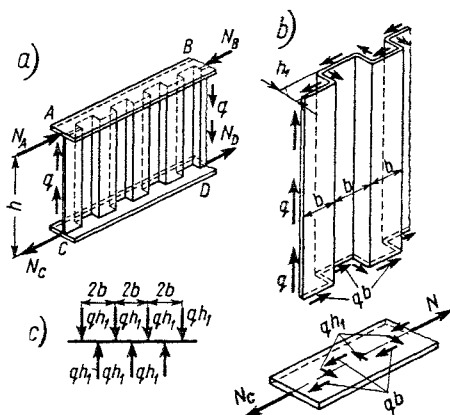
$$q_p = T_a r_1 r_2 / h r^2, \quad q_1 = T_a r_2 / h r_1, \quad q_2 = T_a r_1 / h r_2. \quad (g)$$

Jeśli przekrój $a-a$ poprowadzimy bezpośrednio za poprzeczką AB, to z wzorów (g) otrzymujemy wydatki q zapewniające równowagę pręta AB, przy czym $T_a = P'_1 + P'_2$, tj. sumie składowych sił P_1 i P_2 na kierunku poprzeczki (rys. 7.6c). Tak samo analizujemy statykę pręta CD, jeśli za T_a wstawimy wartość siły tnącej odpowiadającej poprowadzeniu myślowego przekroju tuż z lewej strony tego pręta.

Przeprowadzone rozważania nie ulegają zasadniczym zmianom, jeśli ścianka tarczy jest blachą falistą rys. 7.7a, z tym tylko, iż jej współpraca z prętami szkieletu w przenoszeniu naprężeń normalnych w kierunku równoległym do fal, tj. AC, jest taka jak podano w art. 7.1, podczas gdy w kierunku prostopadłym do fal, tj. AB, jest całkowicie

* Równowaga wycinka ścianki zapewniona jest różnicą wydatków q na bokach $a-a$ i $b-b$.

usunięta. Wynika to stąd, że w kierunku AB sztywność blachy jest znikoma, wskutek czego w przekroju AC naprężenia normalne przenoszą same pasy. Sposób przeniesienia naprężeń stycznych (rys. 7.7b) nieczym się nie różni od sposobu dla ścianki płaskiej. Każdy z pasków blachy $b \times h$ lub $h_1 \times h$ znajduje się w stanie czystego ścinania*. Równowagę pasa, np. dolnego (rys. 7.7b), w kierunku wzdłużnym daje szereg sił równoważących



Rys. 7.7. Statyka wycinka tarczy ze ścianką z blachy falistej

różnicę $N - N_C$. W kierunku prostopadłym do osi tego pasa mamy dwa układy sił qh nawzajem się równoważące (rys. 7.7c) i powodujące pewne (zresztą pomijalne) zginanie pasa w jego płaszczyźnie. Analogiczną analizę można przeprowadzić, gdy kształt fal jest inny niż prostokątny.

7.3. Tarcze statycznie wyznaczalne. Analogia kratownicowa

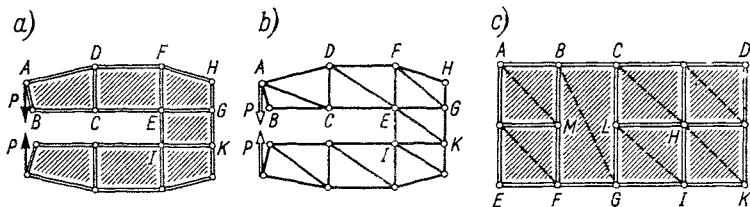
W rozwiązaniu takich tarcz (rys. 7.1a) omówić trzeba dwie kwestie. Pierwsza z nich dotyczy określenia, czy dana konstrukcja jest zespołem sztywnym, druga polega na wskazaniu metod rozwiązania pozwalających możliwie szybko wyznaczyć siły wewnętrzne.

W rozstrzygnięciu pierwszej kwestii posługujemy się analogią, z której korzystaliśmy już poprzednio (rys. 7.4a), a mianowicie, że czworokątna ścianka jest *kinematycznie i statycznie równoważna** jednemu prętowi przekątnemu*. Jeśli to stwierdzenie zastosujemy do złożonej tarczy (rys. 7.8a) w ten sposób, że nie zmieniając prętów szkieletu zastąpimy każdą czworokątną ściankę jednym prętem przekątnym, *ta* taka kratownica (rys. 7.8b) jest kinematycznie i statycznie równoważna pierwotnej tarczy. Jak widać ta kratownica

* Na bokach poziomych takiego paska obciążenia styczne wynikają z oddziaływania pasów, na pionowych — z oddziaływania sąsiednich pasków blachy.

** Równoważność kinematyczna oznacza zachowanie takich cech, jak geometryczna niezmiennosc, liczba stopni swobody itp. Równoważność statyczna oznacza niezmienną liczbę niewiadomych sił wewnętrznych.

jest statycznie wyznaczalna, tę samą więc cechę ma i pierwotna tarcza. Opisana analogia jest szczególnie efektywna w określeniu stopnia statycznej niewyznaczalności. Tak na przykład tarcza (rys. 7.8c) jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna, albowiem po wprowadzeniu wykrzyżowań (linie przerywane) widać, że część $CDGK$ jest jednokrotnie przesztynwniona. Z analizy tej kratownicy wynika również, że z tej części można swobodnie

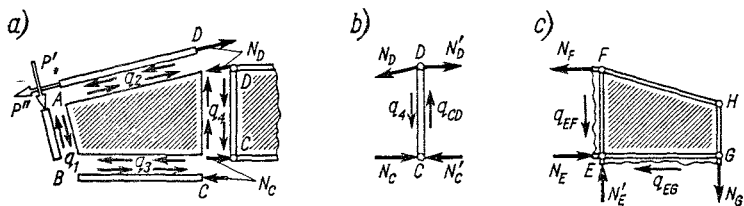


Rys. 7.8. Analiza prawidłowości tarcz

a, b) szkic tarczowej belki i równoważnej jej kratownicy; c) określenie statycznej wyznaczalności tarczy linie przerywane — pręty zastępcze w równoważnej kratownicy.

usunąć pręt (ściankę) bez obawy, że pozostały ustrój stanie się mechanizmem, jak również widać, że nie wolno tego robić w części $ACGE$. Podobnie widać, że wprowadzenie dodatkowego pręta ML powoduje przekształcenie tarczy w ustrój 3-krotnie statycznie niewyznaczalny, gdyż jest równoznaczne z wprowadzeniem trzech prętów BL , ML i MG zamiast jednego pręta BG .

Przechodząc do analizy tarcz statycznie wyznaczalnych rozpatrzmy jedną z typowych form, jaką są tarczowe belki (rys. 7.8a), stanowiące szeregowe połączenie tarcz czworokątnych (rys. 7.4a). Ich analiza polega na wielokrotnym powtórzeniu rozwiązania opisanego w art. 7.2. Rozpoczynając mianowicie od tarczy $ABCD$ (rys. 7.8a) i rozkładając ją na elementy (rys. 7.9a) wyznaczamy analitycznie (wzory 7.1) bądź wykreślić (rys.

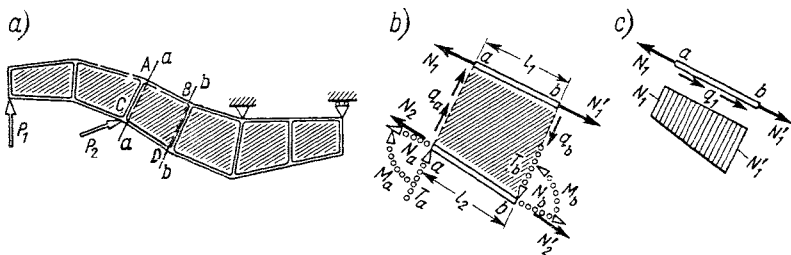


Rys. 7.9. Rozwiązanie tarczy z rys. 7.8a metodą elementów

a) układ sił w czworokątym podzespole tarczy; b) statyka rozpórki CD , siły N_C , N_D , N'_C , N'_D oraz wydatki q_4 i q_{CD} znane z rozwiązania podzespolew $ABCD$ i $CDEF$; c) statyka podzespole narożnego.

7.4c, d) średnie wydatki $q_1, \dots, q_4$, a następnie siły w pasach AD , AB , BC . Powtarzając tę samą czynność z zespołem $CDEF$ obciążonym oddziaływaniami poprzedniej tarczy, tj. siłami N_c i N_d i wydatkiem q_4 , mamy zadanie poprzedniego rodzaju itd. Metoda ta przypomina całkowicie analizę kratownic metodą węzłów (art. 2.3) z tym tylko, że z uwagi na odmienną budowę rozpatrujemy równowagę nie węzłów, lecz elementów (ścianek, pasów). Z tego powodu metodę tę nazywamy *metodą elementów*.

Równolegle do metody elementów istnieje druga metoda rozwiązania tarcz, a mianowicie *metoda przekrojów*. Prowadząc mianowicie w danej tarczy (rys. 7.10a) przekrój $a-a$ i odrzucając jedną z części, np. lewą, przenosimy do środka ciężkości jednego z pasów, np. dolnego, wszystkie siły z odrzuconej części, otrzymując wypadkowe obciążenie tego przekroju pod postacią sił N_a , T_a i momentu M_a (rys. 7.10b). To wypadkowe obciążenie



Rys. 7.10. Rozwiązanie tarczy metodą przekrojów

rozkładamy następnie na siły N_1 i N_2 w pasach i wydatek q_a w ścianie, przy czym możemy stosować metodę analityczną bądź wykreślną. Prowadząc podobny przekrój $b-b$ i odrzucając tym razem część prawą, określamy siły wewnętrzne N'_1 i N'_2 i wydatek q_b odpowiadające wypadkowemu obciążeniu tego przekroju, tj. siłom N_b , T_b i momentowi M_b . Przekroje $a-a$ i $b-b$ prowadzimy przy tym bardzo blisko odpowiednich poprzeczek AC i BD tak że wynik (rys. 7.10b) przedstawia właściwie układ sił na dwóch bokach czworokątnej tarczy $ABCD$. Pozostałe informacje o siłach wewnętrznych otrzymujemy z prostych rozważań statyki elementów. Tak na przykład przebieg sił w pasie górnym (rys. 7.10c) zakładamy liniowo zmienny od wartości N_1 do N'_1 , a wartości wydatku q_1 otrzymujemy z równania

$$q_1 = (N'_1 - N_1)/l_1. \quad (a)$$

W ostatnim etapie rozwiązania wyznaczamy siły wewnętrzne w poprzeczkach. W tym celu musimy znać siły wewnętrzne w dwóch przekrojach poprowadzonych tuż z lewej i tuż z prawej strony tej poprzeczki. Tak na przykład układ sił wewnętrznych w poprzeczce CD (rys. 7.8, 7.9b) możemy określić wtedy, gdy znane jest oddziaływanie z lewej, strony (N_C , N_D , q_d) i z prawej jej strony (N'_C , N'_D , q_{CD}).

W przypadku ścianki trapezowej (rys. 7.11a), gdy poprzeczki AC i BD są do siebie równoległe można podać proste wzory dla sił wewnętrznych w danym przekroju $a-a$. Uwzględniając mianowicie, że kąty γ_1 , γ_2 są małe, z rozłożenia wypadkowego obciążenia w tym przekroju (rys. 7.11b) mamy

$$N_1 \approx N_a - (M_a/h_a), \quad N_2 \approx M_a/h_a, \quad q_a = (T_a/h_a) - [(N_2\gamma_2 - N_1\gamma_1)/h_a], \quad (7.3)$$

a w przypadku gdy $N_a = 0$, wtedy

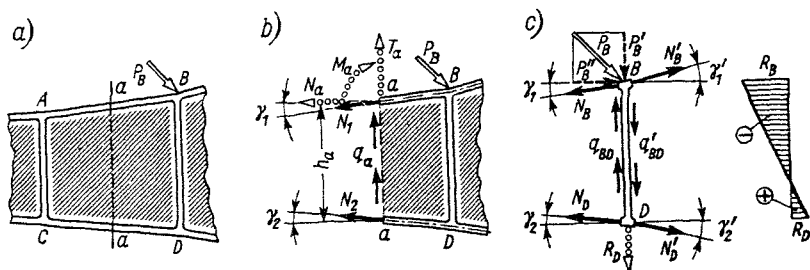
$$q_a = (T_a/h_a) - (M_a\gamma/h_a^2), \quad (7.4)$$

gdzie $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ — całkowity kąt zbieżności pasów AB i CD . Jak widać istnienie zbieżności pasów powoduje odciążenie ścianki w porównaniu z tarczą o pasach równoległych ($\gamma = 0$). To odciążenie wynikające z nachylenia sił N_1 i N_2 może osiągnąć 20÷60% składnika T_a/h_a , gdyż siły te są z reguły znacznie większe niż T_a . Gdyby przy danych dodatnich zwrotach M_a i N_a zbieżność była odwrotna niż podana

na rysunku ($\gamma < 0$), to otrzymalibyśmy zwiększenie q_a w porównaniu z tarczą o pasach równoległych.

Analizę sił wewnętrznych w rozporce np. BD (rys. 7.11c) rozpoczynamy od wyznaczenia wypadkowych sił R_B i R_D działających na węzły B i D , przy czym jako dane przyjmujemy siły N_B , N'_B , N_D , N'_D oraz wydatki q_{BD} i q'_{BD} . Siły te mają wartości

$$R_B = P'_B + N_B \gamma_1 - N'_B \gamma'_1, \quad R_D = N'_D \gamma'_2 - N_D \gamma_2, \quad (b)$$



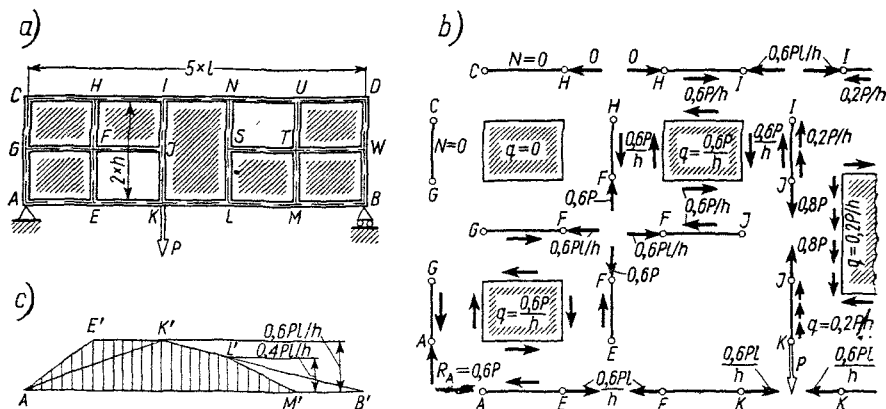
Rys. 7.11. Zastosowanie metody przekrojów do tarczy ze ścianką trapezową

przy czym dodatni zwrot obu sił R_B i R_D przyjęto do dołu. Znajomość tych sił pozwala wyznaczyć przebieg sił w rozporce, jednocześnie daje sprawdzian poprzednich rachunków, a mianowicie prawidłowość określenia wydatków, które muszą spełniać równanie

$$(q_{BD} - q'_{BD}) h_{BD} - R_B - R_D = 0. \quad (c)$$

Podobne sprawdzenie wynika z warunków, aby suma rzutów sił działających w węzle B na oś prostopadłą do BD była równa zero. To samo dotyczy węzła D .

W podobny sposób jak w belkach tarczowych, oceniamy prawidłowość budowy innych ustrojów. Biorąc tarczę (rys. 7.12a) z dwoma otworami (pola $EFJK$, $NSTU$) i wprowadzając



Rys. 7.12. Przykład rozwiązania tarczy o budowie łączonej

działając siedem równoważnych przekątnych GE , CF , HJ , IL , SM itd. otrzymujemy kratownicę sztywną i statycznie wyznaczalną, co świadczy o tych samych cechach rozpatrywanej tarczy. Budowa tej kratownicy wykazuje, iż jest to kratownica utworzona z dwóch

prostych kratownice tworzących sztywne bloki *ACIK* i *BDNL* połączonych w sposób statycznie wyznaczalny prętami *IN*, *KL* oraz zastępczym prętem *IL*. Tę samą cechę wykazuje i pierwotna tarcza. W odróżnieniu zatem od tarczowych belek, które odpowiadały kratownicom prostym (rys. 7.8a, b) i których rozwiązanie można było dokonać metodą bądź elementów, bądź przekrojów, obecna tarcza musi być rozwiązana metodą przekrojów przynajmniej przez poprowadzenie jednego przekroju przez tarczę *IKLN*.

Prowadząc przez tę ściankę przekrój tuż obok poprzeczki *JK* otrzymujemy ze wzorów (7.3) przy $\gamma = 0$

$$N_{KL} = 0,6Pl/h = -N_{IN}, \quad q_{IKL} = 0,4P/2h = 0,2P/h.$$

Z równowagi pręta *JK* rys. 7.12b, na który działa siła *P*, wydatek $0,2 P/h$ i reakcja pręta *IJ*, wynika, iż reakcja ta jest $0,8 P$. Z kolei na pręt *IJ* działa reakcja pręta *JK* ($0,8P$), wydatek od ścianki z prawej strony ($0,2P/h$) i nieznan wydatek *q* z lewej strony. Natomiast w węźle *I* nie może działać żadna siła, gdyż pręt nie ma dalszego przedłużenia. Stąd wynika, że w polu *HFI* mamy $q = 0,6P/h$. Wynik powyższy daje wartości oddziaływań na trzy pozostałe pręty *HI*, *HF* i *FJ*. Rozważając następnie pręt *FJ* przy stwierdzeniu, że w węźle *J* siła wzdłużna w pręcie musi być równa zero (brak przedłużenia), otrzymujemy reakcję pręta *GF* na *FJ* równą $0,6Pl/h$. Z równowagi pręta *HI* wynika, że siła w węźle *H* pręta *HI* jest równa zero, a stąd cały pręt *CH* jest zerowy, bo siła w *C* też musi być równa zero. To zaś daje wydatek *q* w polu *CHFG* równy zero. Postępując podobnie wyznaczamy pozostałe siły i wydatki styczne. Ponieważ wydatki na poszczególnych polach są stałe, więc siły w prętach zmieniają się liniowo. Mając zatem wartości sił na końcach odcinków, przebieg ich otrzymujemy łącząc liniami prostymi rzędne przedstawiające te wartości. Tak obliczony przebieg sił w pasie dolnym podaje rys. 7.12c (linia *AE'K'L'M'B*). Na tymże wykresie linią *AK'B'* zaznaczono przebieg sił, jakie istniałyby, gdyby wykrojów nie było.

7.4. Wyznaczanie odkształceń

Wyznaczenie odkształceń tarcz, a ogólniej biorąc wszystkich konstrukcji półskorupowych, przeprowadzamy metodą analityczną. Punkt wyjścia stanowią ogólne rozważania art. 1.2, które odpowiednio przystosowujemy uwzględniając, że przy założonym schemacie pracy ustroju pręty szkieletu pracują tylko na siły wzdłużne, a pokrycie na ścinanie. To ostatnie założenie jest słuszne, o ile ograniczymy się do takich ustrojów, w których czworokątne ściągki niewiele odbiegają swym kształtem od prostokąta.

Sama metoda postępowania przy wyznaczaniu odkształceń jest taka jak podano w art. 1.2. Jeśli mianowicie mamy obliczyć pionowe przemieszczenie węzła *B* tarczy (rys. 7.13a), to przykładamy w tym punkcie pionową jednostkową siłę $P = 1 \text{ kG}$ (rys. 7.13b). Rozwiązując następnie obydwa zagadnienia otrzymujemy siły wewnętrzne w prętach i wydatki styczne w ściankach oznaczone odpowiednio przez N_p , n_p , q_p , $\bar{q}_p$. Wykorzystując następnie wzór (1.11a) ujmujemy wpływ odkształcalności prętów szkieletu zależnością

$$f'_B = \sum \int_{l_p} (N_p n_p / EA_p) ds, \quad (a)$$

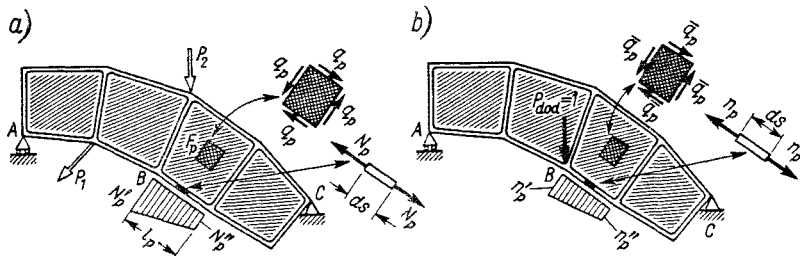
w której EA_p oznacza sztywność pręta *p*, l_p — jego długość, a sumowanie odnosi się do wszystkich prętów szkieletu. Uwzględniając, że na ogół sztywność poszczególnych prętów

jest stała i że siły N_p oraz n_p zmieniają się w przybliżeniu liniowo, wykorzystujemy wynik z tabl. 1.1 i otrzymujemy zamiast (a) wzór

$$f'_B \approx \sum \frac{l_p}{6EA_p} [N'_p(2n'_p + n''_p) + N''_p(n'_p + 2n''_p)], \quad (7.5a)$$

gdzie oznaczenia $N'_p, \dots, n''_p$ są podane na rys. 7.13. Podobnie wykorzystując wzór (1.9) ujmujemy wpływ odkształcalności ścianek jako

$$f''_B = \sum \iint \bar{\tau} \beta \, dx \, dy \, \delta = \sum \iint (\bar{q}_p / \delta_p) (q_p / G \delta_p) \, dx \, dy \, \delta_p, \quad (b)$$



Rys. 7.13. Niezbędne dane przy określeniu przemieszczeń ustroju.

a) dany układ obciążeń zewnętrznych i odpowiadające mu siły wewnętrzne N_p, q_p ; b) stan obciążenia jednostkowego w punkcie B, siły wewnętrzne $n_p, \bar{q}_p$.

a przy uwzględnieniu upraszczającego założenia, że wydatki na poszczególnych ściankach są w przybliżeniu stałe i równe średniej arytmetycznej wydatków działających na bokach ścianki, mamy zamiast (b) wzór

$$f''_B \approx \sum \frac{q_p \bar{q}_p F_p}{G \delta_p}, \quad (7.5b)$$

w którym F_p jest polem powierzchni ścianki p , δ_p — jej grubością, a sumowanie obejmuje wszystkie ścianki tarczy. Należy przy tym zaznaczyć, iż iloczyn $q_p \bar{q}_p$ jest dodatni, gdy obydwa wydatki działają zgodnie (rys. 7.13). Całkowite poszukiwane odkształcenie f_B jest oczywiście równe

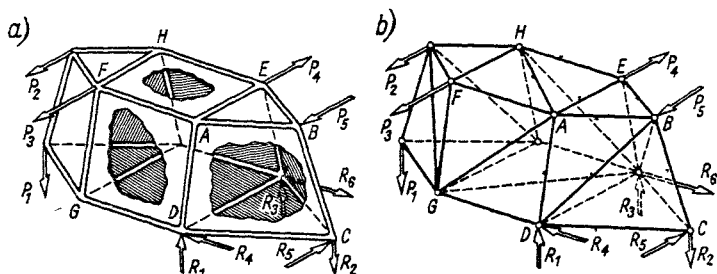
$$f_B = f'_B + f''_B. \quad (7.5c)$$

Określone wzorami (7.5) odkształcenia należy traktować jako przybliżenie, którego dokładność jest, jak wskazują doświadczenia, rzędu $\pm 10\%$. Główną przyczyną tej względnie sporej niedokładności są uproszczenia poczynione przy wprowadzeniu modelu zastępczego i niedokładne określenie sztywności elementów. Z tych powodów bardziej „dokładne” wzory, uwzględniające na przykład zmienność wydatków stycznych w poszczególnych ściankach, nieliniową zmienność siły w poszczególnych prętach szkieletu itp., należy traktować z pewną dozą krytycyzmu.

Jeśli ściankę stanowi blacha falista (rys. 7.7), to podatność jej jest większa niż ścianki płaskiej. Zamiast bowiem odeinka pokrycia, o powierzchni $2bh$ (rys. 7.7b), mamy pracujące w identycznych warunkach pokrycie o powierzchni $2(b + h_1)h$. W tym więc stosunku zwiększona jest podatność blachy falistej. Uogólniając to rozważanie na blachę falistą

przestrzennych konstrukcji rozpoczniemy od ustroju, którego wszystkie ściany są płaskie i tworzą zamkniętą powłokową bryłę (rys. 7.15a). Pręty szkieletu są przy tym tak ustawione, iż dzielą one pokrycie tylko na ściany czworokątne, np. $ABCD$, lub trójkątne np. AEB . Jako zastępczy model takiego ustroju przyjmujemy nadal model konstrukcji półskorupowej (patrz art. 7.1).

Podobnie jak w tarczach (art. 7.3), tak i tu musimy w pierwszym rzędzie rozstrzygnąć, przy jakich warunkach dany ustrój jest sztywny, a następnie wskazać racjonalne metody

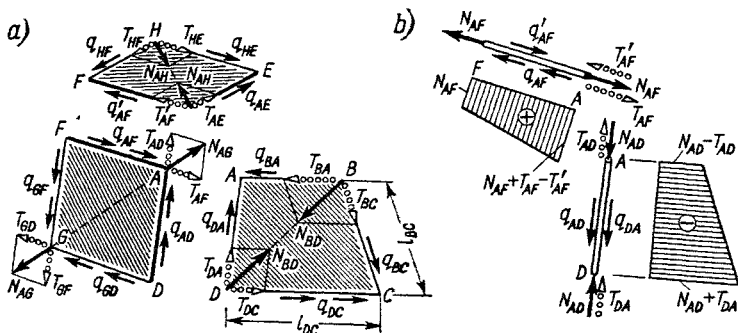


Rys. 7.15. Półskorupowa cienkościenne bryła o ścianach płaskich
a) szkic konstrukcji; b) kratownica równoważna konstrukcji z rys. a.

analizy. Odpowiedź w pierwszej kwestii otrzymamy wprowadzając podobnie jak w tarczach równoważną kratownicę (rys. 7.15b), w której każda w czworokątnych ścianek zostaje zastąpiona przez pręt przekątny, a każda z trójkątnych ścianek, po uwzględnieniu jej współpracy z prętami szkieletu (rys. 7.5a), zostaje usunięta. Tak zbudowana kratownica przestrzenna jest równoważna pod względem kinematycznym i statycznym danemu ustrojowi i jeśli jest ona sztywna i statycznie wyznaczalna, to te same cechy ma i ustrój pierwotny. Wykorzystując to stwierdzenie możemy więc przenieść bez żadnych zmian wszystkie rozważania rozdz. 2 na analogiczne ustroje cienkościenne. Tak na przykład sztywnymi i statycznie wyznaczalnymi będą ustroje cienkościenne z rys. 2.7, 2.8 i 2.14, jeśli tylko w każdej wykrzyżowanej ścianie kratownicy odpowiedni pręt przekątny zostanie zastąpiony czworokątną ścianką. Istotne również jest stwierdzenie art. 2.6, że każda powłokowa kratownica zbudowana z trójkątów jest sztywna i statycznie wyznaczalna. Daje to podstawę do oceny od pierwszego rzutu oka prawidłowości budowy cienkościennej bryły (rys. 7.15a), jeśli tylko równoważna jej kratownica (rys. 7.15b) spełnia powyższe kryterium. To samo dotyczy takich kwestii jak ocena krytycznej postaci cienkościennej bryły występującej w tym przypadku, gdy staje się ona pseudomechanizmem (rys. 2.16 i 2.17). Podobnie wreszcie bez żadnych zmian można przenieść wszystkie uwagi dotyczące budowy kratownic o ściankach płaskich (rozdz. 3), jak na przykład analiza prawidłowości budowy kratownic nabudowanych na podłożu (art. 3.6) itp.

Opisana analogia obu ustrojów cienkościennego i kratowego dotyczy nie tylko oceny prawidłowości budowy, lecz daje możność analizy sił wewnętrznych. Przypuśćmy mianowicie, że w wyniku rozwiązania równoważnej kratownicy (rys. 7.15b) znane są siły w jej prętach i niech to będą w przykładowo wybranych prętach AF , AG siły rozciągające

N_{AF} , N_{AG} , a w prętach AD , BD , AH siły ściskające N_{AD} , N_{BD} , N_{AH} . Aby od tych wartości przejść do określenia wydatków stycznych w ściankach, zauważmy (rys. 7.16a), iż rolę równoważnego pręta, np. AG , spełnia w rzeczywistości ścianka $ADGF$, która wypadkową siłę N_{AG} realizuje w postaci czterech wydatków stycznych q_{AF} , q_{AD} , q_{GD} i q_{GF} , rozłożonych na krawędziach ścianki. Równoważność statyczna obu układów będzie zachowana, gdy wypadkowe siły $T_{AD} = q_{AD}l_{AD}$ i $T_{AF} = q_{AF}l_{AF}$ dadzą w rezultacie siłę N_{AG} w węźle A i po-



Rys. 7.16. Przebieg od wyników rozwiązania kratownicy równoważnej do określenia sił wewnętrznych w ustroju pierwotnym

dobnie siły $T_{GD} = q_{GD}l_{GD}$, $T_{GF} = q_{GF}l_{GF}$ dadzą wypadkową siłę N_{AG} w węźle G . Jeśli więc na odwrót dana jest siła N_{AG} działająca w równoważnym przekątnym przecie, to rozkładając ją na siły T_{AD} , ..., T_{GF} , możemy obliczyć wartości średnich wydatków stycznych q_{AD} , ..., q_{GF}

$$q_{AD} = T_{AD}/l_{AD}, \quad q_{AF} = T_{AF}/l_{AF}, \quad q_{GD} = T_{GD}/l_{GD}, \quad q_{GF} = T_{GF}/l_{GF}, \quad (a)$$

równoważnych w swym działaniu siły N_{AG} . Postępując identycznie z wszystkimi innymi prętami zastępującymi ścianki np. prętami BD , AH , możemy obliczyć wartości średnich wydatków we wszystkich czworokątnych ściankach ustroju pierwotnego.

Określenie sił w prętach szkieletu ustroju półskorupowego, np. w przecie AD (rys. 7.16b) rozpoczynamy od wyznaczenia wartości tych sił na końcach pręta. Zauważmy mianowicie, że w konstrukcji rzeczywistej siły N_{BD} , jako siły skupionej w węźle D , nie ma i że zamiast niej istnieją wydatki styczne q_{DA} i q_{DC} rozłożone w sposób ciągły. Jeśli zatem rysując statykę pręta AD наносimy skierowany do dołu wydatek q_{DA} wynikający z oddziaływania krawędzi AD ścianki $ABCD$, to aby równowaga nie uległa zmianie musimy w węźle D usunąć oddziaływanie fikcyjnego pręta BD . To usunięcie jest dla pręta AD równoznaczne z dodaniem w węźle D siły T_{DA} tak skierowanej, jak to wynika z rozłożenia siły N_{BD} dla ścianki $ABCD$ (rys. 7.16a), a więc do góry*. W rezultacie siła wzdłużna w węźle D pręta AD jest

$$N_{AD} - T_{DA}. \quad (b)$$

* Na węzeł D pręt fikcyjny BD działa siłą przeciwną niż pokazana na rys. ścianki $ABCD$ (rys. 7.16a). Jeśli więc w węźle mamy tę przeciwną siłę odjąć, to znaczy mamy dodać siłę N_{BD} taką, jaka jest pokazana na rysunku ścianki. Z kolei siła N_{BD} ma dwie składowe T_{DA} i T_{DC} , z których tylko siła T_{DA} wpływa na pręt AD szkieletu, podczas gdy druga wpływa tylko na pręt DC .

Podobnie rozważając węzeł A pręta AD otrzymujemy, iż w konstrukcji półskorupowej siła wzdłużna w tymże węźle jest

$$N_{AD} - T_{AD}, \quad (c)$$

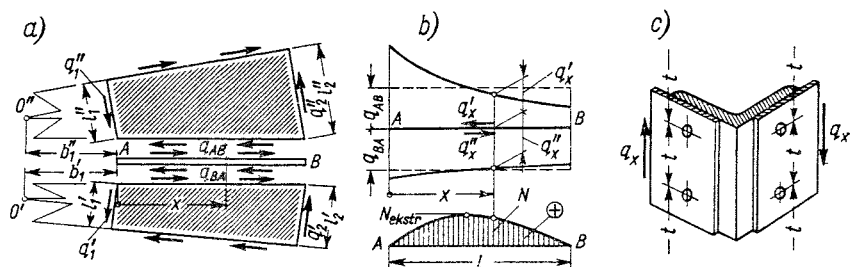
gdzie siła T_{AD} wynika z rozłożenia siły N_{AG} w węźle A ścianki $ADGF$. W rezultacie zatem całkowity układ sił w pręcie AD konstrukcji półskorupowej składa się z dwóch sił na końcach tego pręta oraz dwóch wydatków q_{DA} i q_{AD} wynikających z oddziaływania ścianek łączących się z rozważanym prętem. Jeśli przyjąć, że rzeczywiste wydatki są równe średnim ich wartościom q_{DA} i q_{AD} , to zmienność siły wzdłużnej w pręcie jest liniowa.

W identyczny sposób można rozważyć statykę drugiego pręta, np. AF , należy tylko zauważyć, iż w węźle F równoważnej kratownicy poza rzeczywistymi prętami szkieletu nie schodzą się żadne inne pręty zastępujące ścianki. Wynika stąd, że siła N_{AF} określona z rozwiązania równoważnej kratownicy jest jednocześnie rzeczywistą wartością siły w węźle F pręta AF konstrukcji półskorupowej. W węźle A natomiast rzeczywista wartość siły jest równa algebraicznej sumie trzech składników

$$N_{AF} + T_{AF} - T'_{AF}, \quad (d)$$

gdyż w tym węźle schodzą się również dwa pręty AG i AH zastępujące rzeczywiste ścianki. Spostrzeżenie dokonane dla węzła F pręta AF możemy uogólnić w tym sensie, iż w węzłach takich jak F , E , C (rys. 7.15b) wartości sił w prętach obu konstrukcji są sobie równe. Jeśli zatem z analizy równoważnej kratownicy chcemy otrzymać możliwie dużo informacji odnośnie sił w prętach szkieletu ustroju półskorupowego bez stosowania wzorów typu (b)÷(d), to możemy to osiągnąć ustawiając odpowiednio wykrzyżowania zastępujące ścianki, tak aby otrzymać jak najwięcej węzłów typu F .

Liniowa zmienność wzdłużnych sił w prętach (rys. 7.16b) odpowiada rzeczywistości tylko wtedy, gdy łączące się z prętem ścianki są prostokątne. Gdy tak nie jest, to liniową zmienność sił należy uważać za wynik przybliżony. Aby dać pojęcie o dokładności tego przybliżenia, przeanalizujemy przypadek,



Rys. 7.17. Określenie sił wewnętrznych w pręcie łączącym trapezowe ścianki

a) układ oddziaływań przy założeniu $q_{AB} = q_{BA}$; b) rzeczywisty rozkład wydatków q'_x i q''_x wzdłuż osi pręta oraz wykres siły wzdłużnej N ; c) rola pręta w przenoszeniu wydatków stycznych.

gdy łączące się z prętem ścianki są trapezowe, a średnie wartości wydatków są równe, tj. $q_{AB} = q_{BA}$ (rys. 7.17a). Wykorzystując przeprowadzoną w art. 7.2 analizę (rys. 7.5c) i wynikający z niej wzór (7.2) otrzymujemy, iż przebieg wydatków q'_x i q''_x działających na pręt AB ma charakter podany na rys. 7.17b, przy czym

$$q'_x = q_{AB} \eta' / [\eta' + \xi(1 - \eta')^2], \quad q''_x = q_{AB} \eta'' / [\eta'' + \xi(1 - \eta'')^2], \quad (e)$$

gdzie $\xi = x/l$ jest bezwymiarową współrzędną ($0 < \xi < 1$), a parametry $\eta' = l'_1/l'_2$, $\eta'' = l''_1/l''_2$ charakteryzują zbieżność trapezowych ścianek. Działająca na pręt różnica wydatków

$$\Delta q = q'_x - q''_x \quad (f)$$

wywołuje siłę wzdłużną N , która w przekroju ξ ma wartość

$$N = \int_0^{\xi} \Delta q l d\xi = q_{AB} l (\eta'' - \eta') \xi (1 - \xi) \{ [\eta' + \xi (1 - \eta')] [\eta'' + \xi (1 - \eta'')] \}^{-1}, \quad (g)$$

osiągającą ekstremum dla $\xi_0 = \sqrt{\eta' \eta''} / (1 + \sqrt{\eta' \eta''})$ i wynoszącą

$$N_{\text{ekstr}} = q_{AB} l \frac{\sqrt{\eta'} - \sqrt{\eta''}}{\sqrt{\eta'} + \sqrt{\eta''}}. \quad (7.7)$$

Tak na przykład dla konkretnych wartości liczbowych $q_{AB} = 100 \text{ kG/cm}$, $l = 100 \text{ cm}$, $l'_1 = 20 \text{ cm}$, $l'_2 = 30 \text{ cm}$, $l''_1 = 40 \text{ cm}$, $l''_2 = 25 \text{ cm}$, mamy $\eta' = 0,667$, $\eta'' = 1,600$, a ze wzoru (7.7)

$$N_{\text{ekstr}} = 2150 \text{ kG},$$

jako siłę rozciągającą. Tak duża stosunkowo wartość wynika stąd, że ustawienie drugiej ścianki (znak'') jest odwrotne niż podaje rys. 7.17a. Gdyby zamienić role l''_1 i l''_2 , to wtedy $\eta'' = 0,625$ i $N_{\text{ekstr}} \approx -90 \text{ kG}$, a więc wartość pomijalna. W szczególnym przypadku, gdy $\eta' = \eta''$ mamy że wzoru (g) $N \equiv 0$ i pręt szkieletu nie pracuje na siły wzdłużne. Nie oznacza to bynajmniej, że w przecie nie ma żadnych naprężeń. Jeśli bowiem połączenie ścianek z prętem jest takie jak pokazano na rys. 7.17c, to pręt musi przekazać wydatki styczne z jednej ścianki na drugą, przy czym każdy z nitów musi przenieść siłę tnącą $q_x l$.

W wyniku tych rozważań możemy analizę sił wewnętrznych w cienkościennej bryle zastąpić rozwiązaniem równoważnej kratownicy, dzięki czemu otrzymane w rozdz. 2 i 3 wyniki zyskują nowe zastosowanie. Tak na przykład wyniki rozważań art. 2.8, a w szczególności reguła 5, można wykorzystać w cienkościennych bryłach* bez żadnych zmian.

To samo da się powiedzieć o przewodniej idei sprowadzenia zagadnienia przestrzennego do szeregu zagadnień statyki ścian płaskich i tylko jednego przestrzennego zadania, tj. skręcania bryły układami sił przyłożonych w płaszczyznach ścian równoległych (art. 3.2), jak i rozwiązaniu tego ostatniego zadania (art. 3.3) itd.

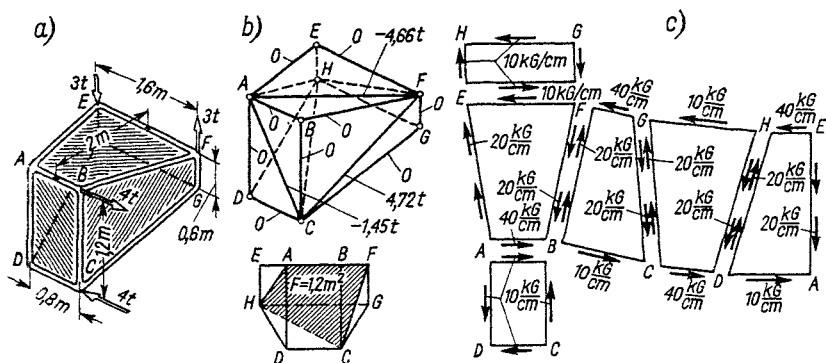
Ilustracją opisanej metody jest przykład skręcania bryły, rozwiązany według wskazówek art. 3.3 (rys. 7.18). Po wprowadzeniu równoważnej kratownicy i określeniu pola $F = 1,2 \text{ m}^2$ (rys. 7.18b), otrzymujemy ze wzoru (3.2) $\mu = 20 \text{ kG/cm}$, a następnie siły w prętach (dla niektórych prętów na tymże rysunku). Po rozłożeniu sił w prętach zastępujących ścianki na siły T (rys. 7.16), otrzymujemy ostatecznie układ wydatków stycznych pokazany na rozwinięciu konstrukcji (rys. 7.18c). Co się tyczy prętów szkieletu, to niektóre z nich są zerowe, np. BC i AD , niektóre zaś, jak AB i BC , mają siły liniowo zmienne od wartości $\pm 4 \text{ t}$ w węzłach B i C , do zera w węzłach A i D . W prętach wzdłużnych siły określone w pierwszym przybliżeniu są równe zeru. Dokładniejszą wartość otrzymamy stosując wzór (7.7). Tak na przykład dla pręta BF szkieletu mamy według oznaczeń z rys. 7.17

$$l'_1 = 80 \text{ cm}, \quad l'_2 = 160 \text{ cm}, \quad l''_1 = 120 \text{ cm}, \quad l''_2 = 60 \text{ cm}, \quad l = 210 \text{ cm} \quad q_{AB} = 20 \text{ kG/cm},$$

skąd

$$\eta' = 0,50, \quad \eta'' = 2,00 \quad \text{ i } \quad N_{\text{ekstr}} = -1,40 \text{ t}.$$

* Jeśli w konstrukcji (rys. 7.15a) siły $P_2, \dots, P_5$ tworzą układ samorównoważony w płaszczyźnie górnej tarczy, to na podstawie wspomnianej reguły jedynymi pracującymi elementami przy tym obciążeniu będą pręty i ściana tej tarczy.



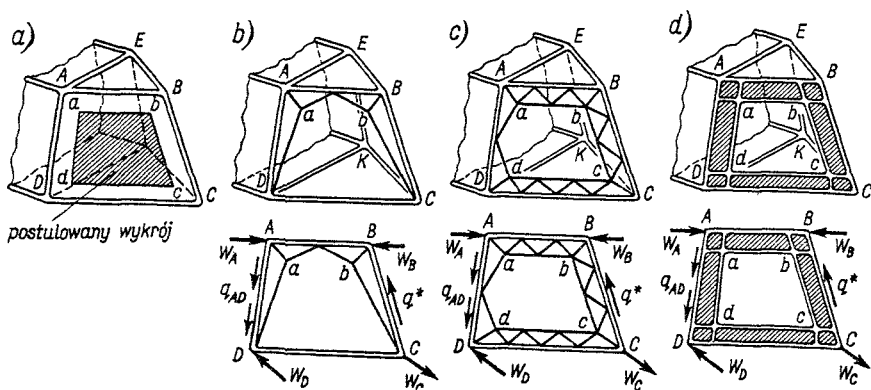
Rys. 7.18. Przykład liczbowy

a) szkic konstrukcji, ściana $ABCD$ prostopadła do $ABFE$; b) równoważna kratownica i określenie pola F (patrz art. 3.3); c) układ średnich wartości wydatków stycznych na poszczególnych ściankach.

7.6. Konstrukcyjne modyfikacje brył cienkościennych

Opisane przykładowo ustroje (rys. 7.15, 7.18) nie zawsze mogą znaleźć bezpośrednie zastosowanie w praktyce, głównie z powodu konieczności dokonywania różnych wykrojów uzasadnionych potrzebami użytkowymi, jak umieszczenie mechanizmów, dostęp do wnętrza itp. Spełnienie tych dodatkowych wymagań osiągamy przez modyfikację pierwotnego ustroju cienkościennej bryły. Modyfikacja ta polega na wprowadzeniu zamiast usuwanego elementu (z reguły ścianki) odpowiedniej konstrukcji zastępującej pod względem statycznym elementu usuwanego. Podobnie jak w kratownicach taką konstrukcję zastępczą będziemy nazywać konstrukcją wtórną.

Przypuśćmy na przykład, że w ustroju (rys. 7.15a) musimy ze względów konstrukcyjnych dokonać wykroju $abcd$ w ścianie $ABCD$ (rys. 7.19a) przy jednoczesnym zachowaniu



Rys. 7.19. Różne warianty modyfikacji ściany bryły z rys. 7.15

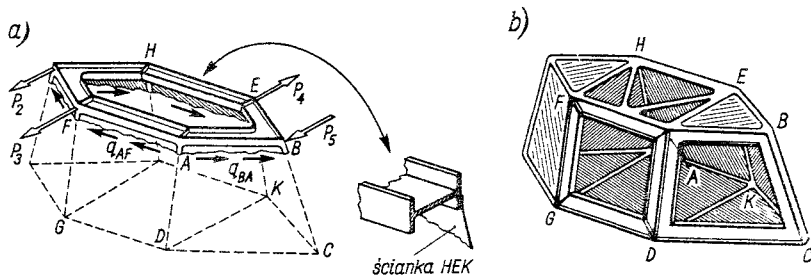
b) kratownica statycznie wyznaczalna; c) kratownica 2-krotnie statycznie niewyznaczalna; d) jednoobwodowa cienkościenna rama. Dolne partie rysunków b,c,d — układ oddziaływań na zmodyfikowaną ścianę.

postulatu, że ta konstrukcja musi pozostać zespołem sztywnym. Pełne wycięcie ścianki $ABCD$ nie wchodzi w rachubę, gdyż ustrój stałby się wtedy mechanizmem o 1 stopniu swobody. Z drugiej strony ścianka spełnia rolę przekątnego pręta usuwającego swobodę zmian odległości przeciwnych węzłów. Tę jej statyczną rolę można jednak zrealizować inaczej, a mianowicie bądź przez konstrukcję kratową (rys. 7.19 b, c), bądź przez ramę (rys. 7.19d). Rozróżnić należy przy tym wariant, w którym ta wtórna konstrukcja jest statycznie wyznaczalna (rys. 7.19b), od wariantu, gdy jest ona statycznie niewyznaczalna, np. 2-krotnie jak na rys. 7.19c. To samo dotyczy wprowadzenia wtórnej ramy, która może być 3-przegubowa i statycznie wyznaczalna (art. 5.2), bądź statycznie niewyznaczalna, jak na rys. 7.19d (patrz również art. 5.3). Ta statyczna niewyznaczalność wtórnej konstrukcji nie powoduje specjalnych komplikacji w analizie całości dopóty, dopóki modyfikacja pierwotnego ustroju dotyczy tylko jednej tarczy. Okazuje się bowiem, że podobnie jak w kratownicach (art. 4.2, rys. 4.5), *przesztywnienie jednej z tarcz nie wpływa na przebieg sił wewnętrznych w elementach (prętach szkieletu, ściankach) nie należących do tej przesztywnionej tarczy*. Wykorzystując tę regułę możemy analizę ustroju (rys. 7.15a), w którym zmodyfikowano ścianę $ABCD$ według jednego z wariantów (rys. 7.19), przeprowadzić tak, jak gdyby tej modyfikacji nie było, to znaczy w sposób opisany w art. 7.5 (patrz rys. 7.16). W wyniku tej analizy otrzymujemy siły w prętach (AF , GF , GD , AE itd.) i wydatki styczne w ściankach $AEHF$, $ADGF$ itd., na których wartość modyfikacja tarczy $ABCD$ w ogóle nie wpływa. Z analizy tej możemy również określić oddziaływanie, które wywiera reszta konstrukcji na wyizolowaną tarczę $ABOD$ i które nie zależy od tego jak zmodyfikowano tę tarczę. Tak na przykład wydatek styczny q_{AD} (rys. 7.19b) przedstawia oddziaływanie krawędzi AD ścianki $ADGF$ z rys. 7.16a, podczas gdy siła W_D jest wypadkową z sił działających w węźle D a pochodzących z oddziaływania pręta GD , DK oraz zewnętrznych sił R_1 i R_4 (rys. 7.15). Podobnie wydatek styczny q^* jest oddziaływaniem krawędzi BC ścianki $BCKE$, a siła W_C wypadkową z sił w węźle C pochodzących z oddziaływania pręta KC oraz zewnętrznych sił R_5 i R_2 (rys. 7.15) itd. Pewnym sprawdzianem prawidłowości określenia oddziaływań jest przy tym to, że układ tych oddziaływań musi być w równowadze, a ponadto, że każda z wypadkowych sił $W_A, \dots, W_D$ musi leżeć w płaszczyźnie tarczy $ABCD$.

Mając określone oddziaływania na zmodyfikowaną tarczę możemy przeprowadzić analizę sił wewnętrznych w jej elementach uwzględniając dopiero w tym momencie jej budowę. I tak, jeśli wtórna konstrukcja tarczy jest kratownicą statycznie wyznaczalną (rys. 7.19a), to siły w prętach określamy jedną z ogólnie znanych metod, np. Rittera. Jeśli kratownica jest statycznie niewyznaczalna, to wykorzystujemy metody opisane w rozdz. 4. Wreszcie gdy jest ona ramą, to niezbędne wskazówki można znaleźć w rozdz. 5.

Opisana metoda analizy może być bez żadnych istotnych zmian zastosowana w przypadku, gdy konstrukcyjnej modyfikacji w stosunku do pierwotnego ustroju podlega nie pojedyncza czworokątna tarcza, lecz tarcza złożona stanowiąca jeden płaski podzespół bryły. Przypuśćmy mianowicie, że w bryle (rys. 7.15a) dokonujemy dużego wykroju w górnej płaskiej tarczy, przy którym ulega usunięciu nie tylko ścianka $AEHF$, lecz również pręty AE i HF . Postulując jednocześnie zachowanie sztywności bryły musimy w zamian usuniętej tarczy wstawić równoważny jej statycznie ustrój na przykład w postaci

jednoobwodowej ramy (rys. 7.20a). Przy takiej modyfikacji siły wewnętrzne w elementach konstrukcji nie należących do górnej tarczy zostają takie same jak były w pierwotnym ustroju (rys. 7.15), gdyż i tutaj ma zastosowanie sformułowana poprzednio reguła. Analizę sił wewnętrznych w samej ramie (rozdz. 5) przeprowadzamy jak poprzednio, z tym tylko, iż obecnie układ oddziaływań reszty konstrukcji stanowią wydatki styczne wszystkich sześciu ścianek poboczniczy oraz obciążenia zewnętrzne $P_2, \dots, P_5$ działające w płaszczyźnie ramy*.



Rys. 7.20. Inne warianty modyfikacji bryły z rys. 7.15

Należy nadmienić, że podana metoda analizy może być rozszerzona na przypadek, gdy przekształconych konstrukcyjnie ścian jest więcej niż jedna, o ile tylko te *przekształcone ściany nie mają żadnych elementów wspólnych lub gdy tylko jedna z nich jest statycznie niewyznaczalna*. Ilustracją pierwszego wariantu byłby ustrój (rys. 7.20a), w którym przekształcono całą dolną tarczę $CDG \dots K$ także na jednoobwodową ramę. Metoda analizy w tym przypadku pozostałaby bez zmian, gdyż te obydwie tarcze nie mają żadnego elementu wspólnego**. Ilustrację drugiego wariantu stanowiłby ustrój (rys. 7.20b), w którym przekształceniu uległyby tarcze $ADGF$ i $AEHF$ przy pozostawieniu ściany $ABCD$ w postaci pierwotnej (rys. 7.15a) względnie przekształconej na ustrój statycznie wyznaczalny (rys. 7.19b). Inaczej jednak przedstawiać się będzie sytuacja, jeśli obydwie stykające się wzdłuż AD ściany $ADGF$ i $ABCD$ zostaną przekształcone na ramy jednoobwodowe, gdyż wtedy stan odkształceń jednej ramy wpływa na stan napięć w drugiej i na odwrot***.

Opisane modyfikacje tarcz powodują z reguły wzrost sił wewnętrznych w tych elementach. Wzrost ten nie jest specjalnie groźny, gdy wtórna konstrukcja jest kratownicą (rys. 7.19b), natomiast może się okazać znaczny, gdy wtórna konstrukcja jest ramą

* Uwzględniając warunek odnośnie sił $W_A, \dots, W_D$ (rys. 7.19b) widzimy, że oddziaływania prętów FG, AD itd. muszą być w węzłach ramy A, F itd. równe zeru.

** W szczególności przy tym siły w prętach takich jak GF, AD, BC itd. oraz ściankach poboczniczy można obliczyć, tak jak dla statycznie wyznaczalnego ustroju pierwotnego.

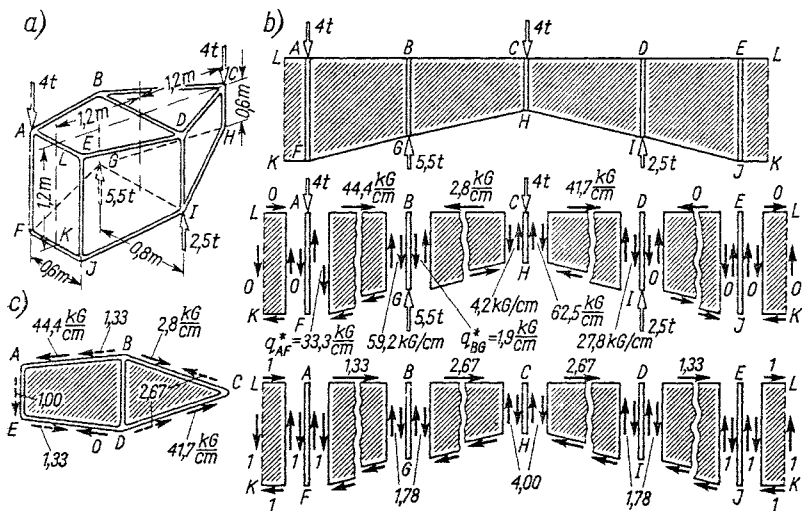
*** Zagadnienia tego rodzaju należą do bardziej złożonych i dlatego ich ścisła analiza została pominięta. Rozwiązanie przybliżone można uzyskać pomijając wpływ wzajemnego sprzężenia, tj. określając układ oddziaływań oddzielnie dla tarczy $ABCD$ i $ADGF$ tak, jak podano na rys. 7.19. Dla tak określonych układów obliczamy każdą z ram osobno.

(rys. 7.20). Pociąga to za sobą konieczność odpowiedniego zwymiarowania przekrojów prętów ramy i w konsekwencji zwiększa ciężar konstrukcji. Z tych powodów stosowanie wykrojów należy ograniczać do niezbędnego minimum.

7.7. Niektóre ułatwienia analizy cienkościennych brył

Metoda analizy wykorzystująca analogię między statyką cienkościenną bryły a przestrzenną kratownicą z płaskich ściankach pozwala rozwiązać wszystkie zagadnienia statyki takich brył. Nie oznacza to jednak, że we wszystkich zadaniach należy tę metodę stosować w całej rozciągłości. W szeregu bowiem przypadków wynik można otrzymać prościej, zachowując jedynie taką samą jak w kratownicach ideę rozwiązania.

Rozpatrzmy dla przykładu cienkościenną bryłę (rys. 7.21a), w której obie ściany ($A \dots E$) i ($F \dots J$) są płaskie, pręty $AF, \dots, EJ$ równoległe, a ściana $AEJF$ prostopadła



Rys. 7.21. Uproszczenie rozwiązania cienkościennej bryły półkorsupowej

a) szkic ustroju; b) rozwinięcie i statyka płaszcza gdy w myślowym rozcięciu $q_0 = 0$ oraz gdy $q_0 = 1 \text{ kg/cm}$; c) układ oddziaływany obu stanów obciążeń z rys. b na tarczę $A, \dots, E$. Strzałki przerywane odpowiadają przypadkowi $q_0 = 1 \text{ kg/cm}$.

do ściany $ABCDE$. Taka bryła stanowi analogię do kratownicy (rys. 3.15), w której pięciokątne tarcze pełnią rolę ścian głównych, reszta zaś elementów, jak pręty $AF, \dots$, ścianka $AEJF$ itd. pełni rolę prętów kratownicy wiążących te ściany główne. Przypomnijmy sobie teraz, że zasadnicza idea rozwiązania takiej kratownicy polegała na wyznaczeniu w pierwszym rzędzie sił w układzie prętów wiążących ściany główne. Transponując tę ideę na rozpatrywany obecnie przypadek spróbujmy wyznaczyć siły wewnętrzne w prętach i ściankach płaszcza wiążącego pięciokątne tarcze. W tym celu izolujemy płaszczyz od obydwóch tarcz, rozcinamy go myślowo wzdłuż linii KL i rozwijamy na płaszczyźnie

rysunku (rys. 7.21b), przenosząc przy tym wszystkie siły działające wzdłuż prętów tego płaszcza. Zachowując znowu tę samą ideę rozwiązania zakładamy z początku, że w myślowym rozcięciu KL nie działa żaden wydatek styczny, co odpowiada temu etapowi rozwiązania kratownicy (rys. 3.15 i 3.16), gdy w przecię (2' 3) nie działa żadna siła. Wykorzystując równania równowagi prętów oraz zależności (7.2) możemy wyznaczyć kolejno wydatki styczne. I tak dla pręta AF mamy wydatek

$$q_{AF}^* = 4000/120 = 33,3 \text{ kG/cm},$$

a na przeciwległym boku ścianki trapezowej $ABGF$ wydatek wg wzoru 7.2

$$q_{BG} = q_{AF}^* (l_{AF}/l_{BG})^2 = 33,3 (120/90)^2 = 59,2 \text{ kG/cm},$$

gdyż stosunek odległości $b_1/b_2 = l_{BG}/l_{AF}$ (rys. 7.5c). Pisząc z kolei równanie równowagi pręta BG mamy

$$q_{BG}^* = (5500/90) - q_{BG} = 1,9 \text{ kG/cm},$$

a na przeciwległym boku ścianki $BGHC$

$$q_{CH} = q_{BG}^* (l_{BG}/l_{CH})^2 = 1,9 (90/60)^2 = 4,2 \text{ kG/cm itd.}$$

Podobnie wykorzystując zależności (7.1) wyznaczamy średnie wartości wydatków stycznych na bokach AB , BC , FG , IJ stykających się z tarczami głównymi. I tak na boku AB mamy

$$q_{AB} = q_{AF}^* F_{AFG}/F_{ABG} = q_{AF}^* l_{AF}/l_{BG} = 33,3 \cdot 120/90 = 44,4 \text{ kG/cm},$$

a na boku BC

$$q_{BC} = q_{BG}^* F_{BGH}/F_{BCH} = q_{BG}^* l_{BG}/l_{CH} = 1,9 \cdot 90/60 = 2,8 \text{ kG/cm itd.}$$

W identyczny sposób wyznaczamy układ wydatków stycznych, gdy w myślowym rozcięciu KL założymy wydatek styczny $q_0 = 1 \text{ kG/cm}$, otrzymując ich obraz taki jak na dolnym rys. 7.21b. Nanosząc teraz układy obu oddziaływań na rysunek głównej tarczy (rys. 7.21c) formułujemy stąd równanie równowagi momentów względem obranego punktu O przy założeniu, iż w myślowym rozcięciu KL działa nie wydatek jednostkowy, lecz X -krotnie większy. W rezultacie mamy zależność

$$m_q X + M_q = 0, \quad (7.8)$$

w której m_q — jest momentem względem punktu O wydatków pochodzących od $q_0 = 1 \text{ kG/cm}$, a M_q — momentem względem tegoż punktu od pierwszego układu wydatków, gdy w myślowym przecięciu KL nie ma żadnego wydatku w omawianym przykładzie liczbowym, gdy za punkt O obierzemy punkt B , to $m_q = 1,00 \cdot 2F_{ABE} + 1,33 \cdot 2F_{EBD} + 2,67 \cdot 2F_{DBC} = 45\,600 \text{ kGcm/kG/cm}$, a moment $M_q = 41,7 \cdot 2F_{DBC} = 400\,000 \text{ kG/cm}$, skąd według (7.8)

$$X = -8,8 \text{ kG/cm}.$$

Znajomość wydatku X działającego w myślowym rozcięciu KL daje możliwość wyznaczenia drogą superpozycji obu stanów z rys. 7.21b ostatecznego układu wydatków w płasz-

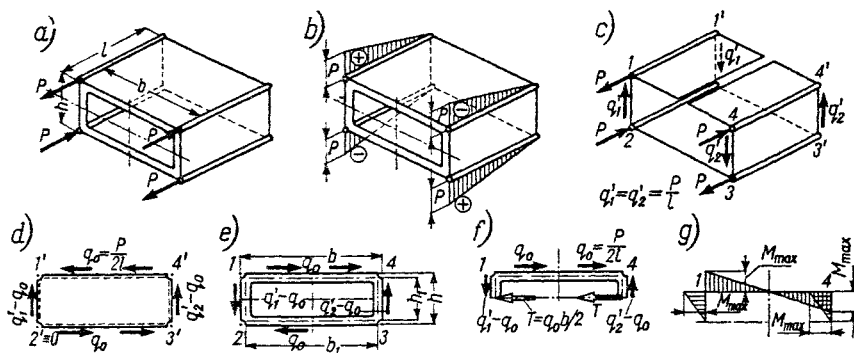
czu łączącym obie tarcze główne. Tak na przykład średnie wartości wydatków na krawędziach ścianki $CDIH$ są odpowiednio

$$q_{CH} = 62,5 + 4,00(-8,8) = 27,4 \text{ kG/cm}, \quad q_{DI} = 12,2 \text{ kG/cm}, \quad q_{CD} = q_{HI} = 18,3 \text{ kG/cm}.$$

Podobnie można określić ostateczny układ oddziaływań na główne tarcze* i w konsekwencji obliczyć w nich siły wewnętrzne (art. 7.3). Tak więc zgodnie z zamierzeniem rozwiązaliśmy cienkościenne bryłę nie uciekając się do pełnego wykorzystania analogii między bryłą a kratownicą. Jak widać przy tym podany tutaj sposób jest znacznie prostszy niż opisany w art. 7.5, gdyż unika się przy nim wielu dodatkowych operacji, jak wyznaczania sił w równoważnych prętach itp.

Podany sposób można stosować i w wielu innych przypadkach i to zarówno wtedy, gdy ustrój jest w postaci klasycznej (rys. 7.15), jak i wtedy, gdy niektóre ściany są konstrukcyjnie zmodyfikowane. W szczególności metodą tą należy posługiwać się, gdy równoważna danej bryle kratownica należy do typu kratownicy o budowie mieszanej bądź kratownicy nabudowanych na podłożu zewnętrznym (art. 3.6).

Przykład. Wyznaczyć siły wewnętrzne w półkorupowej skrzynkowej bryle (rys. 7.22) z jednym zębem ramowym, drugim zaś w postaci pełnej ściany.



Rys. 7.22. Przykład analizy konstrukcji półkorupowej

a) układ obciążeń; b) przebieg sił w pasach; c) statyka pokrycia; d), e) statyka żeber; f) analiza żebra ramowego; g) wykres M_g dla połówki żebra ramowego.

Rozwiązanie. Przebieg sił w pasach otrzymujemy od razu zauważając, że na jednym końcu muszą one być równe siłom obciążającym P , na drugim zaś równe zero (rys. 7.22b). Pierwszy etap wyznaczenia wydatków przy założeniu myślowego przecięcia w ścianie ($1'1'4'$) płaszcza (rys. 7.22c) daje w wyniku ich wartości $q_1' = q_2' = P/l$. W etapie drugim zakładamy, że w myślowym przecięciu działa wydatek q_0 , który jak łatwo sprawdzić (rys. 7.21b) wywołuje w każdej ze ścianek taki sam wydatek q_0 . Ostateczny układ oddziaływań na zęba (1234) i ($1'2'3'4'$) podają rys. 7.22d, e, przy czym wartość wydatku q_0 określamy z równania równowagi momentów względem punktu O ułożsamionego z narożnikiem $2'$. Z równania tego mamy $q_0 = P/2l$. Stan napięć w ścianie ($1'2'3'4'$) jest w rezultacie stanem czystego ścinania wydatkami $q_0 = 0,5q_1' = 0,5q_2'$. Zębro przednie jest jednoobwodową ramą, której

* Zaleca się Czytelnikowi sprawdzenie, że ostateczny układ oddziaływań płaszcza na tarczę spełnia wszystkie warunki równowagi.

rozwiązanie (rys. 7.22e, f) nie wymaga układania równań Maxwella — Mohra (patrz rys. 1.19). Maksymalne momenty gnące (rys. 7.22g) występują w narożach i mają wartość

$$M_{\max} \approx Pb_1 h_1 / 8l$$

mniejszą od $Th/2$. Wynika to stąd, iż osie prętów ramy mają długości $b_1 < b$ i $h_1 < h$, wskutek czego są one odciążone przez wydatki styczne działające na zewnętrznym obwodzie ramy.

7.8. Podstawowe ustroje ze ściankami zakrzywionymi

Poza omówionymi dotychczas ustrojami, w których ścianki były płaskie, równie często stosujemy konstrukcje, w których ścianki łączące pręty szkieletu są zakrzywione. Pręty te, przynajmniej niektóre, muszą być przy tym też zakrzywione lub zastąpione wtórnymi konstrukcjami w postaci tarcz lub ram (rys. 7.1b). Analizę tego rodzaju ustrojów, gdy wszystkie gabarytowe wymiary są tego samego rzędu prowadzimy przy upraszczającym założeniu, iż oddziaływania zakrzywionych ścianek na pręty szkieletu mają postać wyłącznie wydatków stycznych q . Drugą funkcję ścianek, tj. współpracę z prętami szkieletu przy przenoszeniu sił wzdłużnych przez te pręty, uwzględniamy zwiększając przekroje samych prętów. Należy jednak przy tym zwrócić uwagę, że ta współpraca nie zawsze jest tak efektywna, jak w przypadku ścianek płaskich. Jeśli mianowicie ścianka jest lekko stożkowa lub cylindryczna (dolny rys. 7.1b), to współpraca z wręgami w kierunku obwodowym jest mała. Wyrażając tę współpracę przez szerokość współpracującą b_e (rys. 7.1a) możemy w przybliżeniu podać, że

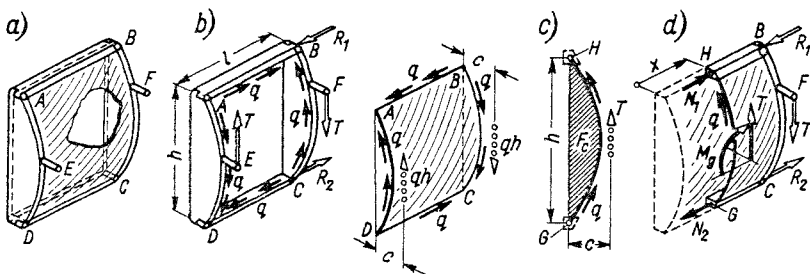
$$b_e \approx \sqrt{\rho \delta}, \quad (a)$$

przy czym ρ jest promieniem krzywizny w przekroju prostokątnym do tworzących ścianki, a δ jej grubością. W kierunku natomiast tworzących współpraca zakrzywionej ścianki nieczym praktycznie nie różni się od współpracy ścianki płaskiej i może być ujęta tymi samymi zależnościami (art. 7.1). Ta sama uwaga dotyczy możliwości wprowadzania fikcyjnych prętów w kierunku wzdłuż tworzących (rys. 7.3). W kierunku obwodowym liczbę usztywnień zostawiamy równą liczbie rzeczywiście istniejących elementów.

W celu uproszczenia rozważań ograniczymy się tylko do przypadku, gdy zakrzywione ścianki są cylindryczne lub lekko stożkowe. Rozważania te rozpoczniemy od analizy 4-przegubowego ustroju z jedną zakrzywioną ścianką (rys. 7.23a) stanowiącego odpowiednik najprostszej tarczy (rys. 7.4). Po rozdzieleniu ustroju na szkielet i ściankę (rys. 7.23b) widzimy, iż przy poczynionych założeniach stan napięć w ściance nieczym nie różni się od rozpatrzonego w art. 6.2 (rys. 6.4). Wynika stąd, że w przekrojach poprzecznych AD , BC wypadkowa wydatków stycznych jest qh i działa w odległości $c = 2F_c \cdot h$. Rysując następnie oddziaływania ścianki na szkielet widzimy, że do utrzymania tego szkieletu w równowadze należy przyłożyć do prętów AB i DC siły $R_1 = R_2 = ql$, a do żeber AD i BC siły $T = qh$ równoległe do cięciw AD i BC . Odległość tych sił od cięciw nie jest przy tym dowolna, lecz musi być równa określonej poprzednio* odległości c , gdyż inaczej

* Należy tu zwrócić uwagę, że odległość c mierzona jest od cięciwy łączącej środki ciężkości G i H prętów AB i CD (rys. 7.23c), a pole F_c jest ograniczone tą cięciwą i ścianką.

żeбра AD i BC nie byłyby w równowadze. Wyznaczony w ten sposób układ sił wewnętrznych i zewnętrznych* jest jedynym możliwym, przy którym rozpatrywany ustrój nie stanie się pseudomechanizmem. Gdyby bowiem siły T były na żebrach AD i BC przyłożone w odległości $c' \neq c$, to poza wyznaczonymi siłami wewnętrznymi wystąpiłoby skręcanie ustroju momentem $T(c' - c)$. Ten moment jednak wywołałby ogromne naprężenia i odkształcenia,



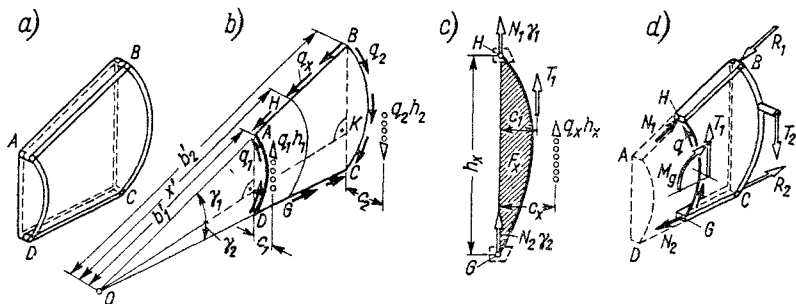
Rys. 7.23. Analiza 4-przegubowego ustroju z ścianką cylindryczną

a) szkic ustroju; b) układ oddziaływań i obciążeń; c) określenie odległości c , punkty $G1H$ – środki ciężkości przekrojów pasów; d) – zastosowanie metody przekrojów.

gdyż zachodziłoby wtedy swobodne skręcanie konstrukcji o przekroju otwartym (patrz art. 6.3).

Opisana metoda rozwiązywania stanowi odpowiednik przedstawionej w art. 7.3 metody elementów. Równolegle do niej możemy zastosować metodę przekrojów (rys. 7.23d), polegającą na myślowym rozcięciu ustroju. Po odrzuceniu jednej z części, np. lewej, określamy dla pozostawionej reszty wypadkowe obciążenie $M_g = Tx$ i T' pochodzące z oddziaływania części odrzuconej. Rozkładając następnie to obciążenie na siły wewnętrzne otrzymujemy siły $N_1 = N_2 = M_g/h$ w pasach i wydatek styczny $q = T/h$ w ścianie.

Analogiczne rozważanie możemy przeprowadzić dla przypadku 4-przegubowego ustroju ze ścianką stożkową (rys. 7.24). Przy poczynionych założeniach odnośnie oddziaływań



Rys. 7.24. Analiza 4-przegubowego ustroju z ścianką stożkową

a) szkic ustroju; b) statyka ścianki; c) określenie odległości c_x i układ sił poprzecznych w tym przekroju; d) układ sił wewnętrznych i wypadkowe obciążenie w przekroju GH .

* Punkty przyłożenia sił R_1 i R_2 na pasach wzdłużnych AB i CD nie muszą się pokrywać z punktami B i C . Tak na przykład siłę R_1 można równie dobrze przyłożyć w punkcie A . To samo dotyczy punktów E i F przyłożenia sił T , które można przesuwając równolegle do cięciwy AD i BC .

między prętami szkieletu a ścianką widzimy, że układ obciążeń krawędzi ścianki jest prawie identyczny z rozpatrzonym poprzednio przypadkiem dla płaskiej ścianki trapezowej (rys. 7.5c). Jedyna różnica wynikająca z zakrzywienia ścianki znika całkowicie, jeśli rozpatrywać rzut ścianki stożkowej na płaszczyznę $OABCD$. Statyka tego rzutu niczym nie różni się od podanej na rys. 7.5c, skąd wynika, że wzór (7.2) nadal zachowuje swą ważność, tj.

$$q_1 b_1^2 = q_x x^2 = q_2 b_2^2 = \text{const.} \quad (a)$$

Podobnie bez zmian zostają zależności określające średnią wartość wydatku q_3 na krawędzi AB i q_4 na CD , a mianowicie

$$q_3 = q_4 = q_1 h_1 / h_2 = q_2 h_2 / h_1, \quad (b)$$

przy czym h_1 , h_2 są odpowiednio długościami cięciw AD i BC . Jedyna różnica występuje dopiero wtedy, gdy rozpatrujemy położenie wypadkowych sił $q_1 h_1$ i $q_2 h_2$ w przekrojach poprzecznych. Wypadkowe te są odsunięte od płaszczyzny $OABCD$ odpowiednio o

$$c_1 = 2F_1/h_1, \quad c_2 = 2F_2/h_2, \quad (c)$$

a w przekroju pośrednim (rys. 7.24c) o

$$c_x = 2F_x/h_x, \quad (d)$$

gdzie F_1 , F_2 , F_x są polami powierzchni zawartej w przekroju poprzecznym między odpowiednią cięciwą a samą ścianką. Z przeprowadzonej analizy wynika, że między konstrukcjami z cylindryczną i stożkową ścianką istnieje pewne podobieństwo w układzie sił wewnętrznych i obciążeń. Istnieją jednak i różnice. Pierwsza z nich polega na tym, że wypadkowe obciążenia T_1 i T_2 żeber AD i BC muszą być przyłożone w różnych odległościach, tj. c_1 , c_2 . Ponadto, jak łatwo sprawdzić siły T_1 i T_2 nie są sobie równe, a ich różnicę pokrywają odpowiednie składowe siły R_1 i R_2 (rys. 7.24d) utrzymujących w równowadze wzdłużne pasy AB i CD . Samo obliczenie sił wewnętrznych przeprowadzamy metodą przekrojów. Jeśli mianowicie na zebro AD działa siła T_1 , to w przekroju GH (rys. 7.24c, d) odległym od AD o x_{GH} wypadkowe obciążenie jest $M_g = T_1 x_{GH}$ i T_1 rozkłada się na siły N_1 i N_2 i wydatek q_x . Jeśli ponadto założymy, że kąty γ_1 i γ_2 nachylenia pasów do prostej OK są małe, to podobnie jak dla tarczy trapezowej mamy

$$N_1 \approx N_2 \approx M_g/h_x, \quad (e)$$

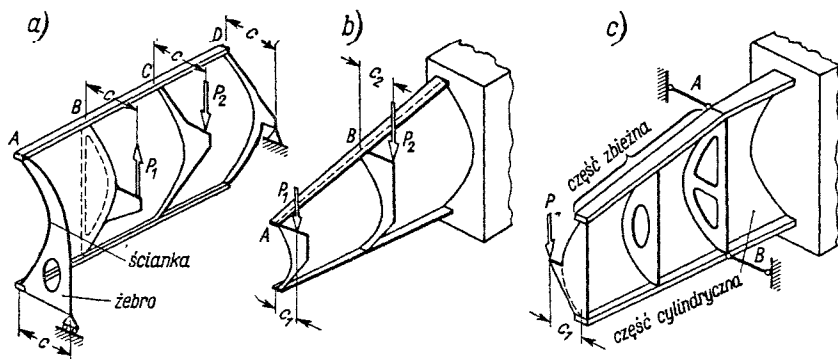
a wydatek styczny q_x określamy z zależności

$$q_x h_x = T_1 - (M_g/h_x)(\gamma_1 + \gamma_2) = T_1 b'_1/x', \quad (f)$$

do której oznaczenia są podane na rys. 7.24b, c.

Przeanalizowane ustroje mogą stanowić punkt wyjścia do tworzenia bardziej złożonych konstrukcji, w których te ustroje połączone szeregowo tworzą tzw. dźwigar (rys. 7.25a). W odróżnieniu jednak od belek tarczowych swoboda kształtowania tych dźwigarów jako samodzielnych konstrukcji jest znacznie bardziej ograniczona. Jeśli bowiem chcemy, aby taki dźwigar przy działaniu obciążeń poprzecznych był sztywny na całej swej długości, to nie dość jest zażądać, aby pasy wzdłużne leżały w jednej płaszczyźnie. Warunkiem dodatkowym jest, aby odległość c w każdym przekroju poprzecznym była ta sama lub

zmieniała się liniowo wzdłuż osi dźwigara. Obydwa te warunki są spełnione tylko dla dźwigarów o prostych pasach równoległych lub zbieżnych (rys. 7.25b). Inne dźwigary jak na przykład dźwigar (rys. 7.25c), którego pasy są na części długości równoległe, na części zaś zbieżne nie spełnia warunku dodatkowego. Jego prawidłowe działanie możliwe jest tylko, gdy w miejscu załomu dodać przestrzenne podparcie, np. w postaci prętów A i B .



Rys. 7.25. Dźwigary 2-pasowe o ściance zakrzywionej

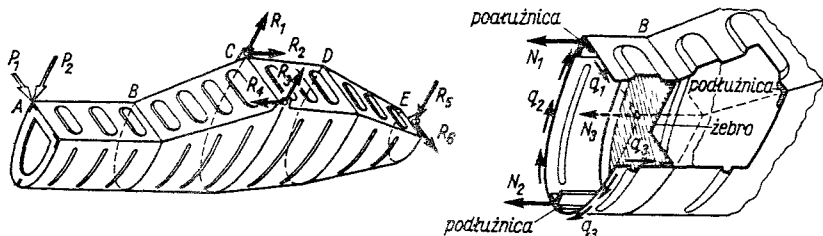
a, b) dźwigary o pasach prostych prawidłowe pod względem ich budowy; c) dźwigar o pasach łamanych, prawidłowy przy istnieniu dodatkowego podparcia.

Obliczenie sił wewnętrznych w takich dźwigarach, jeśli spełniają one oba warunki prawidłowej ich budowy, przeprowadzamy metodą przekrojów (rys. 7.23d i 7.24c), przy czym wypadkowe obciążenie M_g i T obliczamy tak jak w zwykłych belkach. Statykę żeber wprowadzających obciążenia poprzeczne wyznaczamy według wskazówek art. 6.13.

7.9. Statyka 3-pasowego dźwigara rurowego

Szczególne warunki, jakim musi odpowiadać ukształtowanie dźwigara 2-pasowego oraz układ obciążeń powodują, że konstrukcja ta nie ma praktycznego znaczenia. Aby sprostać użytkowym wymaganiom, a w szczególności umożliwić przeniesienie przez ustrój dowolnego obciążenia przestrzennego należy zastosować inne ustroje. Najprostszym z nich jest tzw. dźwigar (rys. 7.26), w którym trzy podłużnice połączone są trzema ściankami (zakrzywionymi lub płaskimi) tak, że w rezultacie tworzą one rurę. Dla utrzymania kształtu poprzecznego ten płaszczyznowy wzmacniacz jest poprzecznymi równoległymi do siebie żebrami niezbędnymi zwłaszcza w miejscach załomu podłużnic. Jeśli na dodatek ścianki mają poprzeczne przetłoczenia, to taka konstrukcja może być z bardzo dużą dokładnością sprowadzona do modelu półkorupowego. Sztywność bowiem takich ścianek na rozciąganie w kierunku wzdłużnym jest pomijalna, natomiast sztywność na ścinanie nie ulega istotnym zmianom w porównaniu ze ściankami bez przetłoczeń. W wyniku tego otrzymujemy, że w przekroju poprzecznym jedynymi siłami wewnętrznymi, jakie mogą zaistnieć, są siły N_1, N_2, N_3 w podłużnicach (pasach) i trzy wydatki styczne q_1, q_2, q_3 w ścian-

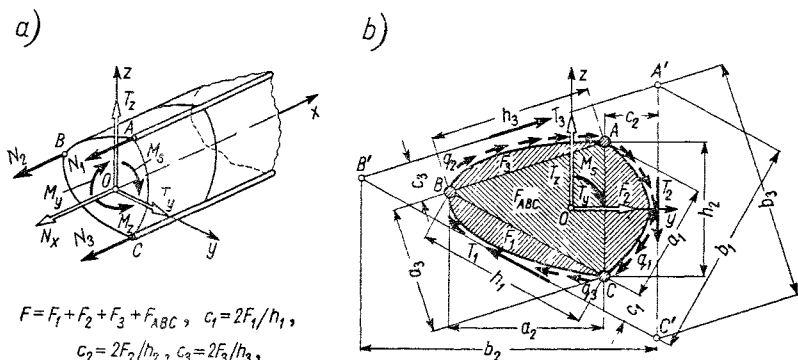
kach. Zauważmy teraz, że przy dowolnym przestrzennym obciążeniu ustroju w badanym przekroju poprzecznym występuje sześć niezależnych składowych tego obciążenia: trzy składowe siły i trzy składowe momenty. Wynika stąd, że przedstawiona konstrukcja jest statycznie wyznaczalna, albowiem liczba równań równoważności, które możemy ułożyć



Rys. 7.26. 3-pasowy dźwigar półskorupowy

jest równa liczbie niewiadomych sił wewnętrznych. W zasadzie zatem rozwiązanie przedstawionego ustroju sprowadza się do określenia wypadkowego obciążenia w danym przekroju, a następnie do rozłożenia go na sześć sił wewnętrznych.

W przypadku dźwigara, który w danym przekroju ma pasy równoległe (rys. 7.27), określenie sił wewnętrznych przebiega następująco. Po poprowadzeniu myślowego rozcięcia dźwigara i zredukowaniu wszystkich obciążeń z jednej części dźwigara do obranego punktu O badanego przekroju otrzymujemy



Rys. 7.27. Statyka 3-pasowego dźwigara przyzmatycznego
a) układ obciążeń w badanym przekroju; b) określenie wydatków stycznych.

trzy składowe siły N_x , T_y i T_z oraz trzy składowe momenty M_y , M_z i M_x (rys. 7.27a). Siły wewnętrzne N_1 , N_2 i N_3 w pasach A , B i C wyznaczamy z równań równoważności momentów względem odpowiednich prostych BC , AC i AB . Tak na przykład dla pasa A mamy

$$N_1 a_1 = N_x d_{BC} - M_y \cos \alpha_{BC} - M_z \sin \alpha_{BC}, \quad (a)$$

gdzie

α_{BC} — kąt między osią y a prostą BC ,

d_{BC} — odległość punktu O od prostej BC .

Analogicznie dla pasa B przy założeniu, że oś z jest równoległa do AC mamy

$$N_2 a_2 = N_x d_{AC} + M_z, \quad (b)$$

gdzie d_{AC} jest odległością punktu O od prostej AC . Wyznaczywszy podobnie N_3 przechodzimy do obliczenia wydatków q_1, q_2, q_3 (rys. 7.27b). W tym celu obliczamy najpierw wypadkowe siły $T_1 = q_1 h_1$, $T_2 = q_2 h_2$, $T_3 = q_3 h_3$ z równań równoważności momentów względem osi równoległych do osi x i przechodzących przez punkty A', B', C' . Jeśli względem tych punktów wypadkowe momenty od M_s, T_y i T_z są odpowiednio M'_A, M'_B, M'_C , to

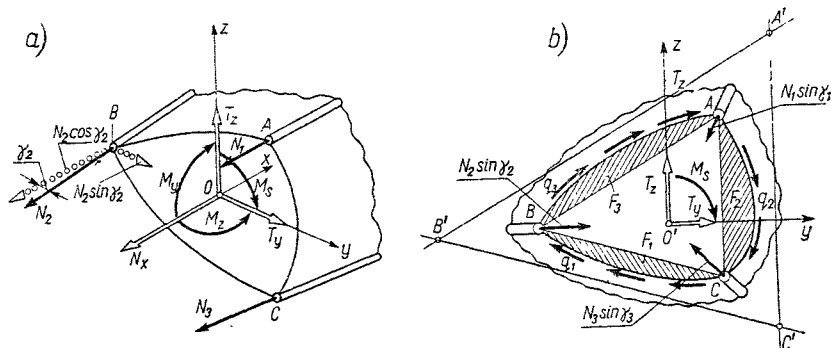
$$T_1 = M'_A/b_1, \quad T_2 = M'_B/b_2, \quad T_3 = M'_C/b_3, \quad (c)$$

przy czym M'_A, M'_B, M'_C uważamy za dodatnie, gdy zwrot ich jest zgodny z ruchem zegara. Mając siły T_1, T_2, T_3 możemy obliczyć q_1, q_2, q_3 , przy czym należy zauważyć, że $b_1 h_1 = b_2 h_2 = b_3 h_3 = 2F$, skąd

$$q_1 = M'_A/2F, \quad q_2 = M'_B/2F, \quad q_3 = M'_C/2F, \quad (d)$$

a dodatnie ich zwroty są takie jak podaje rys. 7.27b. W przypadku gdy $T_y = T_z = 0$, a $M_s \neq 0$, mamy wzór Bredta (patrz art. 6.2).

W przypadku dźwigara o pasach lekko nierównoległych* (rys. 7.28a) siły N_1, N_2, N_3 określa się z tych samych zależności, co i poprzednio, gdyż z założenia kąty $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ między normalną do przekroju a osiami pasów są małe, tak że $\cos \gamma_1 \approx \cos \gamma_2 \approx \cos \gamma_3 \approx 1$. Obliczając natomiast wydatki q_1, q_2, q_3



Rys. 7.28. Statyka 3-pasowego dźwigara o pasach zbieżnych

a) układ obciążeń w badanym przekroju i układ sił w pasach; b) układ sił w płaszczyźnie przekroju.

należy przy formułowaniu równań równoważności uwzględnić składowe siły $N_1 \sin \gamma_1 \approx N_1 \gamma_1, N_2 \sin \gamma_2 \approx N_2 \gamma_2, N_3 \sin \gamma_3 \approx N_3 \gamma_3$. Jeśli na przykład powyższe siły dają względem punktu A' moment zgodny z ruchem wskazówek zegara o wartości M_A^* , to odpowiedni warunek równoważności brzmi

$$q_1 h_1 b_1 + M_A^* = M'_A, \quad (e)$$

gdzie M'_A jest nadal wypadkowym momentem od M_s, T_y i T_z względem tegoż punktu A' . Uwzględniając, że $b_1 h_1 = 2F$, mamy zamiast pierwszego z wzorów (c)

$$q_1 = (M'_A - M_A^*)/2F \quad (f)$$

i analogicznie

$$q_2 = (M'_B - M_B^*)/2F, \quad q_3 = (M'_C - M_C^*)/2F, \quad (g)$$

gdzie wszystkie wielkości geometryczne są tak samo oznaczone jak dla dźwigara o pasach równoległych (rys. 7.27b). Jak widać w porównaniu z przypadkiem poprzednim (rys. 7.27) wpływ nierównoległości pasów przejawia się w zmianie wydatków stycznych. Zmiana ta może być dość znaczna na skutek tego, że składowe $N_i \gamma_i$ mogą być tego samego rzędu co i siły T_y i T_z .

* Niekoniecznie jednak zbieżnych na jeden punkt (patrz odcinek BC na rys. 7.26).

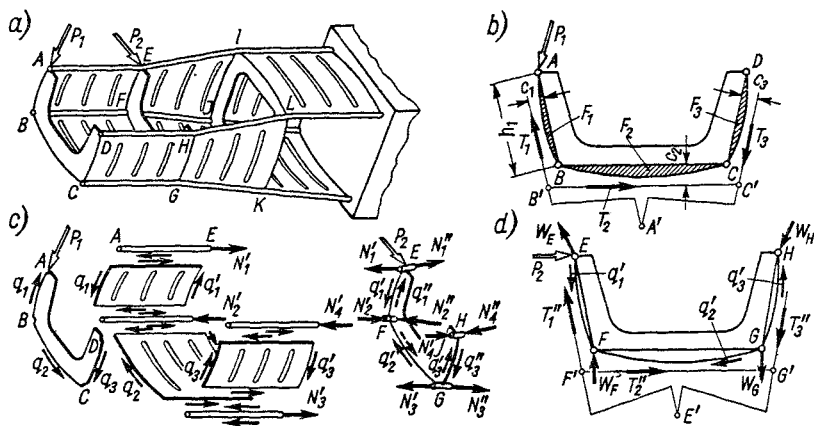
Określenie układu sił oddziałujących na żebra i samo ich rozwiązanie jest zagadnieniem identycznym z opisanym szczegółowo w art. 6.13. Na specjalną uwagę zasługuje przy tym zbadanie statyki żebier wbudowanych w miejscu załomów podłużnic, gdzie mogą wystąpić znaczne siły skupione (patrz rys. 6.43).

Przemieszczenia rozważanych konstrukcji wyznaczamy nadal ze wzorów (7.5) według tego samego co poprzednio schematu. Należy jedynie pamiętać, że we wzorze (7.5b) F_p oznacza tym razem powierzchnię ścianki niekoniecznie płaskiej.

Podane tu rozwiązanie dla 3-pasowych półskorupowych konstrukcji jest identyczne z wynikami, które otrzymalibyśmy stosując opisany w rozdz. 6 model pręta 3-pasowego. W porównaniu jednak z tamtym sposobem obecna metoda ma tę wyższość, że nie wymaga znajomości przekrojów pasów, obliczania środka ciężkości, momentów bezwładności itd. Ponadto pozwala ona bez żadnych prób dobrać właściwie wymiary elementów stosownie do działających w nich sił wewnętrznych i dlatego zaleca się jej stosowanie.

7.10. Inne półskorupowe dźwigary statycznie wyznaczalne

Poza dźwigarem 3-pasowym (art. 7.9) spotykamy i inne dźwigary, w których siły wewnętrzne możemy wyznaczyć z samych tylko równań statyki. Wspólną cechą tych innych dźwigarów jest to, że mają one w każdym poprzecznym przekroju tylko trzy ścianki. Rozwiązanie tych ustrojów jest w ogólnym przypadku możliwe tylko metodą elementów.



Rys. 7.29. Analiza wspornikowego 4-pasowego dźwigara otwartego

a) szkic konstrukcji; ścianki z przetłoczeniami poprzecznymi pracują tylko na ścinanie; b) statyka żebier; c) układ sił wewnętrznych w konstrukcji rozłożonej na elementy składowe.

Rozpoczynając od najbardziej typowego przypadku, a mianowicie 4-pasowego dźwigara wspornikowego (rys. 7.29a) wytnijmy myślowo żebro $ABCD$ (rys. 7.29c, b). Określenie oddziaływań na to żebro sprowadza się do wyznaczenia trzech wydatków stycznych q_1, q_2, q_3 . Mamy tu więc pewien wariant rozpatrzonego już zagadnienia (rys. 7.27). Tak

na przykład wydatek $q_1 = T_1/h_1$ wyznaczamy z warunku równowagi momentów względem punktu C'

$$q_1 = M'_C/b_1 h_1, \quad (a)$$

gdzie M'_C jest momentem względem punktu C' obciążenia działającego na żebro, tj. siły P_1 , a b_1 — odległością linii działania siły T_1 od punktu C' (porównaj rys. 7.27). Analogicznie wyznaczone wydatki q_2 i q_3 pozwalają z kolei obliczyć wydatki styczne na pozostałych krawędziach trzech ścianek odcinka między żebrem $ABCD$ i $EFGH$ po rozłożeniu tego odcinka na składowe elementy (art. 7.8, rys. 7.23 i 7.24), a następnie siły w pasach*. Przechodząc teraz do określenia równowagi żebra $EFGH$ (rys. 7.29c) po jego myślowym wycięciu z ustroju, mamy do wyznaczenia znowu trzy wydatki q'_1, q'_2, q'_3 . Obciążenie żebra (rys. 7.29d) stanowią przy tym znane już wydatki q'_1, q'_2, q'_3 , obciążenia zewnętrzne, tj. siła P_2 , oraz siły $W_E, \dots, W_H$ wynikające z załomu pasów. Wartości tych ostatnich obciążeń otrzymujemy z analizy równowagi każdego z węzłów E, F, G, H żebra. Jeśli mianowicie pas AEI jest łagodnie załamany w punkcie E , to z wystarczającą dokładnością możemy powiedzieć, iż $N'_1 = N''_1$ (warunek równowagi rzutów na normalną do żebra). Siły te jednak dają wypadkową W_E , która może w istotny sposób wpływać na równowagę żebra. Jej wartość

$$W_E \approx N'_1(\gamma'_1 - \gamma''_1), \quad (a)$$

zależy od niewielkich z założenia kątów γ'_1 i γ''_1 , jakie odpowiednio tworzą pasy AE i EI z normalną do żebra $EFGH$, a jej linia działania jest krawędzią przecięcia płaszczyzny załamanego pasa AEI z płaszczyzną żebra. Podobnie określamy pozostałe siły W_F, W_G i W_H , o ile oczywiście odpowiednie pasy są załamane. Mając całkowity układ obciążeń obliczamy jak dla żebra $ABCD$ wartości sił T'_1, T'_2, T'_3 , a następnie wydatki q'_1, q'_2, q'_3 .

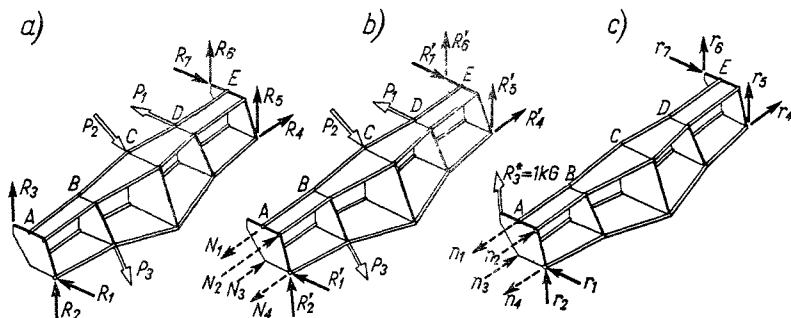
Powtarzając opisane czynności dla następnych odcinków ustroju i następnych żebier możemy rozwiązać całą konstrukcję. Dla żebra $IJKL$, w którego płaszczyźnie zachodzi zmiana ustawienia ścianek w dwóch sąsiadujących odcinkach dźwigara, metoda analizy zostaje bez zmian, z tym tylko, że z jednej jego strony wydatki styczne działają na bokach IJ, JK i KL , a z drugiej strony na bokach IL, IJ i JK .

Podany sposób rozwiązania dowodzi, że rozpatrywany dźwigar jest ustrojem statycznie wyznaczalnym, do którego unieruchomienia należy w przekroju oporowym zużyć 7 więzów (4 siły w pasach i 3 wydatki styczne). Wynika stąd, że konstrukcja ta jest sama w sobie jednokrotnie niesztynna i gdyby podeprzeć ją tylko 6 więzami, to byłaby ona mechanizmem. Mamy tu pełną analogię do kratownie nabudowanych na podłożu (art. 3.6) z wynikającymi stąd wszystkimi wnioskami, przypomnienie których zaleca się czytelnikowi.

Zachowując podstawowy warunek istnienia 7 więzów (reakcji), możemy unieruchomić 4-pasowy dźwigar w inny sposób, na przykład taki, jak pokazuje rys. 7.30a. Rozwiązanie

* Tak na przykład, gdy ten odcinek dźwigara jest przyzmatyczny, to zgodnie z rys. 7.23b wydatki styczne na wszystkich krawędziach ścianki $ABFE$ są stałe i równe q_1 , a siła w pasie AE jest liniowo zmienna od zera w punkcie A do $N'_1 = q_1 l_{AE}$ w punkcie E . Podobnie dla pasa CG siła ta jest zmienna od zera w punkcie C do $N'_3 = (q_2 + q_3) l_{CG}$ w punkcie G itd.

takiej konstrukcji sprowadzamy do dwóch zagadnień poprzednich. W etapie pierwszym mianowicie (rys. 7.30b) zakładamy wbrew rzeczywistości, że do unieruchomienia dźwigara wystarcza sześć reakcji i że wobec tego jedna z siedmiu reakcji rzeczywistych, np. R_3 , jest równa zero. Pozwala to z równań statyki, jak dla bryły sztywnej wyznaczyć pozostałe sześć reakcji $R_1, \dots, R_7$ ($R_3 = 0$), a następnie rozwiązać dźwigar idąc od żebra E aż do żebra A . Okazuje się jednak przy tym, iż w przekroju żebra A siły w pasach $N_1, \dots, N_4$



Rys. 7.30. Analiza 4-pasowego dźwigara otwartego przy podparciu w dwóch płaszczyznach

nie są równe zero, aczkolwiek tworzą one układ samozrównoważony. W celu usunięcia tego układu obciążamy dźwigar w drugim etapie siłą $P_3^* = 1 \text{ kG}$ (rys. 7.30c), wyznaczamy powtórnie sześć reakcji $r_1, \dots, r_7$ i rozwiązujemy powtórnie dźwigar od żebra E do żebra A , otrzymując w przekroju tego ostatniego samozrównoważony układ sił $n_1, \dots, n_4$ w pasach. Rzeczywistą wartość reakcji R_3 określamy z zależności

$$N_1 + n_1 R_3 = 0 \quad (b)$$

warunkującej całkowite zniknięcie nie tylko siły N_1 , lecz i pozostałych sił N_2, N_3, N_4 . Mając tak obliczoną wartość reakcji możemy z superpozycji obu rozwiązań wyznaczyć wszystkie siły wewnętrzne i reakcje. Jeśli na przykład w pewnym przekroju pasa p siła N_p odpowiada obciążeniu z rys. 7.30b, a n_p odpowiada obciążeniu z rys. 7.30c, to wypadkowa siła W_p w tymże przekroju jest

$$W_p = N_p + n_p R_3. \quad (c)$$

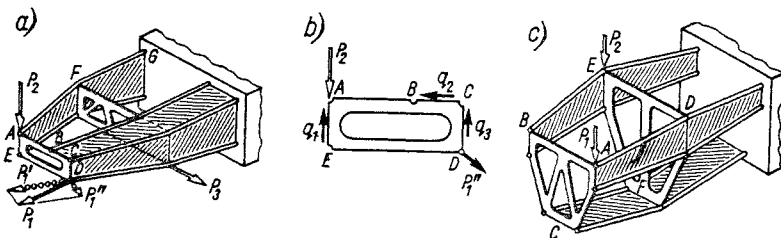
Podobny rezultat otrzymamy dla ścianek, przy czym oczywiście należy zwracać uwagę na zwroty dodawanych przy superpozycji wielkości*.

Poza opisaną konstrukcją spotykamy i inne dźwigary 3-ściankowe (rys. 7.31), których rozwiązanie przeprowadzamy tą samą metodą elementów. Tak na przykład w dźwigarze (rys. 7.31a) rozpoczynamy od statyki żebra $A, \dots, E$ obciążonego siłą P_2 i składową siły P_1 , tj. P'_1 , leżącą w płaszczyźnie tego żebra, a utrzymanego w równowadze wydatkami

* Opisaną metodę stanowiącą analogię do metody Henneberga w kratownicach (art. 2.7) można zmodyfikować, zakładając „a priori” już w I zadaniu (rys. 7.30b) pewną wartość reakcji R'_3 , np. $R'_3 = R'_2$. Postępowanie takie przy stosownym obiorze R'_3 daje w efekcie zmniejszenie sił N i zmniejszenie korekty wniesionej przez II zadanie składowe. Ma to pewne znaczenie z uwagi na dokładność rachunków.

stycznymi q_1, q_2, q_3 (rys. 7.31b). Mając te wydatki możemy następnie określić siły w elementach odcinka dźwigara między żebrami A i żebrami F itd.

Przedstawiony sposób analizy może być zastosowany dla podanych dźwigarów z dowolną liczbą odcinków, a więc zbliżających się do modelu pręta. Otrzymane przy tym wyniki są identyczne z wynikami, jakie otrzymalibyśmy stosując od razu wskazówki



Rys. 7.31. Przykłady innych ustrojów statycznie wyznaczalnych

rozdz. 6. Podobnie jednak, jak i w przypadku dźwigara 3-pasowego, podana tu metoda ma tę wyższość, iż nie wymaga znajomości przekrojów, grubości ścianek, określenia środków ciężkości przekrojów poprzecznych, momentów bezwładności, sztywności na nieswobodne skręcanie itd. i dlatego zaleca się jej stosowanie.

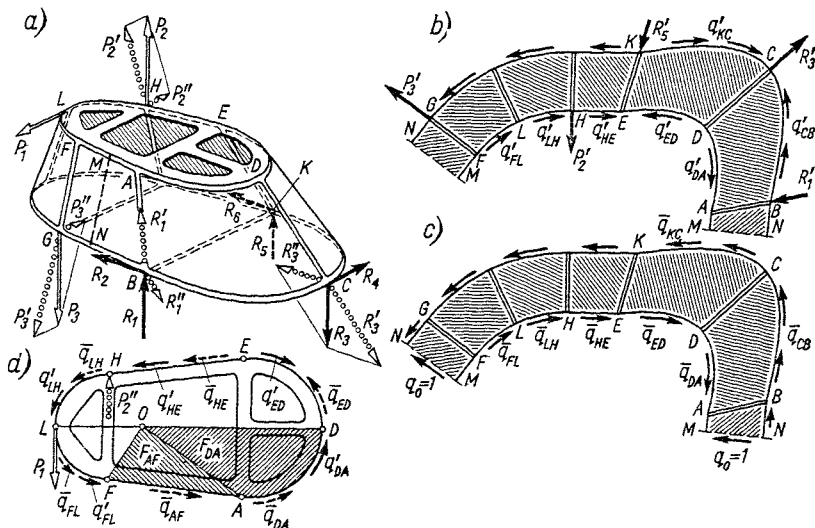
7.11. Statycznie wyznaczalne bryły o ściankach zakrzywionych

Konstrukcje tego rodzaju (rys. 7.32a) są w pewnej mierze wariantem brył o ściankach płaskich (art. 7.5), a jedyna różnica, jaka wynika z istnienia ścianek zakrzywionych nie wpływa w niczym ani na ich statyczną wyznaczalność, ani na tok rozwiązania. Postępując jak poprzednio (rys. 7.21), określamy w pierwszym etapie siły wewnętrzne w elementach wiążących obie ściany główne $AF \dots ED$ i $BGKC$. W tym celu określamy naprzd składowe siły $P'_3, P'_2, R'_1, R'_3 \dots$ działające wzdłuż odpowiednich prętów $GF, \dots$. Rozcinając następnie płaszczyznę wzdłuż linii MN i rozwijając go na płaszczyznę (rys. 7.32b, c) wyznaczamy wydatki styczne raz przy założeniu, że działają siły $P'_3, P'_2, \dots$, a w przekroju MN $q_0 = 0$ (rys. 7.32b), a drugi raz przy założeniu, że jedynym obciążeniem jest $q_0 = 1 \text{ kg/cm}$ (rys. 7.32c). Wyznaczenie to obejmuje oczywiście określenie wartości wydatków stycznych na wszystkich krawędziach poszczególnych ścianek, a więc i na tych, które łączą się z ścianami głównymi*. Wartość nieznanego wydatku X działającego w przekroju MN określamy z równowagi jednej ze ścian głównych (rys. 7.32d), formułując względem obranego punktu O równanie równowagi momentów identyczne z równaniem (7.8). W równaniu tym m_q jest momentem wydatków $\bar{q}$ wynikających z rozwiązania (rys. 7.32c) i jest on równy

$$m_q = 2\bar{q}_{AF}F_{AF} + 2\bar{q}_{DA}F_{DA} + \dots + 2\bar{q}_{FL}F_{FL}, \quad (a)$$

* Korzystamy przy tym z zależności podanych w art. 7.8 (rys. 7.23 i 7.24), bądź z zależności art. 7.2, gdy dana ścianka jest płaska, np. $ABGF$.

podczas gdy na moment M_q składają się zarówno wydatki q' wynikające z rozwiązania (rys. 7.32b), jak i obciążenia zewnętrzne P_1, P_2'' . Przez superpozycję obu rozwiązań, tj. rozwiązania z rys. 7.32b i X -krotnych wartości z rozwiązania według rys. 7.32c, otrzymujemy ostateczny rezultat. Przebieg sił w pasach łączących ściany główne jest w pierw-



Rys. 7.32. Półiskorupowa cienkościenna bryła o ścianach zakrzywionych

a) szkic konstrukcji; b, c) rozwinięcie i statyka płaszcza, gdy w przekroju MN $q_0 = 0$ i gdy $q_0 = 1 \text{ kg/cm}$; d) układ oddziaływań na górną ścianę główną, strzałki ciągle odpowiadają $q_0 = 0$, strzałki przerywane obciążeniu $q_0 = 1 \text{ kg/cm}$.

szym przybliżeniu liniowy. Tak na przykład siła w pasie AB zmienia się liniowo od zera w punkcie A do R'_1 w punkcie B . Co się tyczy statyki ścian głównych, to ich rozwiązanie po wyznaczeniu oddziaływań płaszcza zależy od ich budowy. Tak na przykład rozwiązanie górnej ściany stanowiącej 4-obwodową ramę musi być przeprowadzone według reguł rozdz. 5. Wszystkie przy tym uwagi, które odnosiły się do konstrukcyjnych modyfikacji brył cienkościennych (art. 7.6) mają i tu swoje zastosowanie.

Szczególnie prosto przebiega analiza w przypadku bryły walcowej (rys. 7.33a). Izolując mianowicie płaszczyznię wraz z siłami wzdłużnymi N i prowadząc myślowe przecięcie wzdłużne w jednym z odcinków płaszcza (rys. 7.33b) widzimy, że wypadkowy wydatek styczny q_k w ścianie między pasem k a $k+1$ jest

$$q_k = q_0 + (1/l) \sum_1^k (N'_i - N''_i) = q_0 + q'_k, \quad (b)$$

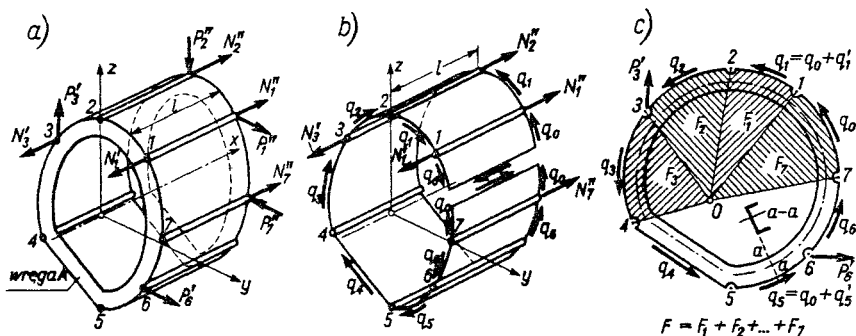
gdzie

q_0 — całkowity wydatek w myślowym przecięciu płaszcza,

q'_k — wydatek styczny w płaszczu, określony tak jak gdyby przecięcie wzdłużne istniało w rzeczywistości. Z równania równowagi momentów jednej z wręg, pełniące funkcję ściany głównej, otrzymujemy (rys. 7.33c)

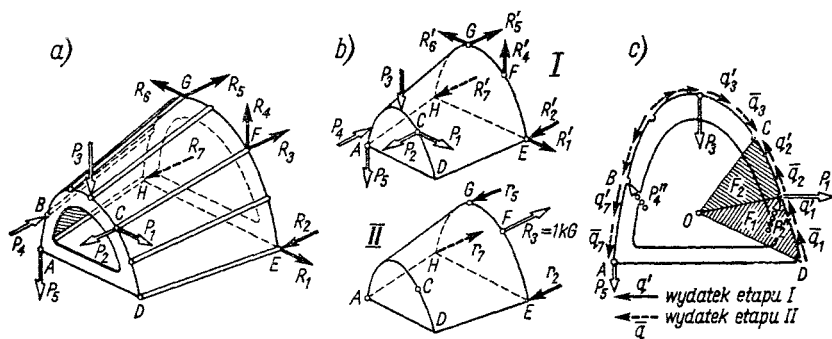
$$q_0 = -(1/F) \sum q'_k F_k, \quad (7.9)$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie wydatki q'_k . Tak określona wartość q_0 daje możność obliczenia wypadkowych wydatków q_k . Przebieg sił w pasach jest liniowy i jest całkowicie określony bez potrzeby wyznaczania q_0 . Tak na przykład pas 7 jest rozciągany siłą liniowo zmienną od zera do wartości N'_7 , podczas gdy pas 6 jest zerowy itd.



Rys. 7.33. Statyka bryły z płaszczem cylindrycznym

W podobny sposób rozwiązujemy wielopasową bryłę otwartą (rys. 7.34), w której brak ściany $ADEH$ wyrównany jest przez dodanie siódmej reakcji R_7 . Zagadnienie to bardzo podobne do opisanego na rys. 7.30 rozwiązujemy w dwóch etapach (rys. 7.34b). W pierwszym z nich zakładamy, że jedna z reakcji, np. R_3 , jest równa zero, obliczamy pozostałe sześć reakcji $R'_1, \dots, R'_7$ jak dla bryły sztywnej i po rozwinięciu płaszcza wyzna-



Rys. 7.34. Statyka bryły z płaszczem nie tworzącym rury

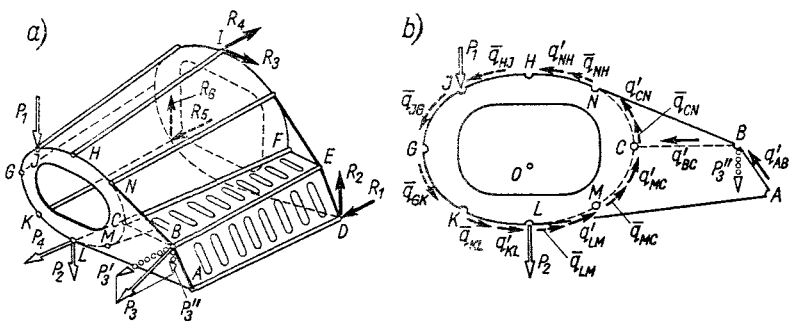
a) szkice ustroju, obciążeń i reakcji $R_1, \dots, R_7$; b) etapy rozwiązań; c) statyka węgri.

czamy jak poprzednio wydatki styczne q' (porównaj rys. 7.32b). Podobnie w etapie II zakładając $R_3 = 1 \text{ kG}$ po wyznaczeniu reakcji r_2, r_5, r_7 (inne reakcje nie istnieją) obliczamy wydatki $\bar{q}$. Rzeczywistą wartość R_3 określamy z równania równowagi momentów dla jednej ze ścian głównych (węgri), np. dla węgri $ABCD$ (rys. 7.34c), otrzymując w rezultacie równanie

$$m_q R_3 + M_q = 0, \quad (c)$$

w którym m_q jest momentem wydatków $\bar{q}$, a M_q wszystkich pozostałych obciążeń, tj. wydatków q' , sił P_1 , P_3 , P_5 i odpowiednich składowych sił P'_2 i P'_4 (porównaj rys. 7.32a, d). Dalsze etapy postępowania jak dla bryły z rys. 7.32.

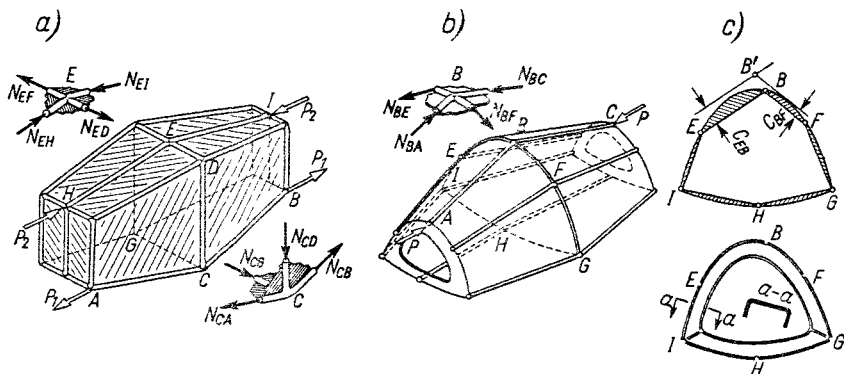
Ostatnim wreszcie wariantem, który omówimy, są bryły z odgałęzieniem (lub odgałęzieniami) (rys. 7.35), w których do właściwej bryły dobudowany jest ciąg ścianek $BEFC$ i $ABED$ oraz pasy AD i BE . Rozwiązanie tych konstrukcji różni się od zadania z rys. 7.32 tym, że w pierwszym etapie wyzna-



Rys. 7.35. Statyka bryły z odgałęzieniem płaszcza

czamy wydatki styczne w części nabadowanej, tj. q'_{AB} i q'_{BC} , a dopiero potem wydatki styczne we właściwej bryle. Przy formułowaniu równania równowagi (7.8) te wydatki q'_{AB} i q'_{BC} należy uwzględnić w wyrażeniu na M_q .

Omówione dotychczas cienkościenne bryły o ściankach płaskich lub zakrzywionych stanowią odpowiednik statycznie wyznaczalnej kratownicy jednogrodziowej (art. 3.2). Powstaje pytanie, czy nie można tworzyć ustrojów (rys. 7.36) analogicznych do statycznie wyznaczalnych kratownic o łama-

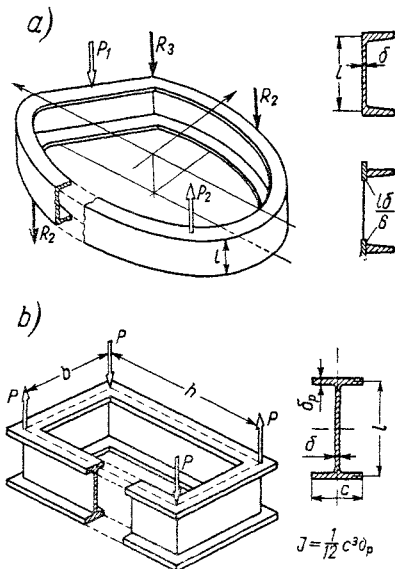


dla węzła typu *C*, a staje się jasne dla węzłów typu *E*, jeśli zauważyć, iż siły N_{EH} i N_{EI} są równe zeru*. Tylko w przypadku, gdyby w węźle *E* działała duża siła pionowa, należałoby oczekiwać dużych sił w pasach *HE* i *EI*, gdyż jak widać kąt *HEI* jest bliski 180° . Inaczej przedstawia się przypadek brył o ściankach zakrzywionych (rys. 7.36b). Analizując sytuację, w jakiej znajduje się węzeł *B*, widzimy, iż dla zachowania jego równowagi w prętach *EB* i *BF* musiałyby istnieć siły N_{BE} i N_{BF} wynikające z oddziaływania ścianek i przecinające się w węźle *B*. Otóż ten ostatni warunek nie jest na ogół spełniony, gdyż linie działania sił N_{BE} i N_{BF} są odsunięte od cięciw *BE* i *BF* na odległość $C_{BE} = = 2F_{BE}/l_{BE}$ i $C_{BF} = 2F_{BF}/l_{BF}$ (rys. 7.36c, porównaj także rys. 7.27b). Ta mimośrodkowość powoduje bardzo niekorzystne efekty wtórne w niesztynnym ciągu prętów *FB*, *BE*, ..., *GF*, których można uniknąć przez dodatkowe usztywnienie tego ciągu, np. przez wykonanie go w postaci ramy** (rys. 7.36c). Takie przesztywnienie powoduje, że ustrój przestaje być statycznie wyznaczalny, co powoduje konieczność zastosowania innej niż dotąd opisywano metody rozwiązania (rozdz. 8).

7.12. Jednoobwodowe ramy z prętów o przekroju otwartym

Opisana w art. 7.11 metoda pozwala rozwiązać zagadnienie przestrzennie obciążonej jednoobwodowej ramy płaskiej, gdy pręty tej ramy mają przekrój otwarty. Zauważmy mianowicie, iż w przypadku gdy długość *l* bryły (rys. 7.33) staje się mała, wtedy przekształca się ona w jednoobwodową ramę płaską (rys. 7.37a), w której rolę płaszcza spełnia ścianka ceówki, rolę zaś wręg — półki tego przekroju.

Współpracę ścianki w przenoszeniu naprężeń normalnych uwzględnimy dodając do przekroju każdej z półek pasy o polu równym $ld/6$. Tak samo postępujemy, jeśli przekrój poprzeczny jest zetowy***, tzn. gdy jedna wręga jest wewnętrzna, druga zaś zewnętrzna w stosunku do ścianki łączącej te wręgi. Wreszcie w przypadku przekroju dwuteowego (rys. 7.37b) obie półki odgrywają rolę wręg bryły i są ustawione centralnie względem ścianki (płaszcza). Samo rozwiązanie takiej ramy przebiega identycznie etapy jak w przypadku bryły, a więc wyznaczenie wydatków styecznych w ściance (rys. 7.33b i wzór 7.9), określenie oddziaływań ścianki na półkę (rys. 7.33c) i wreszcie rozwiązanie każdej z półek jako odrębnych płaskich ram zginanych w swych płaszczyznach. Na tym tle staje się jasne, że efektywne zmniejszenie naprężeń w takiej konstrukcji możliwe jest tylko przez poszerzenie półek (zwiększenie ich wskaźnika wytrzymałości), bądź powiększenie wymiaru *l* (zmniejszenie wydatków styecznych).



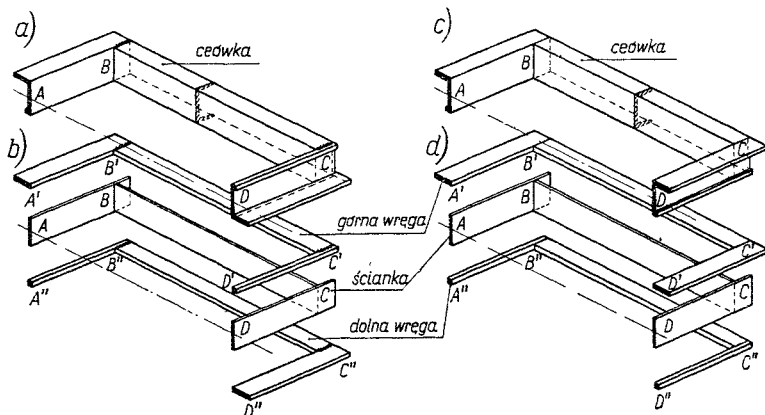
Rys. 7.37. Jednoobwodowe ramy jako graniczny przypadek brył cienkościennych

* Składowe siły P_2 działające wzdłuż pasów *HE* i *EI* zostają przekazane pod postacią wydatków styecznych na boczne ściany ustroju.

** Tylko w 3-pasowym dźwigarze rurowym (art. 7.9) taka potrzeba nie zachodzi, gdyż ciąg prętów tworzy sztywny trójkąt. Dowodzi to możliwości kształtowania takiego dźwigara z załomami pasów. Podobną właściwość ma dźwigar 4-pasowy (art. 7.10), w którym poprzeczne żebra mogą być wykonane jako sztywne zespoły bez naruszania statycznej wyznaczalności reszty ustroju.

*** Przedstawiony sposób rozwiązania jest uproszczony, gdyż nie uwzględnia on sztywności na skręcanie swobodne. Dokładność jego jest jednak dostateczna dla potrzeb praktycznych.

Przy takim schemacie pracy ustroju wynikają dodatkowe warunki, jakie musi spełniać ustawienie prętów w ramie, aby nie stała się ona mechanizmem. Ponieważ ciąg pólek w każdej z płaszczyzn pełni teraz rolę odpowiedniej wręgi w bryle (rys. 7.33), więc dla zachowania sztywności każdy z tych ciągów musi być sam w sobie sztywny. Biorąc jako przykład ramę (rys. 7.38a), w której poprzeczki AB i CD jako całość są kątownikami, widzimy spełnienie tego postulatu, gdyż wydzielone myślowo ciągi pólek górny i dolny (rys. 7.38b) są same w sobie ustrojami sztywnymi. Inaczej przedstawia się sytuacja w ramie

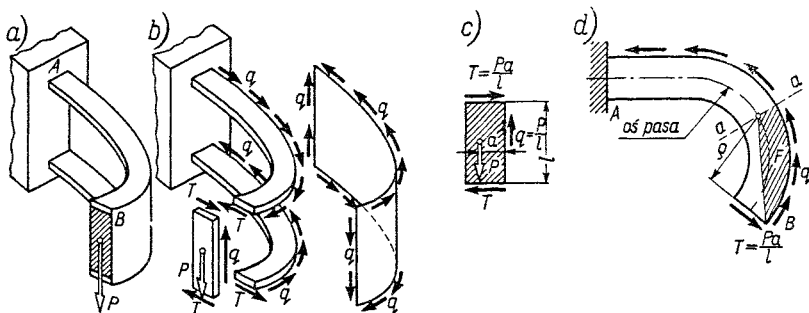


Rys. 7.38. Analiza prawidłowości budowy ram jednoobwodowych

a), c) warianty rozwiązania ram, narysowane są tylko połowy ram; b) rama z wariantu a) rozłożona na elementy spełniające wymagany postulat sztywności każdego z ciągów pólek; d) rama z wariantu c) nie spełniająca w dolnym ciągu pólek postulatu sztywności.

(rys. 7.38c), w której wydzielony myślowo dolny ciąg pólek (rys. 7.38d) składa się z względnie sztywnej półki $B''C''$ i wiotkich prętów $A''B''$, $C''D''$ i który w efekcie staje się mechanizmem*.

Tą samą metodą rozwiązujemy zagadnienie cienkościennej belki o przekroju otwartym (rys. 7.39a), w której po określeniu statyki żebra (rys. 7.39b) i ścianki (rys. 7.39b) wyznaczamy wartość wydatku



Rys. 7.39. Analiza cienkościennej belki o przekroju otwartym

b), c) układ oddziaływań między elementami i statyka żebra; d) statyka półki (pasa) dolnej.

* Takie rozwiązanie stosuje się w ramach samochodów terenowych, gdzie konstrukcja musi być bardzo podatna na skręcanie, pozwalając dopasować się do dużych nierówności terenu. Zrównoważenie obciążeń pionowych zapewniają cztery reakcje kół tak dobrane, że każda z belek wzdlużnych jest w równowadze niezależnie od drugiej.

stycznego $q = P/l$ i sił $T = Pa/l$. Obciążenie pólk (pasów) belki (rys. 7.39b i d) przy podanym sposobie utwierdzenia powoduje, że każda z pólk (pasów) jest wspornikiem zginanym w swej płaszczyźnie ciągłym obciążeniem q i siłami T , przy czym moment gnący w przekroju $a-a$ jest

$$M_{a-a} = (P/l)(2F + aq). \quad (a)$$

Rozwiązane zadanie stanowi analogię do zagadnienia bryły (rys. 7.34), w której płaszcz nie tworzy zamkniętej rury. Wszystkie podane tam wnioski mogą być przeniesione i na przypadek belki. W szczególności liczba więzów niezbędnych do unieruchomienia takiej belki jest 7, a nie 6, czego przykład mamy już w rozpatrzonej konstrukcji (rys. 7.39), w której przekroju oporowym występują poza wydatkiem q po trzy więzy dla każdej z pólk. Jeśli więzy te zrealizować tak, jak podaje rys. 7.34a, to otrzymujemy ustrój nieczuły na ewentualne błędy montażowe w ustawieniu podpór E, F, G, H , co w niektórych przypadkach jest cenną zaletą.

Przykład. Cienkościenna rama (rys. 7.37b) skręcana jest parami sił o momencie $M_s = Pb$. Wyznaczyć naprężenia w funkcji kąta obrotu boków b względem siebie.

R o z w i ą z a n i e. Zadanie jest modyfikacją zagadnienia statyki bryły (rys. 7.22), a jedyna różnica polega na tym, że obecnie obie wręgi są płaskimi ramami, przy czym $b_1 = b$ i $h_1 = h$. Maksymalne naprężenia od zginania występują w narożach (rys. 7.22g), a ich wartość przy $J = c^3 \delta_p / 12$ jest

$$\sigma_{\max} = \pm M_{\max} c / 2J = Pbhc / 16Jl = M_s hc / 16Jl. \quad (b)$$

Podobnie wydatki statyczne w ściankach (rys. 7.22c, d) są

$$q_0 = q'_1 - q_0 = q''_2 - q_0 = P/2l = M_s / 2lb.$$

Kąt Φ względnego obrotu boków b wyznaczamy przykładając jednostkowe momenty skręcające pod postacią czterech sił $P = 1/b$ umieszczonych w narożach. Siły te wywołują taki sam układ sił wewnętrznych, jak moment $M_s = 1$ kGem. Stosując reguły art. 1.2 otrzymujemy

$$\Phi = \frac{M_s(h+b)h^2}{48EJl^2} \left(1 + 24 \frac{E}{G} \frac{Jl}{b^2 h^2 \delta} \right). \quad (c)$$

Ponieważ $(Jl/b^2 h^2 \delta) \ll 1$, to z dostateczną dokładnością

$$\Phi \approx \frac{M_s(h+b)h^2}{48EJl^2} = \frac{\sigma_{\max}}{3E} \frac{h(h+b)}{lc}.$$

Wzór powyższy wyznacza wartość $\sigma_{\max}$ odpowiadającą danemu kątowi Φ . Jeśli na przykład $b = 1$ m, $l = 20$ cm, $c = 8$ cm, $h = 2$ m, $\Phi = 1^\circ = 1,745 \cdot 10^{-2}$ rad, to dla konstrukcji stalowej

$$\sigma_{\max} = 280 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeśliby więc rozpatrywana konstrukcja miała być ramą samochodu terenowego z dopuszczalnym skreśleniem 6° , to $\sigma_{\max} = 17$ kG/mm². Rzeczywista wartość naprężeń w narożu jest jednak większa od obliczonej z uwagi na nieuniknione spiętrzenie naprężeń. W takich więc przypadkach celowe jest dać ramę, która na tego rodzaju obciążenia będzie mechanizmem (rys. 7.38c).

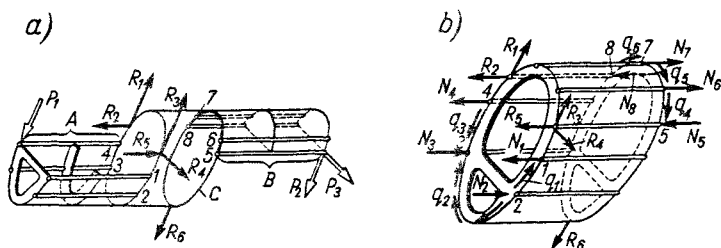
Z danych powyższych wynika, że konstrukcje ramowe omawianego typu są na skręcanie mało sztywne. Porównując na przykład omawianą konstrukcję z konstrukcją, w której ramy zastąpiono przeponami, stwierdzimy, iż sztywność konstrukcji rurowej o tym samym ciężarze jest kilkaset razy większa niż omawianej. Cechy tej nie zmieni okoliczność, iż profile otwarte mają pewną sztywność na skręcanie swobodne (art. 6.3). Jeśli więc konstrukcja ma być na skręcanie sztywna, to należy unikać prętów o profilu otwartym.

7.13. Złożone ustroje statycznie wyznaczalne

Traktując podstawowe konstrukcje (art. 7.9÷7.11) jako podzespoły, można przez ich odpowiednie łączenie tworzyć bardziej złożone ustroje. Ponieważ podstawowym warunkiem z punktu widzenia techniki jest, aby taki złożony zespół nie był mechanizmem, celowe będzie przeanalizować takie ustroje, które realizują ten warunek za pomocą minimalnej liczby elementów*. Innymi słowy postulujemy statyczną wyznaczalność ustroju złożonego, gdyż każda inna konstrukcja o mniejszej liczbie elementów niż minimalna wymagana jest mechanizmem, a każda inna o większej liczbie jest przesztynwiona (statycznie niewyznaczalna).

Przy tworzeniu takich złożonych ustrojów rozróżniamy dwa zasadnicze przypadki. Pierwszy z nich to szeregowe łączenie różnych konstrukcji podstawowych z występującą przy tym przerwą ciągłości pasów. Drugi z nich to rozgałęzienie konstrukcji z towarzyszącą temu raptowną zmianą kierunku pasów lub przerwaniem ich ciągłości.

Przykładem pierwszego rodzaju jest połączenie dwóch otwartych dźwigarów 4-pasowych A i B (rys. 7.40a) tak, aby tworzyły one jedną sztywną całość. Realizację tego



Rys. 7.40. Szeregowe łączenie konstrukcji podstawowych

a) szkic łączonych dwóch dźwigarów, P_1, P_2, P_3 — obciążenia zewnętrzne, $R_1, \dots, R_6$ reakcje; b) statyka bloku C.

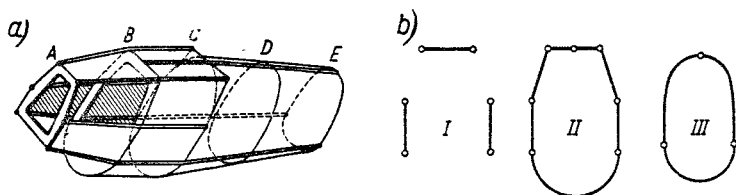
zapewniamy przez wstawienie między te dźwigary pośredniczącego bloku C , który dla każdego z nich stanowić musi swego rodzaju sztywne podłoże. Jak bowiem wiadomo z art. 7.10 (rys. 7.29) prawidłowa praca dźwigara jest zapewniona tylko wtedy, gdy w przekroju oporowym łączy się on z takim blokiem, który jest zdolny do przeniesienia sił wzdłużnych z czterech pasów i wydatków stycznych z trzech ścianek dźwigara. Jeśli na dodatek zażądamy, aby ten blok C był ustrojem cienkościennym, to najprostsze rozwiązanie stanowić będzie cienkościenna bryła (rys. 7.40b). Istotnym warunkiem przy tym jest, aby pasy dźwigarów A i B znalazły swe przedłużenie na płaszczyźnie bryły, gdyż tylko w ten sposób skupione siły $N_1, \dots, N_8$ z pasów tych dźwigarów zostaną prawidłowo doprowadzone na płaszczyznę bryły. Ściany główne bryły muszą się łączyć z ściankami obu dźwigarów, dając w ten sposób możliwość prawidłowego odebrania wydatków stycznych $q_1, \dots, q_6$. W rezultacie zatem statyka pośredniczącej bryły jest taka, jak ją podaje

* Analiza tych ustrojów jest ważna również z tego powodu, że pozwala konstruktorowi uniknąć takich ustrojów, w których jedna część jest przesztynwiona, a druga niedosztynwiona. Dodawanie elementów przesztynwiających jest czynnością wtórną, którą można dokonać dopiero wtedy, gdy istnieje gwarancja, iż pierwotny ustrój jest sztywny.

rys. 7.40b. Sama bryła może być przy tym modyfikowana w różny sposób. Tak na przykład główne jej ściany mogą być zastąpione odpowiednio mocnymi wręgami (porównaj rys. 7.19 i 7.20), ścianki jej płaszcza mogą być przestawione, np. zamiast zakrzywionej ścianki między pasem 2 i 3 można wstawić płaską ściankę itd.

Rozwiązanie takiego ustroju polega na odpowiednim łączeniu rozwiązań konstrukcji podstawowych. I tak po rozwiązaniu obu dźwigarów A i B według wskazówek art. 7.10 i określeniu oddziaływań na blok C , rozwiązanie tego ostatniego przeprowadzamy według wskazówek art. 7.11.

Podobnym, co do swej istoty, ustrojem jest ustrój (rys. 7.41), w którym bez trudu rozpoznajemy: dźwigar AB , identyczny z podanym na rys. 7.31c, 3-pasowy dźwigar rurowy CE (rys. 7.26) i pośredni-

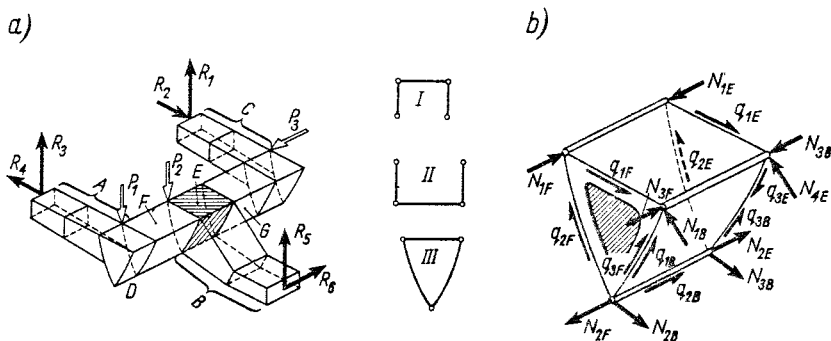


Rys. 7.41. Szeregowe łączenie konstrukcji

a) szkic konstrukcji z pośredniczącym blokiem BC ; b) poprzeczne przekroje konstrukcji: I — przekrój części AB , II — części BC , III — części CE .

czący blok BC identyczny z bryłą (rys. 7.32). Tak samo jak w poprzednim ustroju, obserwujemy i tu przedłużenie pasów łączonych ustrojów na płaszczyznę bloku BC . Rzeczą zasługującą na podkreślenie jest natomiast to, że pracujące na ścinanie ścianki nie muszą łączyć się bezpośrednio ze sobą. Tak na przykład boczna ścianka części CD ma w stosunku do ścianek części BC częściowy uskok, co nie jest bynajmniej błędne, o ile tylko istnieje połączenie tych ścianek z przeponą C .

Drugi rodzaj zagadnień związanych z rozgałęzieniami ustroju prześledzimy na przykładzie konstrukcji (rys. 7.42), w której do centralnego 3-pasowego dźwigara $DFEG$ dobudowano trzy dźwigary 4-pasowe otwarte A , B i C . Prawdliwość tej konstrukcji

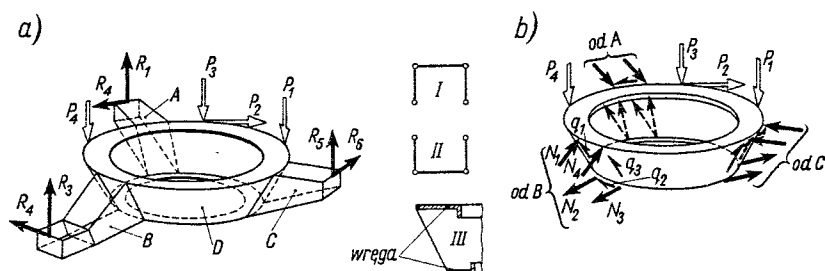


Rys. 7.42. Tworzenie konstrukcji rozgałęzionych

a) szkic konstrukcji z centralnym dźwigarem 3-pasowym i nabadowanymi dźwigarami 4-pasowymi, I — poprzeczny przekrój dźwigara A i C , II — dźwigara B , III — dźwigara centralnego; b) statyka segmentu E , indeksy przy N i q oznaczają oddziaływanie zespołu oznaczonego tym indeksem, np. N_{1B} , ..., N_{4B} oddziaływania dźwigara B .

nie nasuwa zastrzeżeń, gdyż każdy z segmentów centralnego dźwigara jest sztywną bryłą mogącą przenieść oddziaływania dobudowanych dźwigarów. Rozwiązanie takiego ustroju rozpoczynamy od określenia reakcji R i sił wewnętrznych w trzech nabudowanych dźwigarach (art. 7.10). Niezależnie od tego metodą przekrojów obliczamy siły wewnętrzne w takich segmentach centralnego dźwigara, jak F i G (rys. 7.27). Na sam koniec rozpatrujemy statykę segmentów leżących na skrzyżowaniach, np. segmentu E , w którym jako znane z poprzednich etapów rozwiązania występują oddziaływania dźwigara B oraz segmentów F i G , a samo określenie sił wewnętrznych jest powtórzeniem rozwiązania dla takich segmentów jak F i G .

Ustrojem rozgałęzionym jest również konstrukcja (rys. 7.43), w której centralnym podzespołem jest cienkościenne bryła D , na której nabudowane są odgałęzienia w postaci trzech dźwigarów 4-pasowych, tj. A , B i C . Po rozwiązaniu tych dźwigarów redukujemy zadanie do statyki centralnej bryły

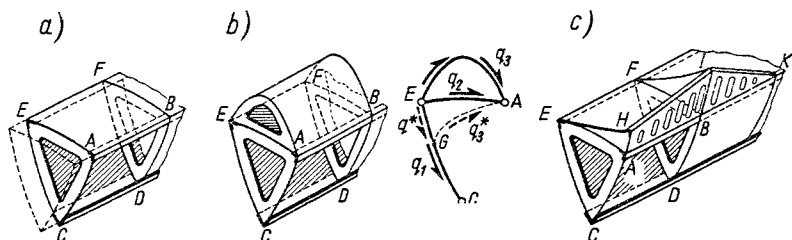


Rys. 7.43. Statycznie wyznaczalny ustrój rozgałęziony

a) szkic ustroju i przekroju I—dźwigarów A i C , II—dźwigara B , III—centralnej bryły D ; b) statyka bryły D z narysowanym układem oddziaływań dźwigarów A , B i C .

(rys. 7.43c), (art. 7.11). Niezależnie od rozwiązania należy tu zwrócić uwagę na wprowadzenie sił typu P_1, P_3, N_1 , z których każda daje składową działającą wzdłuż tworzącej i składową leżącą w płaszczyźnie wręgi (porównaj rys. 7.32a i rozłożenie sił P_2, P_3), wskutek czego konieczne jest umieszczenie na płaszczyźnie i na wręgach odpowiednich pasów rozprzeczających te składowe na całą długość płaszcza, bądź na całą szerokość pierścienia (wręgi).

Na zakończenie omówimy jeszcze zagadnienie niezbędnych wzmocnień konstrukcji statycznie wyznaczalnej w przypadku konieczności dokonania wykroju. Biorąc jako przykład 3-pasowy dźwigar (rys. 7.44a), widzimy, że usunięcie w nim ścianki $ABCD$



Rys. 7.44. Opanowanie wykroju w dźwigarze 3-pasowym

b) pierwszy wariant wzmocnienia przez dobudowę dodatkowej ścianki zewnętrznej lub wewnętrznej (linia przerywana); c) drugi wariant wzmocnienia przez dobudowę dodatkowego dźwigara $AHIKB$ i żeber AHE, FIB .

musi być skompensowane przez dodanie w obrębie tego samego segmentu innej ścianki zewnętrznej, bądź wewnętrznej (rys. 7.44b). Tylko bowiem wtedy liczba sił wewnętrznych (3 siły w pasach i 3 wydatki styczne) zostaje bez zmian pozwalając na przeniesienie dowolnego obciążenia o sześciu składowych (porównaj rys. 7.27). Jeśli jako wariant wzmocnienia wybieramy ściankę zewnętrzną, to wartości wydatków q_1 , q_2 i q_3 wyznaczamy podobnie jak na rys. 7.27b, określając naprzdód linie działania wypadkowych sił T i wartości tych sił, a dopiero potem same wydatki. Jeśli jako wariant wzmocnienia wybieramy ściankę wewnętrzną AG (linia przerywana), to przy obliczaniu wydatków należy uwzględnić, że $q^* = q_1 + q_3^*$, tak iż w rezultacie mamy znowu tylko trzy niewiadome q_1 , q_2 i q_3^* . W obu wariantach należy pamiętać o odpowiedniej modyfikacji żeber ACE i BDF , a mianowicie w przypadku ścianki zewnętrznej należy żebra te wybudować na zewnątrz tak, aby łączyły się one z dobudowaną ścianką, w przypadku natomiast dodania ścianki wewnętrznej AG należy je wypełnić tak, aby rura AEG była zamknięta z obu stron. Inna wersja wzmocnienia (rys. 7.44c) polega na dodaniu pasa HI oraz ścianki $ABIH$, dzięki czemu na osłabionym odcinku konstrukcja staje się dźwigarem 4-pasowym. Aby jednak to wzmocnienie działało prawidłowo, jeden z sąsiadujących segmentów, w danym przypadku BK , musi być przekształcony w bryłę pośredniczącą między 4-pasowym segmentem AB i 3-pasową częścią pozostałą (analogia do rys. 7.41).

7.14. Rozwiązywanie zagadnień statycznie niewyznaczalnych*

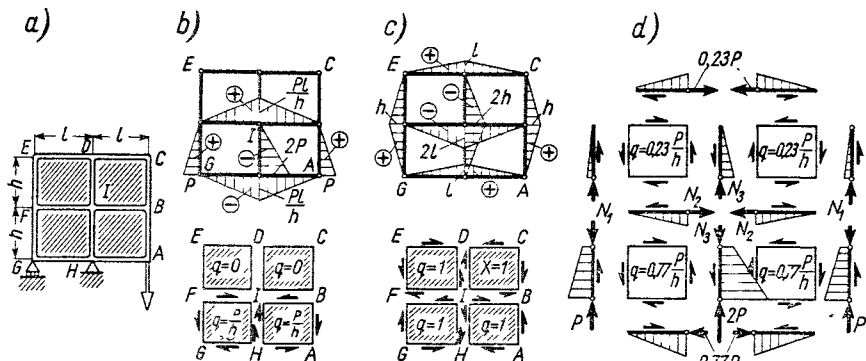
W konstrukcjach cienkościennych rozróżniamy dwa rodzaje statycznie niewyznaczalności: *zasadniczą i wewnętrzną*. Pierwsza z nich występuje wtedy, gdy określenie oddziaływań między elementami lub podzespołami nie może być dokonane na podstawie samych tylko równań statyki. Druga z nich, tj. wewnętrzna, istnieje wtedy, gdy określenie sił wewnętrznych w danym podzespole jest zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym pomimo znajomości wszystkich oddziaływań na ten podzespół. W tym ujęciu prawie wszystkie dotychczas rozpatrywane konstrukcje cechuje *zasadnicza statyczna wyznaczalność*, aczkolwiek niektóre podzespoły, np. ramowe wręgi, są wewnętrznie statycznie niewyznaczalne.

Przystępując do omawiania ustrojów, w których statyczna niewyznaczalność ma charakter zasadniczy, rozważmy tarczę (rys. 7.45a), która, jak to wynika z analogii kratownicowej (patrz art. 7.3 rys. 7.8c), jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Postępując według ogólnych wskazówek art. 1.3, jako statycznie niewyznaczalną wielkość przyjmiemy wydatek styczny X w ściance $BCDI$. Rozcinając jej połączenie z prętami BC , CD , DI i IB otrzymujemy ustrój statycznie wyznaczalny, w którym siły stanu „0” (rys. 7.45b) obliczone zostały według wskazówek art. 7.3. Jak widać, wszystkie pręty i obie ścianki powyżej pasa FIB są zerowe, zmienność zaś sił w pasach części dolnej

* Analizie cienkościennych konstrukcji statycznie niewyznaczalnych poświęcony jest cały rozdz. 8, dotyczy on jednak głównie konstrukcji wielosegmentowych, dla których opracowane są pewne odrębne metody. Artykuł 7.15 poświęcony jest zagadnieniom typowym, których rozwiązanie jest jedynie pewną adaptacją metod omówionych w rozdz. 1.

liniowa. Zakładając z kolei, iż na krawędziach ścianki $BCDI$ działa wydatek styczny $X = 1 \text{ kG/cm}$ i także oddziaływania na pasy BC , CD , DI oraz IB , otrzymujemy po rozwiązaniu według wskazówek art. 7.3 układ sił wewnętrznych stanu „I” (rys. 7.45c). Formułując teraz równanie M—M

$$a_{1,1}X + a_{1,0} = 0, \quad (a)$$



Rys. 7.45. Rozwiązanie 1-krotnie statycznie niewyznaczalnej tarczy

a) szkic konstrukcji; b) siły wewnętrzne stanu „I”; c) siły wewnętrzne stanu „0”; d) wypadkowe siły i wydatki styczne.

wyrażamy fakt, iż ścianka $BCDI$ pasuje do reszty ustroju. Współczynnik $a_{1,1}$ i wyraz wolny $a_{1,0}$ obliczamy ze wzoru (7.5), przy czym

$$a_{1,1} = \sum \int (n_p^2 / EA_p) ds + \sum [(\bar{q}_p)^2 F_p / G\delta_p], \quad (b)$$

gdyż obciążeniem zewnętrznym jest w tym przypadku $X = 1 \text{ kG/cm}$ wywołujący siły n_p i wydatki styczne $\bar{q}_p$ (rys. 7.45c). Podobnie

$$a_{1,0} = \sum \int (N_p n_p / EA_p) ds + \sum (q_p \bar{q}_p F_p / G\delta), \quad (c)$$

przy czym N_p i q_p są siłami wewnętrznymi stanu „0” (rys. 7.45b). Wykorzystując teraz wzory 7.5a, b określamy składniki a' odpowiadające podatności pasów i a'' odpowiadające podatności ścianek. Zakładając na przykład, że przekroje wszystkich pionowych pasów są A_1 , wszystkich poziomych A , a grubości ścianek jednakowe i równe δ , mamy

$$a'_{1,1} = 4 \frac{h}{6EA_1} [h(2h+0)+0] + 2 \frac{h}{6EA_1} 2h4h + 4 \frac{l}{6EA} l2l + 2 \frac{l}{6EA} 2l4l,$$

$$a''_{1,1} = 4(1)^2 lh / G\delta,$$

a po uporządkowaniu l

$$a_{1,1} = a'_{1,1} + a''_{1,1} = (4l^3 / EA) [(h/l)^3 (A/A_1) + 1 + (E/G)(Ah/l^2\delta)]. \quad (d)$$

Analogicznie wyznaczamy $a_{1,0} = a'_{1,0} + a''_{1,0}$ jako

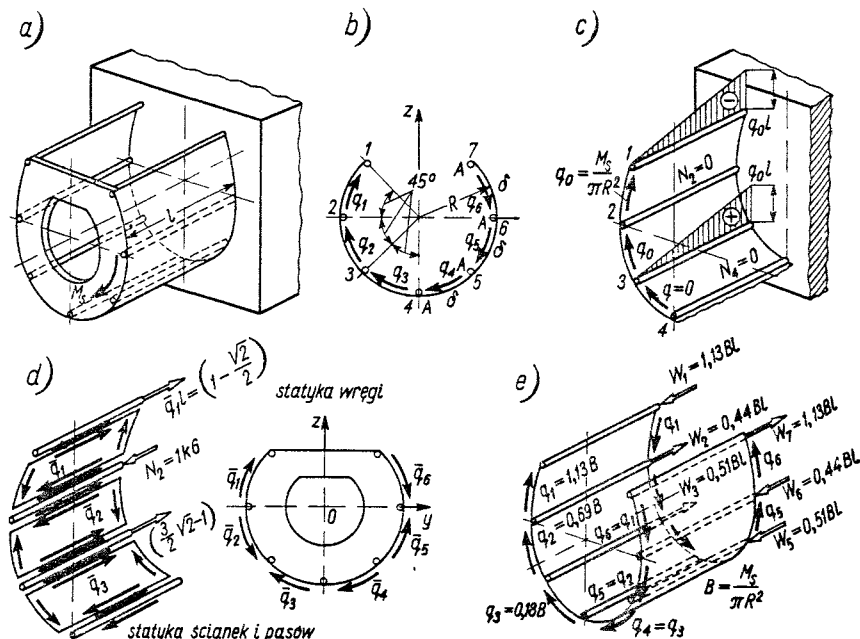
$$a_{1,0} = -(2Pl^3 / EAh) [1 - (h/l)^3 (A/2A_1) + (E/G)(Ah/l^2\delta)]; \quad (e)$$

a po podstawieniu do równania (a) obliczamy X . Zakładając na przykład, że $l = h$, $A = 2A_1$, $A/l\delta = 1$, $E/G = 2,6$ otrzymujemy

$$X = 0,232 P/h,$$

skąd wynika, iż wydatek styczny X działa ze zwrotem podanym na rys. 7.45c. Wynik ostateczny rys. 7.45d określamy sumując siły stanu „0” z siłami stanu „I” zwiększonymi w stosunku $0,232 P/h$.

Jako drugi przykład rozwiążemy wspornikową idealnie utwardzoną konstrukcję 7-pasową symetryczną (rys. 7.46a) przy założeniu, iż ściana przednia jest idealnie sztywna. Badając równowagę wręgi widzimy, iż do określenia sześciu wydatków stycznych $q_1, \dots, q_6$ (rys. 7.46b) mamy tylko trzy równania rów-



Rys. 7.46. Rozwiązanie 1-krotnie statycznie niewyznaczalnej bryły półkorupowej

a) szkic konstrukcji; b) określenie układu wydatków stycznych i geometria przekroju; c) stan „0”; d) stan „I”; e) wynik rozwiązania dla $\xi = 1$.

nowagi. Na ogół więc zadanie jest 3-krotnie statycznie niewyznaczalne. W rozważanej jednak konstrukcji dzięki symetrii jej budowy i antysymetrii obciążenia mamy dodatkowe zależności $q_1 = q_6$, $q_2 = q_5$, $q_3 = q_4$. Ponieważ przy tym równanie rzutów na oś z jest tożsamościowo spełnione, to zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne.

Jako układ statycznie wyznaczalny (stan „0”) przyjmujemy konstrukcję, w której pasy 2 i 6 nie są połączone z podłożem, a siły w tych pasach są równe zero. Ponieważ siła w pasie 4 jest zawsze równa zero ($q_3 = q_1$), otrzymujemy konstrukcję 4-pasową, w której układ sił wewnętrznych podaje rysunek 7.46c.

W rzeczywistości w przekroju utwardzonym istnieją oddziaływania $N_2 = -N_6$ między podłożem a przeciętymi myślowo pasami 2 i 6. Jako stan „I” obieramy stan obciążenia, gdy siły te są równe 1 kG (rys. 7.46d). Układ sił wewnętrznych stanu „I” wyznaczamy jak dla bryły z rys. 7.34, w której rolę

czterech reakcji wzdłużnych R pełnią teraz siły w pasach 1, 3, 5 i 7. Z rozwiązania tego otrzymujemy wydatki styczne stanu „I”

$$\bar{q}_1 = 0,293/l, \quad \bar{q}_2 = 0,707/l, \quad \bar{q}_3 = 0,414/l$$

i siły w pasach zmienne liniowo od zera na końcu swobodnym do wartości

$$n_1 = 0,293, \quad n_2 = -1, \quad n_3 = 1,121$$

w przekroju utwierdzonym rys. 7.46d. Formułując obecnie równanie M—M

$$\alpha_{1,1}X + \alpha_{1,0} = 0,$$

wyrażamy tym, iż grupa X sił ($X = N_2 = -N_6$) zapewnia ciągłość przemieszczeń między podłożem a przeciętymi myślowo pasami 2 i 6. Ponieważ pasy 1, 3, 5 i 7 są połączone z podłożem, to $\alpha_{1,1}$ jest podwojonym przemieszczeniem (szparą) między tym podłożem a przekrojem myślowego przecięcia pasa* wywołanych grupą sił $X = 1$ kG. Podobnie $\alpha_{1,0}$ jest podwojonym przemieszczeniem wywołanym przez M_s powstającym między tym podłożem a przecięciem pasa 2. Obliczając teraz z wzoru (7.5) $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$ mamy

$$\alpha_{1,0} = \frac{M_s l^2 (\sqrt{2}-1)}{\pi E A R^2} \left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \xi \right), \quad \alpha_{1,1} = \frac{l}{EA} \left[\frac{8(2-\sqrt{2})}{3} + \xi \frac{\pi(5-3\sqrt{2})}{2} \right],$$

gdzie $\xi = (E/G)(A/l\delta)(R/l)$ — bezwymiarowy współczynnik. W rezultacie z równania M—M otrzymujemy

$$X = N_2 = -N_6 = -0,354 \frac{M_s l}{\pi R^2} \frac{1 + 1,176\xi}{1 + 0,763\xi}.$$

Mając wartość X można wyznaczyć wypadkowe siły W w przekroju oporowym oraz wydatki styczne. Dla $\xi = 1$ odpowiednie wartości podaje rysunek 7.46e. Zauważmy, iż podatność ścianek na ścinanie ma stosunkowo nieznaczny wpływ na wielkość sił w najbardziej obciążonych pasach. Biorąc mianowicie $\xi = 0$ pokrycie sztywne i $\xi \rightarrow \infty$ pokrycie wiotkie, mamy w pasach skrajnych

$$W_1 = -W_7 = -1,104 M_s l / \pi R^2 \quad (\xi = 0),$$

$$W_1 = -W_7 = -1,162 M_s l / \pi R^2 \quad (\xi = \infty).$$

Rozwiązanie zadania można uogólnić zakładając sprężyste utwierdzenie pasów (K kG/cm). Jak wynika z obliczeń, im ta sztywność K jest mniejsza, tym rozkład sił w pasach zbliża się coraz bardziej do przypadku $\xi = 0$, a więc gdy pokrycie jest nieodkształcalne.

Spotykany często w praktyce jest zagadnienie 4-punktowego podparcia konstrukcji sztywnej w sobie (rys. 7.47a) obciążonej pionowymi siłami P . Zagadnienie to jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, a jego rozwiązanie prowadzi znowu do równania M—M

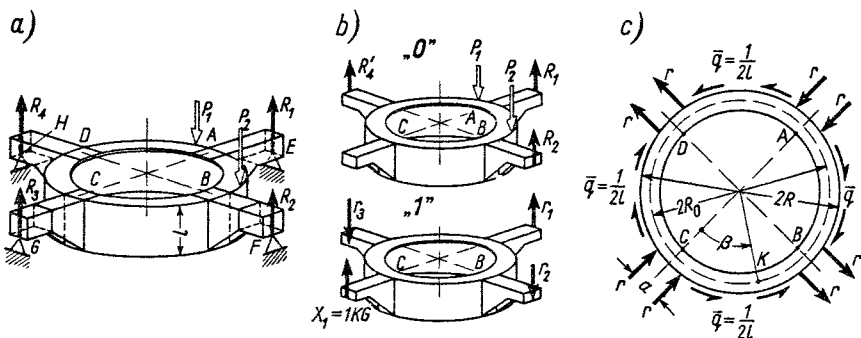
$$\alpha_{1,1}X + \alpha_{1,0} = 0,$$

przy czym stany „0” i „I” są podane na rys. 7.47b. Określenie sił wewnętrznych każdego ze stanów jest powtórzeniem zagadnienia ustroju z rozgałęzieniami (rys. 7.43), z tą tylko różnicą, że tym razem odgałęzień (4-pasowych dźwigarów) jest cztery, a nie trzy jak poprzednio. Pokazaną przykładowo statykę górnej wręgi** określono przy założeniu, że nabudowane dźwigary mają jednakową długość b i są rozstawione co 90° . W takim przy-

* Z symetrii układu wynika, że szpara między pasem a podłożem i szpara między pasem 6 a podłożem mają przeciwne wartości. Uogólniona współrzędna $\alpha_{1,1}$ jest sumą absolutnych wartości tych przemieszczeń.

** Statyka wręgi dolnej różni się od statyki wręgi górnej tylko przeciwnymi zwrotami wszystkich sił.

padku każda z ośmiu reakcji pasów dźwigarów jest $r = b/2l$, a wydatki styczne równe $q = 1/2l$. Obliczenie sił we wrędze nie wymaga przy tym rozwiązywania zagadnienia statycznie niewyznacznego, jeśli wykorzysta się zasadę jednoznaczności (art. 1.5 rys. 1.19). Znajomość tych sił wewnętrznych jest konieczna do obliczenia $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$, gdyż



Rys. 7.47. Szkic rozwiązania złożonego ustroju 1-krotnie statycznie niewyznacznego
a) szkic ustroju podobnego do ustroju z rys. 7.43; b) układ obciążeń w stanie „0” i stanie „I”; c) statyka górnej wręgi bryły centralnej w stanie „I”.

tym razem składają się one z trzech członów uwzględniających podatność nie tylko ścianek i pasów, lecz również i wręg. W wyniku mamy zależności

$$\alpha_{1,1} = \alpha'_{1,1} + \alpha''_{1,1} + \alpha'''_{1,1}, \quad \alpha_{1,0} = \alpha'_{1,0} + \alpha''_{1,0} + \alpha'''_{1,0}, \quad (f)$$

w których $\alpha'_{1,1} + \alpha''_{1,1}$ oraz $\alpha'_{1,0} + \alpha''_{1,0}$ wyrażają się wzorami (b) i (c), natomiast

$$\alpha'''_{1,1} = \sum \int (m_1^2 ds/EJ), \quad \alpha'''_{1,0} = \sum \int (Mm_1 ds/EJ), \quad (g)$$

przy czym m_1 i M są odpowiednio momentami gnącymi we wręgach w stanie „I” i „0”, EJ — sztywnością wręgi na zginanie, a sumowanie obejmuje obie wręgi górną i dolną. Z uwagi na skomplikowane wyrażenia określające te momenty całkowanie przeprowadzamy najczęściej wykreślnie.

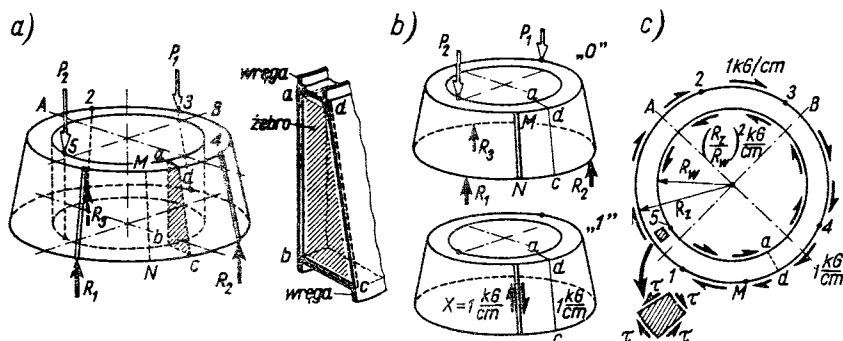
Na zakończenie omówimy jeszcze zagadnienie bryły dwupłaszczyzowej (rys. 7.48a), w której oba płaszczyzny wewnętrzny i zewnętrzny muszą być ze sobą połączone co najmniej żebrem $abcd$ złączonym również z wręgami. Żebro to jest nieodzowne dla prawidłowej pracy ustroju, gdyby bowiem go nie było, to przekazanie obciążeń pionowych z wewnętrznego płaszcza na zewnętrzny, np. siły P_2 , możliwe byłoby tylko przez zginanie wręg jako pierścieniowych płyt podpartych na brzegu zewnętrznym. Z drugiej strony ustrój jest jednokrotnie statycznie niewyznacalny, gdyż wprowadzenie myślowego przecięcia jednego z płaszczy, np. przecięcia MN , zamienia ustrój na bryłę z tzw. odgałęzieniami płaszcza* (rys. 7.35), o której wiemy, że jest statycznie wyznaczalna. Nieznana wartość wydatku $q = X$ w myślowym przekroju MN wyznaczamy z równania $M-M$

$$\alpha_{1,1}X + \alpha_{1,0} = 0,$$

w którym $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$ po obliczeniu sił wewnętrznych stanu „0” i „I” (rys. 7.48b) określamy według podanych poprzednio wskazówek. Tak na przykład siły wewnętrzne stanu „I” w płaszczy zewnętrznej

* Jedno odgałęzienie stanowi wtedy płaszczy na obwodzie $MABd$, drugie odgałęzienie płaszcza na obwodzie Md . Oba odgałęzienia łączą się przez żebro $abcd$ z nieprzeciętym płaszczyem wewnętrznym.

stanowią tylko wydatki styczne i jeśli dla prostoty założyć, że płaszcz ten jest cylindrem, to są one stałe i równe $q = 1 \text{ kg/cm}$. W płaszczu wewnętrznym są również stałe wydatki styczne $(R_z/R_w)^2$ o wartości dobranej tak, aby każda z wręg była w równowadze*, żebro $abcd$ jest w tym przypadku nieczynne. Każda z wręg, np. górna (rys. 7.48c), pracuje tylko na ścinanie, przy czym wartości wydatków stycznych podlegają temu samemu prawu co i w przypadku ścianki zakrzywionej tarczy (rys. 7.6), tj.



Rys. 7.48. Szkic rozwiązania 2-płaszczowej bryły

a) szkic ustroju zewnętrznie statycznie wyznaczalnego; b) układ obciążeń w stanach „0” i „I” po wprowadzeniu przecięcia MN ; c) statyka górnej wręgi w stanie „I”.

$$q_0 q^2 = 1 \cdot R_z^2 \quad (R_w \leq q \leq R_z). \quad (h)$$

Mając tak określone siły wewnętrzne możemy z wzoru (7.5) obliczyć $\alpha_{1,1}$, przy czym pierwszy składnik (wzór 7.5a) jest równy zeru. W wyniku otrzymujemy

$$\alpha_{1,1} = \frac{2\pi R_z l}{G \delta_z} + \frac{2\pi R_w l}{G \delta_w} \left(\frac{R_z}{R_w} \right)^2 + 2 \int_{R_w}^{R_z} \left(\frac{R_z}{q} \right)^2 \frac{2\pi q dq}{G \delta},$$

przy czym δ_z , δ_w i δ są odpowiednio grubościami ścianek płaszcza zewnętrznego, wewnętrznego i ścianki wręgi, a l — długością bryły. Po przekształceniach mamy

$$\alpha_{1,1} = \frac{2\pi R_z l}{G \delta_z} \left(1 + \frac{\delta_z R_z}{\delta_w R_w} + \frac{R_z}{l} \ln \frac{R_z}{R_w} \right). \quad (i)$$

Otrzymany wynik dla $\alpha_{1,1}$ swą prostotę zawdzięcza temu, że obydwa płaszcze są współśrodkowymi cylindrami kołowymi. W ogólnym przypadku, gdy wręgi nie są kołowe, wynik nie przedstawia się tak prosto. W szczególności we wręgach mogą wystąpić momenty gnące, których obliczenie należy przeprowadzić jak dla ram. Znaczne komplikacje wzorów ogólnych powodują, że obliczenia prowadzimy na liczbach szczegółowych.

Przeanalizowane przypadki dotyczyły wyłącznie zagadnień jednokrotnie statycznie niewyznaczalnych, co nie oznacza, iż tylko takie zagadnienia występują w praktyce.

* Gdyby oba płaszcze były stożkowe, to zależności byłyby inne. Wydatek styczny $X = 1 \text{ kg/cm}$ jest wtedy średnią wartością wzdłuż tworzącej. Jeśli promień zewnętrznego płaszcza dla dolnej i górnej wręgi są odpowiednio R'_z i R''_z , to wydatek wzdłuż tworzącej zmienia się od wartości R'_z/R'_z przy dolnej krawędzi do wartości R'_z/R''_z przy krawędzi górnej (art. 7.3, rys. 7.24). Podobnie dla wewnętrznego płaszcza wartość ta zmienia się od $(R'_z/R'_z)/(R''_z/R''_z)$ na dolnej krawędzi, do wartości R'_z/R''_z na krawędzi górnej.

Jeśli by w bryle dwupłaszczyznowej istniały dwa lub więcej żeber typu żebra $abcd$, to stopień statycznej niewyznaczalności odpowiednio wzrósłby. Metoda rozwiązywania zostaje przy tym bez zmian i polega na sformułowaniu układu równań $M-M$.

7.15. Przybliżona analiza zagadnień bryłowych w prętach

Przy omawianiu stosowalności modelu pręta do analizy konstrukcji (art. 6.14) stwierdzono ogólnikowo, że *zagadnienie przekształcania rozkładów normalnych naprężeń w płaszczy* (rys. 6.49 i 6.50) *jest zagadnieniem statyki bryły*. Obecnie po wyjaśnieniu właściwości, jakie ma bryła i podaniu metod jej rozwiązania (art. 7.5 i 7.11), możemy odpowiedzieć, dlaczego taka bryła jest konieczna, jakie są jej warunki pracy i jakie parametry na tę pracę wpływają.

W pierwszej z tych kwestii odpowiedź jest oczywista, jeśli przypomnieć sobie, że zamknięta dwiema ścianami głównymi bryła (rys. 7.15, 7.32) niezależnie od ukształtowania płaszcza i ewentualnych modyfikacji konstrukcyjnych (rys. 7.20a) jest *zespołem sztywnym na działanie dowolnych ciągłych lub skupionych obciążeń przyłożonych na krawędziach ścian głównych i płaszcza*. Wynika stąd, że płaszczyznowa bryła zabudowanej w konstrukcji musi łączyć się (przynajmniej na dużej części swego obwodu) z płaszczyzną reszty oraz że w przypadku skupionych sił działających wzdłuż tworzących płaszcza bryły muszą istnieć odpowiednie pasy rozprowadzające*.

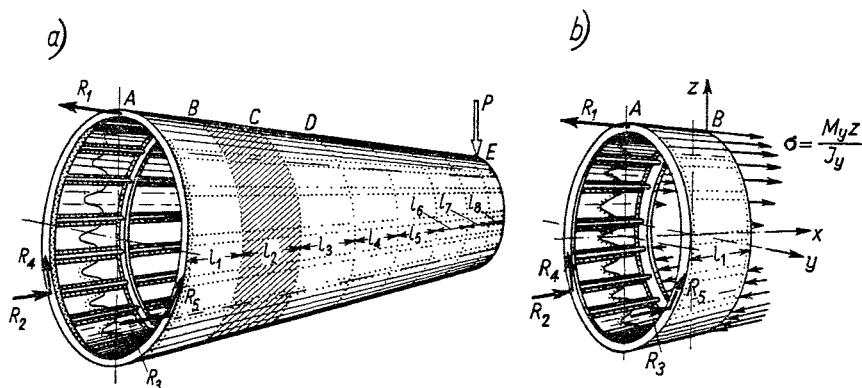
Przybliżona analiza takich brył opiera się na założeniu, że *całkowite przekształcenie naprężeń normalnych odbywa się tylko w obrębie bryły* oraz że *w miejscu połączenia płaszcza bryły z płaszczyzną reszty konstrukcji stan napięć określony jest zależnościami podanymi w rozdz. 6 dla takiej postaci przekroju, jaką w miejscu łączenia ma reszta konstrukcji*.

Wychodząc z tych założeń rozważmy konstrukcję (rys. 7.49a), w której wydzieloną myślowo bryłą jest segment AB . Obciążenie tej bryły w przekroju A stanowią skupione reakcje R , w przekroju zaś B rozłożone w sposób ciągły na obwodzie wydatki normalne $n = \sigma \delta$ i nie pokazane na rysunku wydatki styczne q . Naprężenia σ określone są przy tym ze wzorów art. 6.5, a wydatki** q ze wzorów art. 6.10, dla wypadkowych obciążeń M i T odpowiadających przekrojowi B . Parametry geometryczne, jak momenty bezwładności, momenty statyczne itp., określone są dla pręta o takim przekroju jaki ma konstrukcja w miejscu B . Po takim określeniu obciążeń widzimy, że zagadnienie statyki segmentu AB różni się od rozpatrzonych w art. 7.5 i 7.11 tym tylko, że obecnie na krawędzi B płaszcza bryły obciążenie jest ciągłe. Zmiana ta nie powoduje żadnej istotnej różnicy w przebiegu rozwiązania (rys. 7.32), które rozpoczyna się od wyznaczenia wydatków stycznych w płaszczy (rys. 7.32bc). Z uwagi na ciągłe obciążenie krawędzi B wydatki

* W przypadku działania obciążeń ciągłych wyobrażamy sobie, że każde włókno płaszcza stanowi cienki pręt biegnący wzdłuż tworzącej i połączony z sąsiednimi takimiż prętami pokryciem przenoszącym naprężenia styczne. Wskutek tego przy działaniu obciążeń ciągłych nie ma potrzeby wprowadzania żadnych nowych elementów konstrukcyjnych.

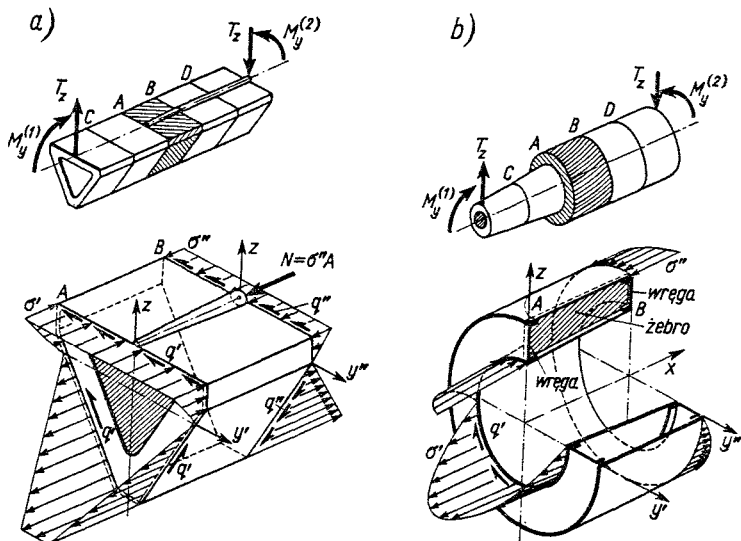
** Jeśli konstrukcja w przekroju B jest lekkobieżna, to rozkład q obliczamy z jej uwzględnieniem art. 6.12.

q (rys. 7.32c) zmienia się w sposób ciągły z przeskokami w tych miejscach, w których na drugiej krawędzi, tj. krawędzi A , przyłożone są skupione siły wzdłużne R . Wszystkie dalsze etapy obliczenia zostają bez zmian, przy czym zgodnie z założonym modelem przebieg ciągłych lub skupionych sił wzdłużnych przyjmujemy liniowo zmienny na długości tworzącej płaszc.



Rys. 7.49. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia wprowadzenia sił wzdłużnych
a) szkice konstrukcyjne; b) stan obciążenia segmentu pośredniczącego.

Identyczne w swej istocie jest przekształcenie rozkładu naprężeń normalnych (rys. 7.50a) wywołane raptowną zmianą przekrojów elementów wzdłużnych. Jeśli mianowicie w części BD i dalszych dodajemy pas, który jest niepotrzebny w części AC , to między przekrojami A i B zachodzi zmiana ele-

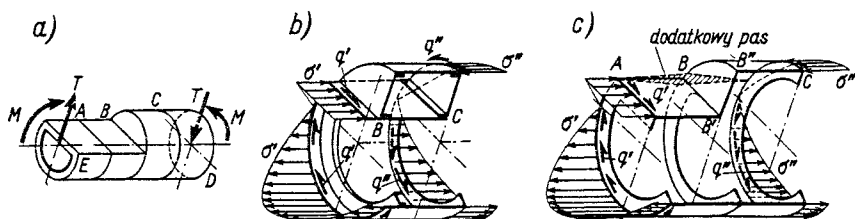


Rys. 7.50. Przybliżone rozwiązania zagadnień przekształcania rozkładu naprężeń normalnych
a) zagadnienie wprowadzenia dodatkowego pasa (lub pasów) wzdłużnych; b) zagadnienie uskoku; na obu górnych rysunkach zakreślony segment jest zespołem pośredniczącym.

mentarnego, tj. określonego ze wzorów rozdz. 6, rozkładu z σ' , q' na σ'' , q'' . Zmiana ta może być opanowana przez wstawienie pośredniczącej bryły AB , której warunki obciążeń różnią się od poprzednich (rys. 7.49a) tym, że obecnie na obu krawędziach płaszcza bryły AB obciążenia są rozłożone w sposób ciągły.

W obu omówionych przypadkach pośrednicząca bryła jednopłaszczyznowa jest prawidłową postacią zespołu przekształcającego stany napięć normalnych. Również w przypadku uskoku płaszcza (rys. 7.50b) można pośredniczącą bryłę ukształtować jako jednopłaszczyznową zbieżną tak, aby w przekroju A płaszcza jej łączył się bezpośrednio z płaszczałem części AC , a w przekroju B z płaszczałem części BD . Jeśli z pewnych względów takie rozwiązanie nie jest możliwe, to bryłę pośredniczącą należy wykonać jako dwupłaszczyznową. Statyka takiej bryły obciążonej elementarnym rozkładem σ' i q' odpowiadającym prętowi AC i rozkładem σ'' , q'' odpowiadającym prętowi BD jest w zasadzie identyczna z zagadnieniem już rozpatrzonym (rys. 7.48).

Zagadnienie częściowego uskoku płaszcza (rys. 7.51a) może być opanowane dwojako. W wariancie I (rys. 7.51b) segment BC jest bryłą pośredniczącą, której obciążenie stanowią elementarny rozkład



Rys. 7.51. Przybliżona analiza konstrukcji z częściowym uskokiern

a) szkice konstrukcji; b) opanowanie uskoku przez jeden segment pośredniczący; c) opanowanie uskoku przez dwa segmenty pośredniczące.

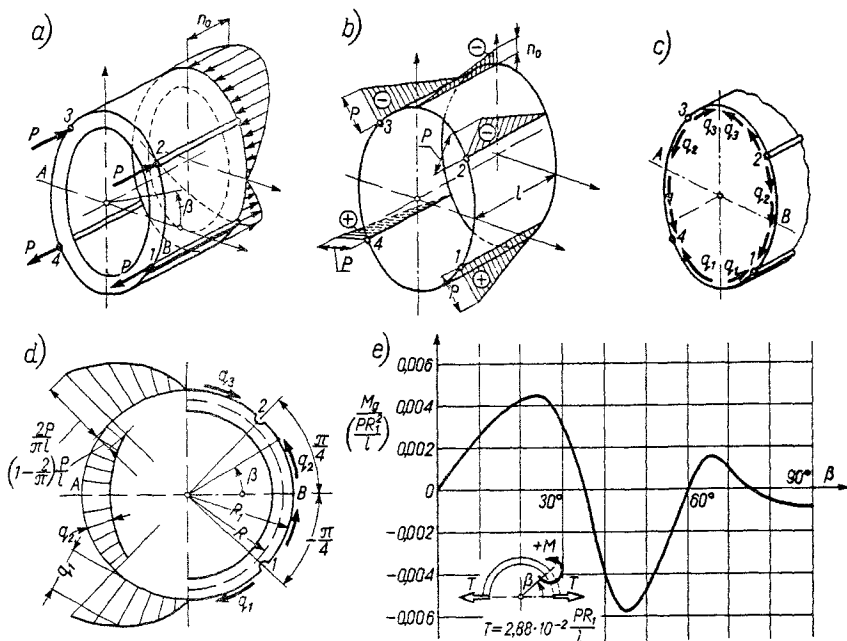
σ' i q' dla pręta AB i σ'' , q'' dla pręta CD . Obliczenie sił wewnętrznych w bryle jest zagadnieniem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym, albowiem bryła ta na części swego obwodu jest dwupłaszczyznowa (rys. 7.48).

Wariant II (rys. 7.51c) jest mniej korzystny niż poprzedni, gdyż elementarne rozkłady naprężeń mogą wystąpić dopiero w przekrojach A i C , a nie B i C jak w wariancie pierwszym*. W przekroju B naprężenia normalne przenoszą jedynie te włókna płaszcza, które nie straciły ciągłości. Powoduje to znaczne osłabienie tego przekroju, któremu tylko w części można zaradzić przez umieszczenie solidnego pasa. Orientacyjne obliczenie** przeprowadzamy zakładając dodatkowo, że w przekroju B panuje również elementarny rozkład σ odpowiadający takiemu przekrojowi, w którym naprężenia normalne przenosi dolny odcinek płaszcza wzmocniony pasem dodatkowym. Przy takim założeniu obliczamy oddzielnie bryłę AB i oddzielnie bryłę BC . Wydatki naprężeń stycznych w przekroju B części AB obliczamy według art. 7.11, przy czym na krawędzi BB' zakładamy $\sigma = 0$. Tak samo obliczamy q w przekroju B części BC , uważając, że na odcinku płaszcza BB'' $\sigma = 0$. Obciążenie wręgi B wynika z superpozycji oddziaływań płaszczy brył AB i BC .

Przykład. Cylindryczny kołowy segment skorupowy (rys. 7.52) obciążony dwoma parami sił utrzymany jest w równowadze wydatkami $n_0 \sin \beta$ proporcjonalnymi do odległości od osi AB . Wyznaczyć siły wewnętrzne w konstrukcji.

* W przekroju B wzdłużne włókna płaszcza BC na odcinku BB'' nie mogą przenosić naprężeń normalnych, gdyż nie są w tym kierunku podparte. To samo w tymże przekroju dotyczy włókien płaszcza AB na odcinku BB' .

** Obliczenie bardziej dokładne jest dość złożonym zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym, nawet przy założeniu, że w przekrojach A i C istnieją elementarne rozkłady σ i q .



Rys. 7.52. Przykład analizy segmentu pośredniczącego

a) układ obciążeń; b) przebieg sił wzdłużnych w pasach, c) układ wydatków stycznych w przekroju poprzecznym segmentu; d) układ oddziaływań na wręgę AB segmentu; e) przebieg M_g we wrędze.

Rozwiązanie. Określając wydatki n_0 z warunku równowagi momentów względem prostej AB otrzymujemy

$$2PR_1\sqrt{2} = - \int_0^{2\pi} (n_0 \sin \beta R_1 d\beta) R_1 \sin \beta,$$

skąd $n_0 = -2\sqrt{2} P/\pi R_1$, co odpowiada ścisnaniu, gdy $0 < \beta < 180^\circ$. Wydatki normalne w pokryciu oraz siły w pasach wprowadzających siły P są zmienne liniowo wzdłuż tworzącej (rys. 7.52b).

Obliczenie wydatków stycznych jest tu uproszczone, gdyż z uwagi na symetrię konstrukcji i symetrię obciążenia dla $\beta = \pm 90^\circ$ $q = 0$. Rozcinając zatem pokrycie wzdłuż dolnej tworzącej, mamy ze wzoru (b) art. 7.11:

$$q_1 = 0 - \frac{1}{l} \int_{-\pi/2}^{\beta} (-n_0 \sin \beta R) d\beta = -(2\sqrt{2}/\pi)(P/l) \cos \beta \quad (-90^\circ \leq \beta < -45^\circ)$$

i podobnie

$$q_2 = (P/l)[1 - (2\sqrt{2}/\pi) \cos \beta] \quad (-45^\circ < \beta < 45^\circ),$$

$$q_3 = -(2\sqrt{2}/\pi)(P/l) \cos \beta \quad (45^\circ < \beta \leq 90^\circ).$$

Rzeczywiste zwroty q są takie jak na rys. 7.52c. Układy oddziaływań na wręgę lewą (rys. 7.52d) i prawą różnią się tylko zwrotem. Z uwagi na symetrię obciążenia* względem osi poziomej za-

* Sprawdzenie równowagi wręgi i jej rozwiązanie zostawia się czytelnikowi.

danie obliczenia sił wewnętrznych jest 1-krotnie statycznie niewyznaczalne. Wartość siły tnącej T w przekroju na osi poziomej wynosi

$$|T| = \frac{PR_1}{l} \left(\frac{3}{\pi\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \approx 2,88 \cdot 10^{-2} \frac{PR_1}{l}.$$

Momenty gnące w jednej z wręg np. prawej są antysymetryczne względem osi poziomej, symetryczne względem pionowej i wyrażają się

$$\begin{aligned} M &= TR_1 \xi \sin \beta - \frac{PR_1^2}{l} \left[\left(1 + \xi \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \beta \right) \beta - \sin \beta \left(\xi + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \xi \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) \right] \quad (0 \leq \beta \leq 45^\circ), \\ M &= TR_1 \xi \sin \beta - \frac{PR_1^2}{l} \left[\left(\frac{\pi}{4} + \xi \frac{\sqrt{2}}{\pi} \beta \cos \beta \right) - \sin \beta \left(\xi + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \xi \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \xi \sin \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (45^\circ \leq \beta \leq 90^\circ), \end{aligned}$$

gdzie $\xi = R/R_1$. Wykres momentów dla $\xi = 0,9$ podaje rys. 7.52e.

Parametrem wpływającym w sposób zasadniczy na stan napięć w pośredniczącej bryle jest jej długość, gdyż wydatki styczne w jej płaszczu są odwrotnie proporcjonalne do długości płaszcza. Wydatki te z kolei obciążają ściany główne (rys. 7.32 i 7.52) i zmniejszenie ich wartości pociąga odpowiednie zmniejszenie sił wewnętrznych w ścianach. Ponieważ ściany główne zmodyfikowane zazwyczaj do postaci wręg są niewralgicznymi elementami bryły, to mogłoby się wydawać, że długość bryły winna być możliwie duża. Tak jednak nie jest, gdyż z drugiej strony *ogólną wytyczną przy kształtowaniu ustroju winno być zrealizowanie odpowiadającego modelowi pręta stanu napięć w możliwie dużej części ustroju**. Z tego powodu dążymy do skracania odcinka przejściowego, jakim jest pośrednicząca bryła. Z tych dwóch przeciwstawnych tendencji wybieramy pewien kompromis przez takie ukształtowanie pośredniczącej bryły, aby jej długość $l \approx 0,3 \div 0,5c$ (c — maksymalny gabarytowy wymiar poprzedniego przekroju konstrukcji).

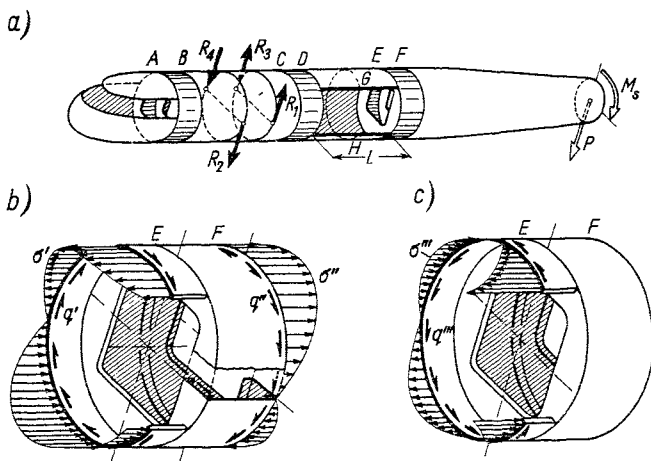
Dokładność przedstawionej tu przybliżonej analizy zależy w dużym stopniu od względnej sztywności głównych ścian pośredniczącej bryły w stosunku do sztywności istniejących w bezpośrednim otoczeniu reszty konstrukcji analogicznych zeber (wręg, przepon itd.). Jeśli mianowicie stosunek ten jest duży, np. 8, to dokładność analizy przybliżonej jest też duża (rzędu 85% wartości rzeczywistych). Innymi słowy, gdyby w konstrukcji rys. 7.49a wręgi A i B były ~ 8 -krotnie bardziej sztywne niż wręgi C i D , to należy oczekiwać, że wynik dokładnej analizy konstrukcji nie będzie się różnić o więcej niż 15% od wyników analizy przybliżonej. Inaczej przedstawia się sytuacja, gdy sztywność wszystkich wręg jest tego samego rzędu. W tym przypadku niezbędne jest uzupełnienie przybliżonej analizy przez rozwiązanie zagadnienia statycznie niewyznaczalnego (rozdz. 8). Podana tu wskazówka winna uświadomić konstruktorowi, że przez odpowiednie zwymiarowanie elementów pośredniczącej bryły może on sterować przebieg sił wewnętrznych w zamierzonym przez siebie kierunku.

7.16. Przybliżona analiza wpływu wykrojów i załomów

Do tego samego schematu, co i opisany w art. 7.15, sprowadzają się zagaamienia opanowania i analizy wykrojów i raptownych załomów. W przypadku konstrukcji z wy-

* Przy pracy konstrukcji według modelu pręta naprężenia w niej są z reguły najmniejsze z wszystkich możliwych stanów napięć.

krojem na odcinku DE (rys. 7.53a) zachodzi zmiana rozkładu naprężeń normalnych w miejscach przejścia od części nieosłabionych do części DE . Prawdłowe opanowanie tych zmian wymaga zatem wprowadzenia dwóch brył CD i EF . Stan obciążonej każdej z brył, np. bryły EF (rys. 7.53b,c), określamy jak poprzednio. I tak w jednoobwodowym przekroju F naprężenia σ'' i wydatki q'' obliczamy ze wzorów art. 6.5 i 6.10 lub 6.12, o ile w tym przekroju płaszcz jest zbieżny. W otwartym przekroju E obliczenie stanu



Rys. 7.53. Przybliżona analiza wykrojów w konstrukcji skorupowej

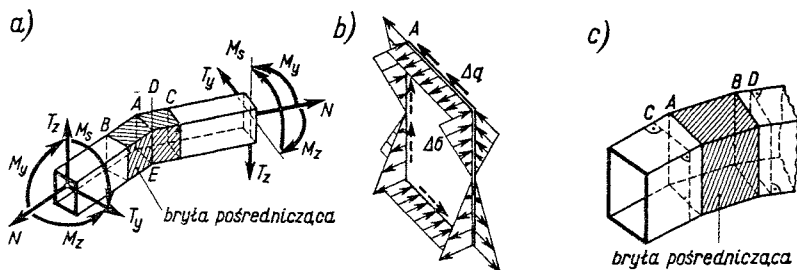
a) szkice ustroju z zaznaczonymi segmentami pośredniczącymi; b) układ obciążeń segmentu EF odpowiadający działaniu momentów gnących i sił poprzecznych; c) układ obciążeń odpowiadający samemu tylko skręcaniu.

obciążeń dzielimy na dwa etapy, z których pierwszy obejmuje wyznaczenie σ' i q' przy bezskręciowym przeniesieniu sił tnących (art. 6.5 i 6.6). Etap drugi rozpoczynamy od wyznaczenia położenia środków sił poprzecznych i wartości momentów skręcających $M_E = M_D$ w przekrojach D i E (art. 6.6). Stan naprężeń σ''' i q''' wynikający z nieswobodnego skręcania odcinka DE określonymi poprzednio momentami wyznaczamy według wskazówek art. 6.7÷6.9, przy czym zakładamy, że odcinek DE jest utwardzony w przekrojach D i E . Mamy tu* więc zagadnienie podobne do rozpatrzonego na rys. 6.28c, gdy $a = 0$, $b = l$, a $M_0 = M_E = M_D$. Ostateczny stan naprężeń w przekroju E otrzymany z superpozycji σ' i σ''' oraz q' i q''' tworzy wraz z σ'' i q'' układ obciążeń utrzymujących w równowadze bryłę EF . Zupełnie podobnie określa się stan obciążeń bryły AB pośredniczącej między nieosłabioną częścią BC i osłabioną wykresem częścią nabudowaną z lewej strony na tej bryle. Samą analizę stanu naprężeń w bryłach pośredniczących AB , CD i EF przeprowadzamy jak w art. 7.15.

Zagadnienie statyki załomu jest, jak już wspomniano w art. 6.14, zagadnieniem statyki bryły. Gdyby bowiem przypuścić, że w obu częściach załamanej konstrukcji (rys. 7.54a) panuje elementarny rozkład naprężeń aż do płaszczyzny żebra A , to okazałoby

* Uzasadnienie tego założenia podano w art. 8.11.

się, że układ oddziaływań $\Delta\sigma$ i Δq na to żebro aczkolwiek samozrównoważony składa się nie tylko z obciążeń leżących w płaszczyźnie żebra, lecz i obciążeń do tej płaszczyzny prostopadłych (rys. 7.54b). Tych ostatnich obciążeń samo żebro przejąć nie może, gdyż z założenia jest ono bardzo podatne w kierunku prostopadłym do swej płaszczyzny. Prawdźliwe opanowanie tej różnicy oddziaływań normalnych do płaszczyzny żebra możemy otrzymać przez wstawienie bryły pośredniczącej BAC (zakreskowanej na rys. 7.54a).



Rys. 7.54. Przybliżona analiza załomu

Układ obciążeń tej bryły w obu jej przekrojach B i C stanowią rozkłady σ i q określone z zależności rozdz. 6.

Obliczenie takiej dwusegmentowej bryły jest dość złożonym zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym. Pewne bardzo orientacyjne dane można uzyskać zakładając, iż w przekroju A panuje również elementarny rozkład naprężeń określony tak, jak gdyby był on przekrojem pryzmatycznego pręta o osi prostopadłej do płaszczyzny żebra A . W rzeczywistości rozkład naprężeń normalnych w przekroju A wykazuje dość znaczne spiętrzenie w wewnętrznym odcinku DE . Jest ono tym większe, im większy jest kąt załomu.

Zamiast opisanego rozwiązania można zastosować jednosegmentową bryłę pośredniczącą, dzielącą dany załom na dwa mniejsze (rys. 7.54c). Rozkład naprężeń w przekrojach A i B obliczamy z zależności rozdz. 6. Jeśli przekroje te nie są prostopadłe do tworzących płaszcza części łączonych, to najpierw obliczamy układ naprężeń w przekrojach C i D prostopadłych do odpowiednich tworzących płaszcza, a dopiero potem określamy stan naprężeń w przekroju ukośnym, wykorzystując przy tym zależności z koła Mohra.

7.17. Zadania

1. Zakładając, że w pasach tarczy (rys. 7.2) $\sigma \leq k_r = 1000 \text{ kG/cm}^2$, a w ściance $\tau \leq 0,5\tau_{kr}$, dobrać przekroje pasów i grubość ścianki, jeśli $l = 1,5h = 1,2 \text{ m}$, $P'' = 2P' = 4 \text{ t}$, $E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ kG/cm}^2$, $\tau_{kr} = 6,8E\delta^2/h^2$ (rys. 11.4).

2. W tarczy (rys. 7.4) $\angle ADC = \angle BCD = 85^\circ$, $AD = DC = 1,6 \text{ m}$, $BC = 1,5 \text{ m}$, siły $P_A = P_B = 2 \text{ t}$ tworzą z prostą AB kąty 25° . Wyznaczyć przebieg sił wewnętrznych w pasach i ściance.

3. Powtórzyć zadanie 2 zmieniając tylko długość $BC = 1,6 \text{ m}$. Zbadać według danych (rys. 7.5c) stan naprężeń w ścianie i przebieg sił w pasach AD i BC .

4. Tarcza (rys. 7.6) obciążona w węzłach B i C równymi sobie i przeciwnie skierowanymi siłami $P = 5 \text{ t}$. Obliczyć przebieg sił w pasach AC i AB ($r_1 = 1 \text{ m}$, $h = 0,5 \text{ m}$, $BD = 1 \text{ m}$).

5. W tarczy (patrz zad. 1) ściankę wykonano jako blachę falistą o kierunku fal równoległym do AC . Kształt fal jest prostokątny, $b = 8$ cm, $h = 2$ cm (rys. 7.7). Wyznaczyć grubość blachy, jeśli teraz $\tau_{kr} = 4,8E(\delta/b)^2$.

6. Dokończyć przykład (rys. 7.12) dla części tarczy $IKBD$.

7. Wyznaczyć całkowite przemieszczenie węzła C tarczy z zad. 1, jeśli $G/E = 0,385$. Jak zmieni się ten wynik, jeśli ściankę wykonać z blachy falistej ($b \times h = 8$ cm $\times$ 2 cm, $\delta = 1$ mm) o kierunku fal równoległym do AC ?

8. W zagadnieniu (rys. 7.17) $q'_1 = q''_1 = 60$ kG/cm, $l'_1 = l''_1 = 50$ cm, $l'_2 = 1,5l''_2 = 60$ cm, $l = 100$ cm, a równowagę pręta AB zapewnia odpowiednia siła wzdłużna przyczepiona w A . Wyznaczyć przebieg sił w przecie AB .

9. Cienkościnną bryłę (rys. 7.18) obciążono w węzłach A, B, C i D samozrównoważonym układem sił $P_A = -P_B = P_C = -P_D = 5$ t prostopadłych do płaszczyzny $ABCD$ (porównaj rys. 3.6). Obliczyć siły i wydatki styczne w elementach tarczy $ABCD$.

10. Cienkościnną bryłę (rys. 7.15) jest pryzmatyczna, a wszystkie ścianki płaszcza prostokątne. Sześciokątne jednakowe tarcze składają się z kwadratu, np. $HEAF$, o boku $a = 1,5$ m oraz dwóch trójkątów równobocznych i są odległe od siebie o $l = 1,5$ m. Wyznaczyć siły wewnętrzne w elementach płaszcza, jeśli jedynym obciążeniem jest $P_2 = 5$ t zrównoważona odpowiednio określonymi reakcjami $R_1, \dots, R_6$.

11. W bryle z zad. 10 usunięto ścianę $ABCD$, wprowadzając w zamian pręty AC i BD . Zakładając, że wszystkie pręty tej ściany mają jednakowy przekrój, wyznaczyć siły w tych prętach.

12. W bryle (rys. 7.21) całą górną ścianę zastąpiono jednoobwodową ramą zbudowaną z jednakowych prętów. Wyznaczyć przebieg momentów gnących w tej ramie.

13. Ścianka stanowiąca odcinek prostego kołowego stożka (rys. 7.24b) ma wymiary $BC = 1,25$ m, $AD = AB = 1$ m. Średnia wartość wydatku stycznego na łuku AB jest 50 kG/cm. Wyznaczyć wydatki styczne na pozostałych krawędziach.

14. W trójpasowym dźwigarze (rys. 7.27) pasy A, B i C leżą w wierzchołkach równoramiennego trójkąta ($AB = BC$, $h_2 = 40$ cm, $a_2 = 60$ cm). Ścianki AB i AC są łukami kół o promieniu $r = 1,2$ m, ścianka AC jest płaska. Wyznaczyć siły wewnętrzne, jeśli obciążenie danego przekroju jest $M_y = 2$ tm, $M_z = -2$ tm, $N_x = -10$ t, $M_s = 1$ tm, $T_y = -1$ t, $T_z = 2$ t, a środek redukcji O pokrywa się z punktem A .

15. Wyznaczyć jednostkowy kąt skręcenia dźwigara z zad. 14, jeśli $\delta = \text{const} = 1$ mm, a $G = 2,8 \cdot 10^5$ kG/cm².

16. Jak zmieniają się siły wewnętrzne w dźwigarze z zad. 14, jeśli pasy są zbieżne, rzut ich punktu przecięcia na płaszczyznę przekroju leży w połowie boku AC , a kąt $\gamma_2 = 3^\circ$ (patrz również rys. 7.28).

17. Bryła (rys. 7.32) jest podwójnie symetrycznym stożkiem, w którym górna ściana złożona jest z kwadratu $HEAF$ o boku 1,6 m i dwóch półkoli o promieniu $r = 0,8$ m. Ściana dolna odległa od górnej o $l = 1,2$ m ma odpowiednie wymiary 1,25 raza większe niż ściana górna. Wyznaczyć siły wewnętrzne w płaszczu, jeśli jedynym obciążeniem jest pionowa siła $P_3 = 5$ t, zrównoważona pionowymi reakcjami R_1, R_3 i R_5 . Reakcja R_3 działa w płaszczyźnie symetrii.

18. Jak zmieniają się wydatki styczne w płaszczu bryły (rys. 7.21), jeśli usuwając ściankę $ABGF$ dodać do trzech istniejących pionowych reakcji czwartą pionową reakcję w węźle J ?
Wskazówka. Zadanie jest analogiczne do rozpatrzonego na rys. 7.34.

19. Bryłę z zad. 17 osłabiono przez usunięcie ścianki $ABCD$, dodając w zamian pionową reakcję w punkcie H . Obliczyć wartości wydatków stycznych w płaszczu bryły.

20. Konstrukcja (rys. 7.35) jest walcem kołowym z regularnie rozstawionymi pasami i prostokątnymi ściankami $ABED, BCFE$, przy czym promień walca $r = 0,5$ m, jego długość $l = 1$ m, $AB = BC = r$, $\angle CBA = 135^\circ$, a punkty G, C i B leżą na jednej prostej. Obliczyć wydatki styczne w płaszczu, jeśli $P_1 = P_2 = 2$ t, $P_3 = P_4 = 0$, a równowagę zapewniają reakcje R .

21. Zakładając, że w konstrukcji z zad. 20 wszystkie pasy są jednakowe $A = 3 \text{ cm}^2$, grubość wszystkich ścianek $\delta = 1,2 \text{ mm} = \text{const}$, a ściany główne nieodkształcalne, obliczyć pionowe przesunięcie punktu L , jeśli $E = 2,7G = 7 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, a punkty przyłożenia sił R są nieruchome.

22. Kołowy pierścień ($R = 0,8 \text{ m}$) o przekroju dwuteowym ($l = 20 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$, $\delta_p = 2\delta = 1,2 \text{ cm}$) ustawionym względem płaszczyzny ramy tak, jak na rys. 7.37b, obciążono sześcioma pionowymi siłami $P = 1 \text{ t}$ rozstawionymi co 60° na obwodzie i skierowanymi na przemian do góry i do dołu. Obliczyć maksymalne naprężenia w półkach dwuteówki.

23. Rama z zad. 22 obciążona jest tak, jak podaje rys. 5.36, przy czym $P = 1 \text{ t}$. Wyznaczyć przebieg M_g w półkach.

24. W konstrukcji (rys. 7.40) usunięto w bloku C ściankę między pasami 6 i 7, wstawiając w zamian płaską ściankę między pasami 2 i 3. Czy tak zmodyfikowana konstrukcja jest prawidłowa i statycznie wyznaczalna? Czy można w zamian tej płaskiej ścianki wstawić w dźwigarze B płaską ściankę między pasami 5 i 8?

25. W dźwigarze A konstrukcji (rys. 7.40) usunięto ściankę łączącą pasy 1 i 2 na odcinku między blokiem C i sąsiadującymi z nim żebrawi dźwigara A . Jakie elementy należy wprowadzić, aby konstrukcja była nadal sztywna i statycznie wyznaczalna.

26. W konstrukcji (rys. 7.43) zamknięto ściankami dźwigary A , B i C tak, że obecnie ich przekroje są skrzynkami czteropasowymi. Ilorotnie statycznie niewyznaczalna jest ta konstrukcja?

27. Rozwiązać konstrukcję (rys. 7.45) przy obciążeniu jej poziomą siłą P przyłożoną w węźle C .

28. Zakładając, że w konstrukcji (rys. 7.46) $l = 1 \text{ m}$, $R = 0,5 \text{ m}$, $A = 3 \text{ cm}^2$, $\delta = 1,2 \text{ mm}$, $M_s = 1 \text{ tm}$, obliczyć kąt obrotu wręgi przy $E = 2,7G = 7 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.

29. Obciążenie konstrukcji (rys. 7.46) stanowi pozioma siła $P = 1 \text{ t}$ leżąca w płaszczyźnie wręgi i działająca wzdłuż jej górnej krawędzi. Zakładając wymiary konstrukcji, jak w zad. 28, obliczyć siły wewnętrzne w jej elementach.

30. Zakładając, że konstrukcja (rys. 7.48) jest cylindryczna ($R_z = 1,2$, $R_w = 1 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$), obliczyć w niej siły wewnętrzne, jeśli na wewnętrznym brzegu górnej wręgi działa pionowo równomierne ciągle obciążenie $n = 12 \text{ kG/cm}$ zrównoważone odpowiednio dobranym również równomiernym obciążeniem przyłożonym do zewnętrznego brzegu dolnej wręgi.

31. Jak zmieniają się wyniki poprzedniego zadania, jeśli zamiast jednego żebra $abcd$ dać trzy żebra rozstawione jednakowo na obwodzie?

32. W konstrukcji (rys. 7.52) ($R_1 = 0,4 \text{ m}$, $l = 0,5 \text{ m}$) obciążenie ciągle $n = n_0 \sin \beta$ ($n_0 = 50 \text{ kG/cm}$) zrównoważone jest dwiema skupionymi siłami $P = 3140 \text{ kG}$ przyłożonymi wzdłuż tworzących określonych przez $\beta_1 = 90^\circ$ i $\beta_2 = -90^\circ$. Obliczyć momenty gnące na wrędze AB , jeśli $R = 0,35 \text{ m}$.

8. STATYKA USTROJÓW WIELOSEGMENTOWYCH

8.1. Podstawowy i korygujący stan napięcie

Rozpatrzone w rozdz. 6 i 7 ustroje opierały się na modelu pręta lub bryty. Przechodząc obecnie do analizy ustrojów stanowiących pośrednie ogniwo między tymi skrajnościami, jak ustrój pokazany na rys. 7.49, zauważmy, że ustroje takie jako całość można potraktować w dwojaki sposób. Pierwszy z nich polega na sprowadzeniu takiego ustroju do modelu krępego cienkościennego pręta unieruchomionego w przekroju A i obciążonego w przekroju E siłą P powodującą jego zginanie. Wynik odpowiedniej analizy przeprowadzonej według wskazówek rozdz. 7 nasuwa jednak istotne wątpliwości zwłaszcza w takich kwestiach, jak przebieg sił wewnętrznych w okolicy przekroju A czy E , nawet jeśli w przybliżony sposób wydzielimy pewne zagadnienia jako zagadnienia statyki brył (patrz art. 7.15 i 7.16).

Drugi sposób polega na potraktowaniu rozpatrywanego ustroju jako zespołu półskorupowych brył. Analizując bowiem ustrój (rys. 7.49) możemy wyobrazić sobie, iż powstał on z połączenia ośmiu segmentów (brył), z których każdy ma budowę podobną do podanej na rys. 7.15 lub 7.32. Samo połączenie wyobrażamy sobie nie tylko jako zespolenie się w jedną całość odpowiadających sobie tarcz (węg, żeber) sąsiadujących segmentów, lecz także jako złączenie pasów płaszcza. Przy tym złączeniu każdy z segmentów opiera się o sąsiadujące z nim segmenty z reguły w więcej niż trzech punktach, na skutek czego konstrukcja jako całość staje się statycznie niewyznaczalna*. W takim ujęciu płaszcz ustroju przedstawia się jako szereg wzdlużnych pasów złączonych ze sobą ściankami pracującymi na ścinanie. Każdy z pasów z kolei dzieli się na szereg odcinków o długościach równych długości segmentów. Dzięki temu możemy wnikać bardziej dokładnie w sposób pracy ustroju, gdyż warunki, w jakich pracuje dany odcinek pasa, zależą nie tylko od wypadkowego obciążenia, np. momentu gnącego w danym przekroju całej konstrukcji, lecz również od tego, jaka jest podatność sąsiadujących elementów. W szczególności na przykład rozkład sił w pasach przy zginaniu całości ustroju wcale nie musi być taki, jak to opisują wzory art. 6.5, gdyż zależy od tego, w jakim stopniu pasy te znajdują oparcie w pasach sąsiadujących segmentów.

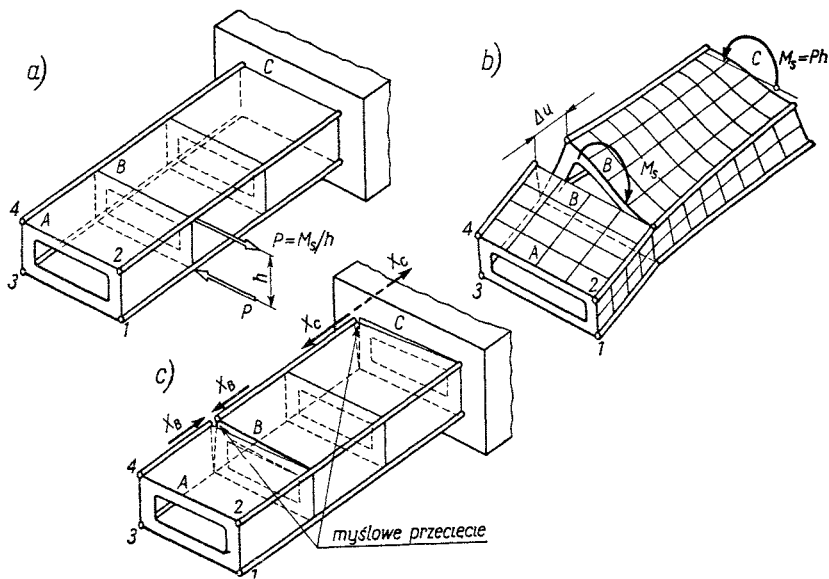
Ten drugi sposób ujęcia zagadnienia jest niewątpliwie znacznie bardziej złożony aniżeli rozważania opisane w rozdziale 6 i 7. Powstaje więc pytanie, kiedy tego rodzaju

* Każdy z segmentów jest sam w sobie sztywny (patrz art. 7.5 i 7.11) i do jego unieruchomienia wystarcza 3-punktowe podparcie. Złączenie sąsiadujących segmentów w więcej niż trzech punktach jest merytorycznie podobne do zagadnienia podanego na rys. 7.47.

złożona analiza jest wskazana. Jak pouczają wyniki teoretyczne i doświadczalne, znaczne odchylenia od modelu pręta obserwujemy w przypadkach:

- a. raptownej zmiany wypadkowych obciążeń w sąsiadujących segmentach,
- b. wprowadzenia wzdłużnych obciążeń skupionych,
- c. raptownych zmian sztywności elementów (wzmocnień, wykrojów itp.).

Aby zilustrować powyższe przypadki od strony fizycznej, rozpatrzmy półskorupową 4-pasową konstrukcję (rys. 8.1) obciążoną w płaszczyźnie zębra B momentem M_s . Jeśli sprowadzić ten ustrój do modelu pręta, to stosując wzory art. 6.2 otrzymamy w części BC równomierny wydatek styczny $q = M_s/2F$,

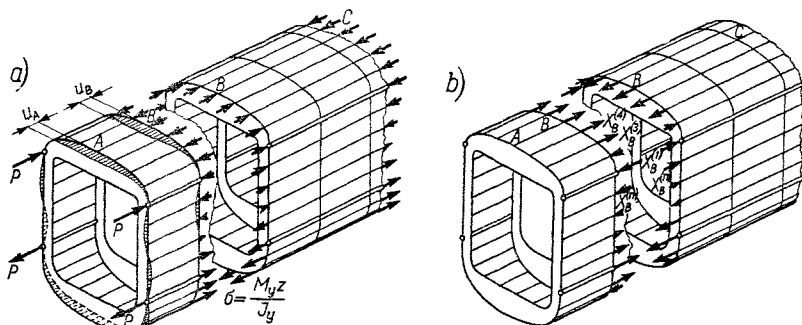


Rys. 8.1. Wyjaśnienie powstawania dodatkowych (korygujących) układów napięć

- a) szkic 3-segmentowej konstrukcji półskorupowej; b) podstawowy stan napięć, Δu — nieciągłość przemieszczeń wywołana spaceniem części BC ; c) dodatkowe siły wzdłużne X usuwające nieciągłość przemieszczeń.

podczas gdy zewnętrzna część AB jest przy tym nieczynna. Tak określony stan napięć nie zapewnia jednak ciągłości przemieszczeń w dwóch przekrojach, a mianowicie B i C . Jak wiemy bowiem z art. 6.2, skręcaniu rur towarzyszy na ogół spaczenie przekroju poprzecznego, wobec czego obydwie przekroje końcowe B i C części BC przestają być płaskie. Jeśli zatem nie dokładając żadnych dodatkowych sił będziemy chcieli połączyć odkształconą część BC z nieodkształconą AB , to połączenie takie zapewnimy tylko między pasami 1, 2 i 3 obu części (rys. 8.1b). Natomiast na skutek spaczenia przekroju B części BC między pasem 4 tej części a tymże pasem części AB powstanie szczelina, tj. nieciągłość przemieszczeń. To samo da się powiedzieć o przekroju C , gdzie pas 4 części BC ma tendencję wciśnięcia się w nieodkształcalną podstawę. Do usunięcia powstających nieciągłości przemieszczeń potrzebne są dodatkowe siły wzdłużne X_B oraz X_C (rys. 8.1c), których działanie rozprzestrzeni się na całość konstrukcji. Gdyby konstrukcja miała więcej pasów niż cztery, to takich nieciągłości przemieszczeń byłoby odpowiednio więcej, w związku z czym pojawiłyby się więcej nieznanymi sił wzdłużnych X . Opisany przykład ilustruje wymieniony powyżej przypadek a (w przekroju B) i przypadek c (w przekroju C). Ilustracją przypadku b) jest obciążenie kadłuba układem sił wzdłużnych w przekroju A (rys. 7.49). Gdyby założyć, jak to zrobiono w art. 7.15, że począwszy od przekroju B (rys. 8.2a) rozkład napięć określony jest jak dla pręta

wzorami art. 6.5, to łatwo spostrzec, że w przekroju B powstanie nieciągłość przemieszczeń. Przy stałej bowiem wartości momentu gnącego, przekrój B części BC zostaje płaski, podczas gdy tenże przekrój B części AB ulega spaceniu. Do usunięcia tej nieciągłości przemieszczeń konieczne jest wprowadzenie w przekroju B układu wzdlużnych sił X , których działanie rozprzestrzenia się na całą konstrukcję.



Rys. 8.2. Wyjaśnienie powstawania dodatkowych (korygujących) układów napięć

a) podstawowy stan napięć; b) korygujący stan napięć (siły $X_B^{(i)}$). Sił $X_B^{(i)}$ jest tyle, ile jest pasów. Spełniają one trzy warunki równowagi tak, że niezależnych niewiadomych jest $n-3$ (n — liczba pasów).

Ilościowe określenie sił wewnętrznych przy takim modelu konstrukcji sprowadza się do sformułowania i rozwiązania odpowiedniego układu równań Maxwella—Mohra wyrażającego warunki ciągłości przemieszczeń w przekrojach wręg (zeber) ograniczających sąsiadujące segmenty. Jako stan zerowy przyjmujemy stan napięć odpowiadający potraktowaniu danego ustroju jako cienkościennego pręta z ewentualną korektą wynikającą z wydzielienia zagadnień bryłowych (art. 7.15 i 7.16). Założenie takie jest merytorycznie poprawne (patrz reguła zamiany stanu „0” w art. 1.4), pozwala wykorzystać wszystkie wyniki z rozdz. 6 i 7. Dodatkową cenną zaletą tego założenia jest możliwość porównania wyników elementarnej teorii opartej na modelu pręta lub bryły z korektą, jaką wnosi uwzględnienie współdziałania wszystkich elementów ustroju. Biorąc to pod uwagę, tak określony pierwszy stan napięć będziemy nazywać *podstawowym*, podczas gdy drugi stanowiący korektę pierwszego nazywać będziemy stanem *korygującym*.

Cechą charakterystyczną przedstawionego sposobu rozwiązania jest to, że liczba równań $M-M$ jest na ogół bardzo duża (rzędu, kilkudziesięciu i więcej). Z tego powodu naturalne jest dążenie do uproszczenia zagadnień tak, aby wyniki można było otrzymać ze stosunkowo małym nakładem pracy. Uproszczenia te mogą polegać na zmniejszeniu liczby niewiadomych przez redukcję liczby pasów (patrz art. 8.12), bądź przez uproszczenie kształtu konstrukcji. Ilustracją tego drugiego rodzaju uproszczeń jest na przykład zastąpienie rzeczywistej konstrukcji (rys. 8.3a) konstrukcją skrzynkową o przekroju prostokątnym (rys. 8.3b). Dzięki temu obie powłoki stają się płaskimi tarczami pozwalając na znaczne uproszczenie analizy (patrz art. 8.2). Minusem takiej redukcji liczby pasów jest to, że pola ich przekrojów zależą od charakteru obciążeń. Jeśliby bowiem w konstrukcji zastępczej rys. 8.3b usunąć wszystkie pasy z wyjątkiem czterech narożnych, to dla możliwie prawidłowego określenia sił wewnętrznych należy pola ich przekrojów dać inne, gdy zgięcie zachodzi w płaszczyźnie pionowej, inne zaś gdy zachodzi w płaszczyźnie poziomej.

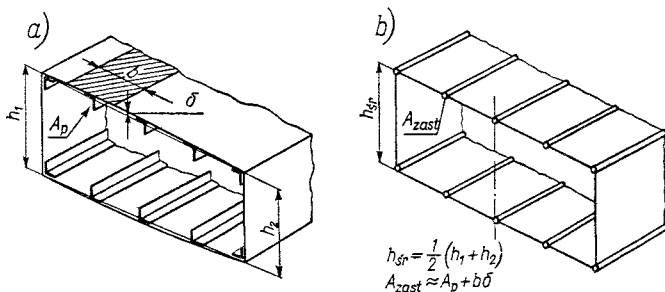
W pierwszym bowiem z tych przypadków pole przekroju pasa narożnego jest

$$A_{zast} \approx 2,54p + 2b\delta + (h\delta_p/6),$$

podezas gdy w drugim

$$A_{zast} \approx A_p + (h_{sr}\delta_p/2) + (4b\delta/6),$$

przy czym δ_p jest grubością ścianki pionowej. Druga wada redukcji liczby pasów polega na tym, iż rozwiązanie konstrukcji uproszczonej nie oddaje wiernie sił we wszystkich elementach konstrukcji rzeczywistej. Ma ona jednak mniejsze znaczenie, gdyż informacje, których żądamy, aby prawidłowo zwymiarować ustrój, ograniczają się do wskazania maksymalnych sił w pasie i wydatków stycznych



Rys. 8.3. Przykład uproszczenia kształtu konstrukcji

w pokryciu. Te zaś informacje, jak uczy porównanie wyników obliczeń uproszczonych konstrukcji z wynikami doświadczeń nad konstrukcjami rzeczywistymi, można otrzymać z zadowalającą ($5 \div 10\%$) dokładnością.

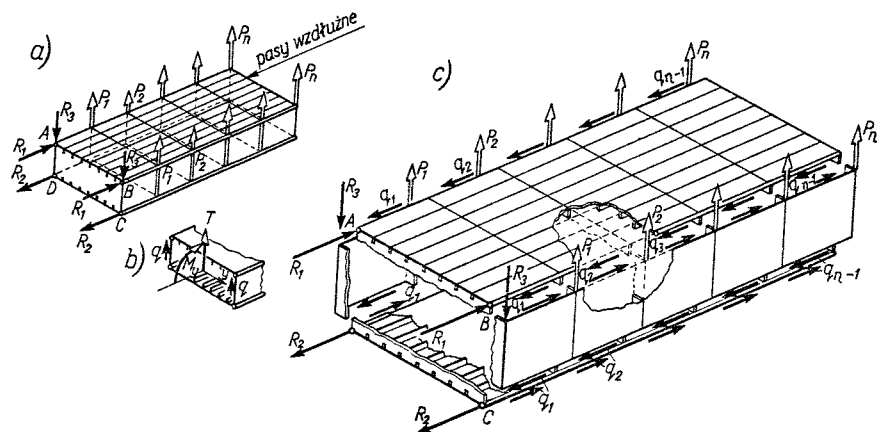
Odrębną grupę uproszczeń daje w przypadku konstrukcji symetrycznych podział obciążeń na symetryczne i antysymetryczne, dzięki czemu zagadnienie dzieli się na dwa prostsze.

8.2. Zagadnienia redukujące się do analizy tarcz płaskich

Przypuśćmy, że wielosegmentowa konstrukcja ma prostokątny przekrój poprzeczny symetryczny względem osi pionowej, ze ściankami pionowymi pracującymi tylko na ścinanie (rys. 8.3b). Analiza korygujących stanów napięć (art. 8.1) dzieli się na dwa zagadnienia, a mianowicie: przypadek obciążenia symetrycznego i przypadek obciążenia antysymetrycznego. Pierwszy z nich sprowadza się do analizy płaskich pokryw górnego i dolnego obciążonych w ich płaszczyznach, tzw. tarcz. Z uwagi bowiem na symetrię obciążenia wydatki styczne w pionowych ściankach są jednakowe. Wartość ich $q = T/2h$ (T — siła tnąca w danym przekroju) określona z warunku równowagi rzutów na oś symetrii nie zależy zupełnie od tego, czy konstrukcja jest jedno czy wielosegmentowa. Dzieląc zatem taką konstrukcję na zespoły (rys. 8.4) mamy jednoznacznie określony układ oddziaływań na tarczę górną i dolną. Zamiast więc rozpatrywać zagadnienie współdziałania zespołu przestrzennych segmentów, możemy oddzielnie rozpatrywać statykę tarczy górnej i oddzielnie statykę tarczy dolnej.

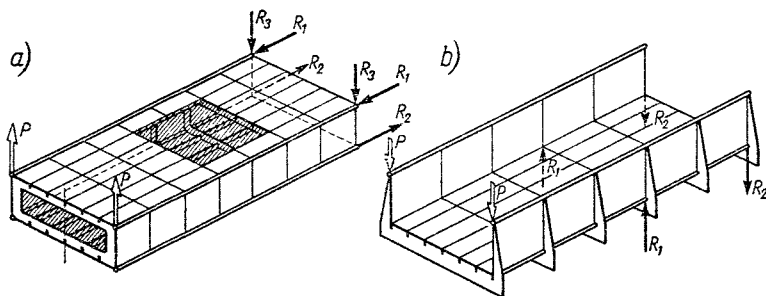
W podobny sposób do analizy tarcz płaskich można zredukować zagadnienie statyki wielosegmentowych konstrukcji (rys. 8.5a), jeśli pionowe ścianki tych konstrukcji są sztywne tylko na ścinanie*. W porównaniu z konstrukcją poprzednią (rys. 8.4) zagadnienie różni się tym tylko, że budowa tarczy górnej i dolnej są różne.

* Konstrukcja (rys. 8.5b) stosowana często w nadwoziach jest niesztynna na skręcanie, natomiast przy obciążeniach symetrycznych jest statycznie niewyznaczalna.



Rys. 8.4. Redukcja zagadnienia przestrzennego do analizy tarcz

a) układ obciążeń symetrycznych $P_1, \dots, P_N$ i reakcji R_1, R_2, R_3 ; b) określenie wydatków w ściankach pionowych; c) statyka zespołów rozdzielonej konstrukcji przestrzennej.

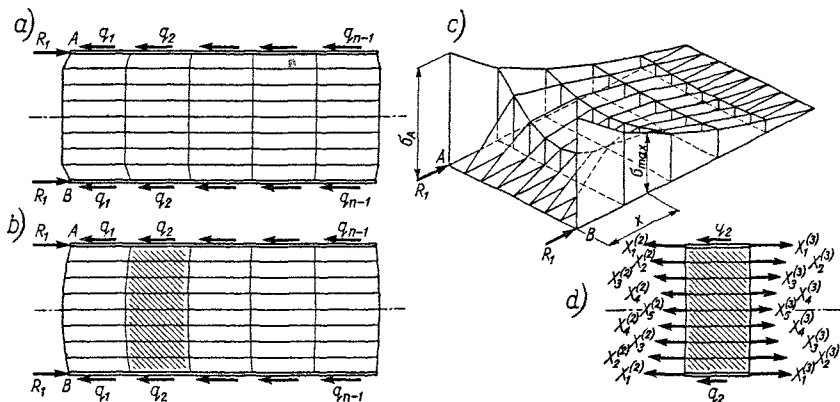


Rys. 8.5. Przykłady konstrukcji, których analiza sprowadza się do analizy tarcz

Przystępując do analizy wielopasowych tarcz płaskich musimy zdać sobie sprawę z istoty zagadnienia. Polega ona na tym, że skończona sztywność pokrycia na ścianie powoduje nierównomierność rozkładu sił we wzdlużnych pasach tarczy. Biorąc na przykład górną tarczę konstrukcji (rys. 8.4c) zauważymy, że w przypadku pokrycia nieskończenie sztywnego na ścianie kąty proste między prętami szkieletu zostaną bez zmian, a pręty ulegną jednakowemu skróceniu. W rezultacie pomimo przyłożenia obciążeń (siły R_1 i wydatki) w sposób odbiegający od elementarnych założeń wszystkie pasy wzdlużne będą miały te same naprężenia. Przerzucając się do drugiej skrajności, gdy pokrycie jest bardzo podatne na ścinanie, otrzymamy stan (rys. 8.6a), gdy na ściskanie pracować będą tylko pasy zewnętrzne, podczas gdy pasy wewnętrzne będą nieczynne. W przypadku pośrednim, gdy sztywność pokrycia na ścianie jest skończona (rys. 8.6b), pasy środkowe ulegną skróceniu, mniejszemu jednak niż pasy zewnętrzne. Wpływa stąd wniosek, iż rzeczywisty rozkład naprężeń (rys. 8.6c) odbiegać będzie od równomiernego, a o stopniu tej nierównomierności decyduje stosunek sztywności pokrycia do sztywności prętów szkieletu. Powoduje to przeciążenie niektórych elementów (pasów zewnętrznych) przy jednoczesnym niedociążeniu pozostałych pasów. Jeśli przy tym stosunek długości tarczy L do szerokości B nie jest duży (np. $L/B = 2$), to ta nierównomierność rozkładu sił rozciąga się na całą konstrukcję.

Ten sam parametr, tj. stosunek sztywności pokrycia do sztywności pasów, decyduje o zachowaniu się konstrukcji osłabionej wykrejem (rys. 8.5a). Przecięte wykrejem pasy wzdlużne tarczy górnej muszą

tu stopniowo przerzucić siły w nich działające na pasy nieprzebite. Jeśli wyżej wspomniany stosunek sztywności jest duży, to przerzucenie obciążeń zamyka się praktycznie w obrębie jednego tylko segmentu z każdej strony wykroju (art. 7.15). Jeśli stosunek ten będzie mały, to przerzucenie obciążeń obejmie i dalsze segmenty.



Rys. 8.6. Statyka symetrycznej tarczy wzdłużnej obciążonej

a) obraz odkształceń w przypadku pokrycia nadzwyczaj podatnego na ścinanie; b) obraz odkształceń w przypadku pokrycia o skończonej sztywności; c) przestrzenny obraz przebiegu naprężeń w tarczy obciążonej na brzegach wzdłużnych; d) statyka izolowanego segmentu tarczy; $\sigma_{\max}$ — naprężenie w krawężniku.

Aby określić stopień statycznej niewyznaczalności półskorupowej symetrycznej tarczy symetrycznie obciążonej zauważymy, że stan naprężeń jest jednoznacznie określony, jeśli tylko mamy wartości sił w pasach w przekrojach ograniczających dany segment płaski. Izolując bowiem taki segment od reszty konstrukcji (rys. 8.6d) sprowadzamy zadanie do statyki tarczowej belki (art. 7.4), w którym rolę pasów spełniają przecięte myślowo żebra, rolę zaś rozpórek myślowo przecięte pasy. Wypadkowe siły w żebrze są przy tym równe algebraicznej sumie sił wynikających z rozwiązania sąsiadujących segmentów. Siły X_i nie są od siebie niezależne, albowiem muszą spełniać warunek równowagi rzutów na oś symetrii*. Wynika stąd, że w każdym poprowadzonym myślowo przekroju liczba statycznie niewyznaczalnych sił jest

$$(p/2)-1 \quad \text{lub} \quad (p-1)/2$$

zależnie od tego, czy liczba pasów jest parzysta czy nieparzysta. W rezultacie m -segmentowa tarcza swobodna na obu żebrach skrajnych jest

$$(m-1)[(p/2)-1] \quad \text{lub} \quad (m-1)(p-1)/2 \quad (8.1)$$

-krotnie statycznie niewyznaczalna. W przypadku gdy w przekroju skrajnym tarcza jest utwardzona, liczba niewiadomych sił X wzrasta odpowiednio o $[(p/2)-1]$ lub $(p-1)/2$.

Określony wzorem (8.1) stopień statycznej niewyznaczalności jest na ogół bardzo wysoki. Tak na przykład tarcza górna (rys. 8.4c) jest 16-krotnie statycznie niewyznaczalna, a gdyby liczba segmentów była 10, to stałaby się ona 36-krotnie statycznie niewyznaczalna. Tak wysoki stopień statycznej niewyznaczalności powoduje ogromne utrudnienie

* Pozostałe warunki równowagi są spełnione tożsamościowo.

i zmusza nas do uproszczeń polegających na wprowadzaniu konstrukcji zastępczych ze zmniejszoną liczbą pasów wzdłużnych. Najdalej idącym uproszczeniem będzie zastąpienie wszystkich wewnętrznych pasów ściany tylko dwoma (rys. 8.7), dzięki czemu redukujemy zagadnienie do analizy wielosegmentowej tarczy 4-pasowej. Rozwiązanie takiej uproszczonej konstrukcji nie może dać oczywiście odpowiedzi na wszystkie interesujące nas pytania.

Jeśli jednak umieścimy zastępcze pasy nie w środku ciężkości zastępowanych pasów wewnętrznych, lecz w odległości

$$b_x = 0,7b_s, \quad (8.2)$$

to okazuje się z doświadczeń, że taka zastępcza konstrukcja daje dostatecznie dokładną odpowiedź na pytania najbardziej interesujące konstruktora. Tymi kwestiami są bez wątpienia: przebieg sił w pasach zewnętrznych z reguły najbardziej obciążonych, maksymalny wydatek styczny w pokryciu wymiarujący to pokrycie i jego połączenie z pasami (nity, zgrzeiny) i wreszcie charakter rozkładu naprężeń w poprzecznym przekroju.

Jak zobaczymy w art. 8.3, odpowiedź na dwie

Rys. 8.7. Uproszczenie schematu statycznego tarczy wielopasowej

a) rzeczywisty przekrój tarczy; b) zastępczy model półkorupowy; c) określenie przybliżonego rozkładu σ z danego $\sigma_{\max}$ i $\sigma_{\text{śr}}$.

pierwsze kwestie daje bezpośrednie rozwiązanie konstrukcji zastępczej. Co się tyczy kwestii rozkładu naprężeń, to, jak wykazują doświadczenia, w przypadku symetrycznego obciążenia tarczy można przyjąć rozkład naprężeń zmienny według paraboli sześcienniej (rys. 8.7c).

Parabola ta musi spełniać dwa warunki. Pierwszym z nich jest ten, aby naprężenia w pasach zewnętrznych miały żadaną wartość $\sigma_{\max}$ wynikającą z rozwiązania konstrukcji zastępczej. Warunkiem drugim jest to, aby całkowita siła wzdłużna N przenoszona w danym przekroju przez tarczę była równa wypadkowej wynikającej z założonego rozkładu naprężeń według paraboli sześcienniej. Jak łatwo sprawdzić, obydwa te warunki spełnia parabola

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_0 \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{A}{A_w} \left[1 - \left(\frac{2|y|}{B} \right)^3 \right] \right\}, \quad (8.3)$$

gdzie

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{\max} - \sigma_{\text{śr}}, \quad \sigma_{\text{śr}} = N/A.$$

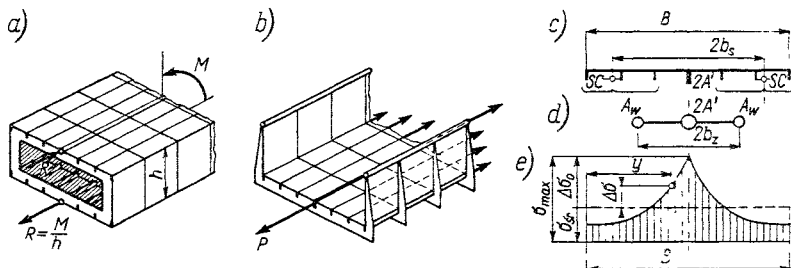
Wzór (8.3) daje zadowalające rezultaty, gdy liczba pasów wewnętrznych jest duża (8 i więcej). Jeśli liczba pasów skupionych jest $k < 8$, to zachowując rozkład naprężeń według paraboli sześcienniej naprężenia σ_p w pasie p wyznaczamy ze wzoru

$$\sigma_p = \sigma_{\max} - \xi \left[1 - \left(\frac{2|y_p|}{B} \right)^3 \right], \quad (8.4a)$$

gdzie

$$\xi = (\sigma_{\max} - \sigma_{\text{śr}}) A / \sum_1^k A_i \left[1 - \left(\frac{2|y_i|}{B} \right)^3 \right]. \quad (8.4b)$$

Omówione uproszczenia dotyczyły przypadku, gdy symetryczna tarcza obciążona jest tylko wzdłuż pasów zewnętrznych. Jeśli symetryczna tarcza obciążona jest siłą środkową* (rys. 8.8), to schemat zastępczy stanowi konstrukcja 3-pasowa (rys. 8.8d). Rozwiązanie tej konstrukcji określa w pasie wprowadzającym siłę wzdłużną oraz maksymalny wydatek, przy czym b_z określamy z wzoru (8.2). Przybliżony rozkład naprężeń σ wyznaczamy ze wzorów (8.3) lub (8.4) odmierzając y od krawędzi skrajnych (rys. 8.8e).



Rys. 8.8. Uproszczenie schematu statycznego tarcz obciążonych siłą środkową
a), b) przykłady konstrukcji obciążonych posrodku; c), d) przekrój rzeczywistej tarczy i jej model zastępczy; e) określenie przybliżonego rozkładu σ z danego $\sigma_{\max}$ i σ_{sr} .

8.3. Rozwiązanie tarczy 3- i 4-pasowej

Sprawdziwszy zagadnienie statyki tarczy wielopasowej do modelu tarczy 4- lub 3-pasowej (rys. 8.7 i 8.8), zajmijmy się z kolei ich rozwiązaniem.

Rozpoczynając od analizy tarczy 3-pasowej w celu otrzymania możliwie prostych wyrażeń zakładamy, że przekroje pasów i grubość ścianek są stałe na danym segmencie tarczy, a długość l wszystkich segmentów jednakowa (rys. 8.9a). Rozważaną konstrukcję sprowadzamy do schematu statycznie wyznaczalnego (stan „0”), przecinając myślowo pas środkowy w przekroju każdego żebra wewnętrznego. Przy podanym obciążeniu jedynymi siłami wewnętrznymi stanu „0” są siły wzdłużne w pasach skrajnych, zmienne liniowo na poszczególnych odcinkach (rys. 8.9b). Przyrost ΔN_i i całkowita siła wzdłużna N_i wyrażają się przy tym wzorami:

$$\Delta N_i = q_i l, \quad N_i = P - \sum_1^i q_p l. \quad (8.5)$$

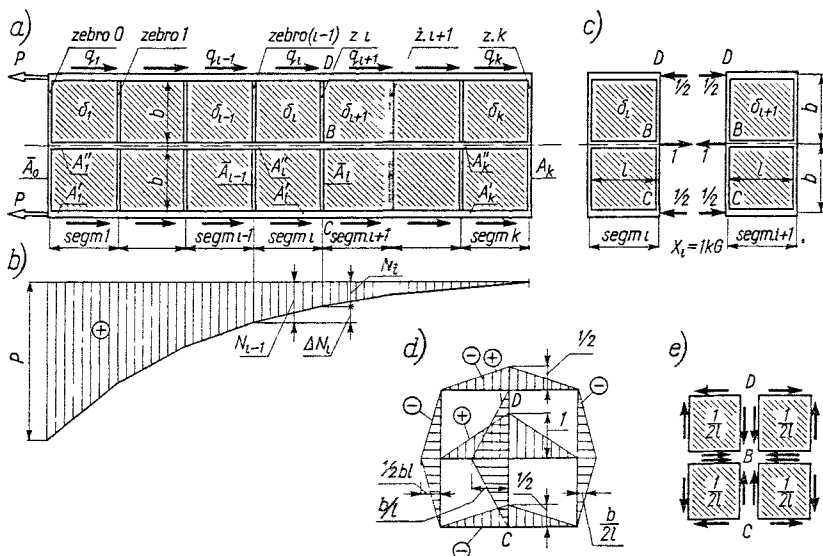
Na skutek działania tych sił powstaną wydłużenia pasów zewnętrznych, podczas gdy pas środkowy nie wydłuży się. Wynikające stąd przerwy między rozciętymi myślowo przekrojami pasa środkowego są usunięte przez oddziaływania tych przekrojów. Traktując takie oddziaływanie w przekroju żebra i jako niewiadomą X_i zauważymy, iż działanie

* Obciążenie tego rodzaju spotyka się w niektórych rozwiązaniach skrzydeł samolotów, w nadwozach kolejowych (przypadek sprzęgu centralnego), w nadwoziach autobusów (holowanie przyczepy) itp.

jej zamyka się w obrębie dwóch tylko sąsiadujących segmentów i oraz $i+1$ (rys. 8.9c). Wynika stąd, że równania ciągłości przemieszczeń mają postać 5-członową (patrz art. 1.4).

$$\alpha_{i,i-2}X_{i-2} + \alpha_{i,i-1}X_{i-1} + \alpha_{i,i}X_i + \alpha_{i,i+1}X_{i+1} + \alpha_{i,i+2}X_{i+2} + \alpha_{i,0} = 0, \quad (8.6)$$

gdyż oddziaływania X_p ($p \leq i-3$ oraz $p \geq i+3$) nie wpływają na wielkość szczeliny między segmentem i oraz $i+1$. Posługując się obrazem sił wewnętrznych wywołanych



Rys. 8.9. Rozwiązanie symetrycznej tarczy 3-pasowej

a) schemat konstrukcji; b) przebieg sił N_i w pasie zewnętrznym (stan „0”); c) stan $X_i = 1 \text{ kG}$; d) przebieg sił w segmentach i oraz $i+1$ dla stanu $X_i = 1 \text{ kG}$; e) układ wydatków stycznych w ściankach.

przez $X_i = 1 \text{ kG}$ otrzymujemy względnie proste wyrażenia współczynników równania M—M:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i-2} &= \frac{b^3}{6l^2 E \bar{A}_{i-1}}, \\ \alpha_{i,i-1} &= -\frac{b^3}{3l^2 E \bar{A}_i^*} + \frac{l}{6E \bar{A}_i^*} - \frac{b}{2Gl \delta_i}, \\ \alpha_{i,i} &= \frac{b^3}{6l^2 E \bar{A}_i^{**}} + \frac{l}{3E \bar{A}_i^*} + \frac{l}{3E \bar{A}_{i+1}^*} + \frac{b}{2Gl \delta_i} + \frac{b}{2Gl \delta_{i+1}}, \\ \alpha_{i,i+1} &= -\frac{b^3}{3l^2 E \bar{A}_{i+1}^*} + \frac{l}{6E \bar{A}_{i+1}^*} - \frac{b}{2Gl \delta_{i+1}}, \\ \alpha_{i,i+2} &= \frac{b^3}{6l^2 E \bar{A}_{i+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

gdzie

$$\frac{1}{EA_i^*} = \frac{1}{EA_{i-1}} + \frac{1}{EA_i}, \quad \frac{1}{EA_i^{**}} = \frac{1}{EA_{i-1}} + \frac{4}{EA_i} + \frac{1}{EA_{i+1}},$$

$$\frac{1}{EA_i^*} = \frac{1}{EA_i'} + \frac{1}{2EA_i'}.$$

Podobnie określamy wyraz wolny

$$a_{i,0} = -\frac{l}{6} \left(\frac{N_{i-1} + 2N_i}{EA_i'} + \frac{2N_i + N_{i+1}}{EA_{i+1}'} \right). \quad (8.8)$$

Liczba równań (8.6) jest wystarczająca do określenia niewiadomych X . Jeśli przy tym krańcowy przekrój jest swobodny (zebro 0 na rys. 8.9), to dla $i = 1$ oraz $i = 2$ równania (8.6) mają postać

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + a_{1,3}X_3 + a_{1,0} &= 0, \\ a_{2,1}X_1 - a_{2,2}X_2 + a_{2,3}X_3 + a_{2,4}X_4 + a_{2,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.9a)$$

i podobnie dla końcowych zeber $i = k-2$ oraz $i = k-1$. W przypadku gdy przekrój krańcowy k jest utwierdzony w nieodkształcanej ścianie, to traktując ją jako nieskończenie sztywny segment $k+1$ mamy dwa ostatnie równania

$$\left. \begin{aligned} a_{k-1,k-3}X_{k-3} + a_{k-1,k-2}X_{k-2} + \bar{a}_{k-1,k-1}X_{k-1} + \bar{a}_{k-1,k}X_k + a_{k-1,0} &= 0, \\ a_{k,k-2}X_{k-2} + \bar{a}_{k,k-1}X_{k-1} + \bar{a}_{k,k}X_k + \bar{a}_{k,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.9b)$$

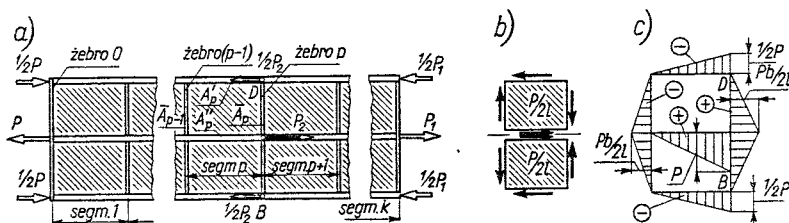
gdzie przez dodanie kresek zaznaczono te współczynniki lub wyrazy wolne, które ulegają zmianie na skutek wstawienia do wzorów (8.7) i (8.8) $\bar{A}_k = \bar{A}_{k+1} = \infty$, $\delta_{k+1} = \infty$, $A_{k+1} = \infty$ itd.

W wielu zagadnieniach można z niewielkim błędem założyć, iż zebrą są nieskończenie sztywne. Równania (8.6) przekształcają się wtedy w 3-członowe

$$a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,0} = 0, \quad (8.10)$$

gdzie $a_{i,k}$ wyrażają się ze wzorów (8.7), w których usunięto wyrazy zawierające $\bar{EA}$.

Za pomocą układu równań (8.6) lub (8.10) można rozwiązać zadanie działania układów samozrównoważonych (rys. 8.10).



Rys. 8.10. Obciążenie tarczy 3-pasowej układami samozrównoważonymi

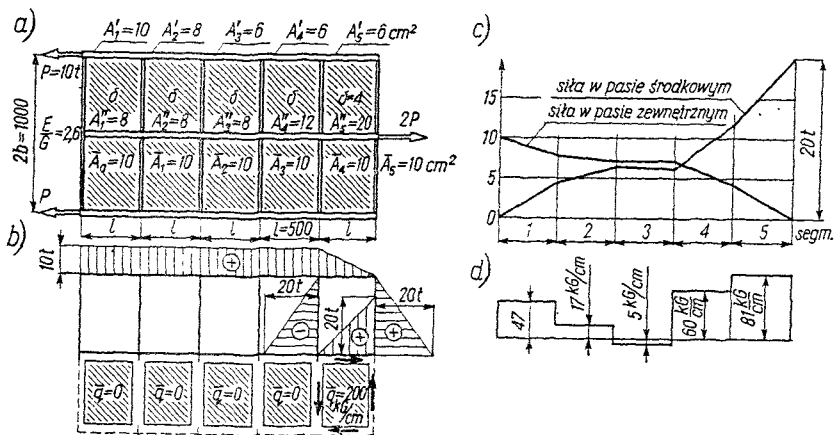
a) układ obciążeń; b) układ wydatków stanu „0” segmentu p; c) przebieg sił w pasach segmentu p w stanie „0”.

Jeśli takie układy działają w przekrojach skrajnych, jak np. układ sił P lub P_1 , to odpowiedź otrzymujemy podstawiając do równań (8.6) względnie (8.10) wartości $X_0 = P$, $X_k = P_1$. Pierwsze i ostatnie równanie układu (8.6) zawierają przy tym odpowiednio X_0 lub X_k , natomiast wszystkie wyrazy wolne $a_{i,0}$ są równe zero.

W przypadku działania układu samorównoważonego wewnątrz konstrukcji (układ P_2) zakładamy, iż w stanie „0” jest on przeniesiony całkowicie przez segment p (rys. 8.10b). Wskutek tego tylko $a_{p-2,0}$, $a_{p-1,0}$, $a_{p,0}$, $a_{p+1,0}$ są różne od zera. Stosując wzór (7.5) otrzymujemy w wyniku:

$$\left. \begin{aligned} a_{p-2,0} &= \frac{Pb^3}{6l^2 E \bar{A}_{p-1}}, \\ a_{p-1,0} &= -\frac{Pb^3}{6l^2} \left(\frac{2}{E \bar{A}_{p-1}} + \frac{1}{E \bar{A}_p} \right) + \frac{Pl}{6E \bar{A}_p^*} - \frac{Pb}{2Gl \delta_p}, \\ a_{p,0} &= \frac{Pb^3}{6l^2} \left(\frac{1}{E \bar{A}_{p-1}} + \frac{2}{E \bar{A}_p} \right) + \frac{Pl}{3E \bar{A}_p^*} + \frac{Pb}{2Gl \delta_p}, \\ a_{p+1,0} &= -\frac{Pb^3}{6l^2 E \bar{A}_p}. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Postępując według podanych wskazówek rozwiązano kilka przykładów. W pierwszym z nich (rys. 8.11) chodziło o zbadanie procesu przejścia obciążeń wzdłużnych przyłożonych na pasach zewnętrznych na pas środkowy. Pasy te ukształtowano na części ich długości jako zbieżne, tak aby maksymalne na-



Rys. 8.11. Przykład rozwiązania tarczy 3-pasowej

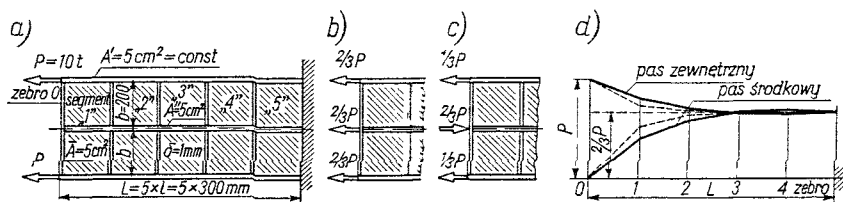
a) schemat tarczy i układ obciążeń, pola przekrojów pasów i żebier podane w cm^2 ; b) układ sił wewnętrznych stanu „0”; c) przebieg wypadkowych sił w pasach; d) przebieg wypadkowych wydatków w ściankach.

prężenia nie przekraczały 1000 kg/cm^2 . Jak widać z porównania stanu „0” (rys. 8.11b) z ostatecznym przebiegiem sił (rys. 8.11c), przekazywanie sił $P = 10 \text{ t}$ na pas środkowy zachodzi stopniowo. Najbardziej przy tym czynne są segmenty skrajne z jednego i drugiego końca konstrukcji, co widać wyraźnie z wykresu wydatków styrcznych* (rys. 8.11d).

Jako drugi przykład przedstawiono rozwiązanie wprowadzenia sił w tarczy pryzmatycznej (rys. 8.12). Pewną odmienność przebiegu rozwiązania stanowi tu inny obiór stanu zerowego. Rozdzielając mianowicie obciążenie w przekroju zebra O na dwa (rys. 8.12b, c) widzimy, iż pierwsze z nich (rys. 8.12b) stanowi proste rozciąganie, przw którym każdy z prętów pracuje tak samo i przy którym żadne nieciągłości przemieszczeń nie występują. Obciążenie drugie (rys. 8.12c) przedstawia układ samorównoważony $X_0 = -2P/3$ omawiany poprzednio (patrz rys. 8.10). Wynikiem superpozycji obydwu tych stanów jest przebieg sił (rys. 8.12d), z którego widać, że wyrównanie sił następuje na długości trzech segmentów. Na tym ostatnim wykresie naniesiono również przerywaną linią przebieg sił w pasach odpowiadający

* Dodatni zwrot tych wydatków przyjmujemy jak podano na rys. 8.11b.

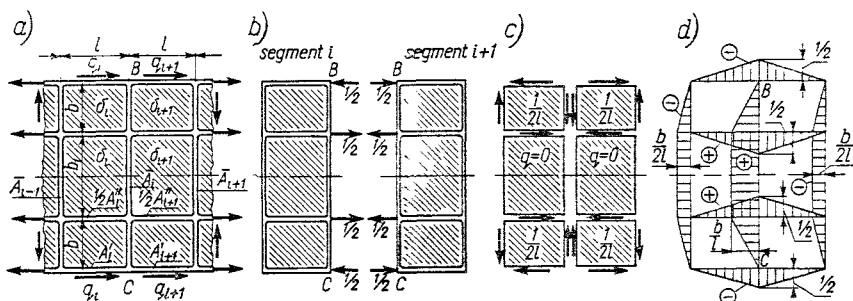
zgrubieniu ścianki w pierwszym segmencie ($\delta_1 = 2\delta$). Jak widać, ta zmiana konstrukcyjna powoduje znacznie szybsze wyrównanie sił i dlatego tego rodzaju wzmocnienie zaleca się przy kształtowaniu konstrukcji.



Rys. 8.12. Przykład wprowadzenia sił w tarczy 3-pasowej

- a) schemat konstrukcji i układ obciążeń, b), c) rozdział obciążenia na proste rozciąganie i układ samorozównawiony; d) przebieg sił w pasach.

Rozwiązanie zagadnienia symetrycznie obciążonej symetrycznej tarczy 4-pasowej (rys. 8.13) otrzymujemy bezpośrednio z przeprowadzonego rozwiązania dla tarczy 3-pasowej (rys. 8.9). Zakładając mianowicie, że pas środkowy tarczy 3-pasowej został podzielony wzdłużnie na dwa jednakowe pasy o przekroju $0,5A''$ widzimy, że przyjęty poprzed-



Rys. 8.13. Rozwiązanie symetrycznej tarczy 4-pasowej

- a) schemat konstrukcji; b) stan $X_i = 1$ kG, c), d) układ wydatków stycznych i sił w pasach przy $X_i = 1$ kG.

nio stan „0” nie zmienia się, a siły wewnętrzne tego stanu nadal wyrażają się wzorami (8.5a) i (8.5b). Jednostkowy układ oddziaływań $X_i = 1$ kG (rys. 8.9c) zamienia się teraz na układ czterech sił, każda o wartości $0,5$ kG (rys. 8.13b). Układ sił wewnętrznych wywołany obciążeniem $X_i = 1$ kG zamyka się nadal w obrębie segmentów i oraz $i+1$ (rys. 8.13c, d). Różni się on od poprzedniego układu (rys. 8.9d, e) tylko pojawieniem się sił w środkowych częściach zeber (rys. 8.13d), natomiast układ wydatków nie zmienia się. Wartości statycznie niewyznaczalnych grup sił X wyznaczamy z układu równań (8.6). Współczynniki tego układu różnią się tylko o członów uwzględniające podatność środkowych części zeber, a mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i-2} &= \frac{b^3}{6l^2EA_{i-1}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b_1}{b} \right), \\ \alpha_{i,i-1} &= -\frac{b^3}{3l^2EA_i^*} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b_1}{b} \right) + \frac{l}{6EA_i^*} - \frac{b}{2Gl\delta_i}, \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i} &= \frac{b^3}{6l^2 E \bar{A}_i^{**}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b_1}{b} \right) + \frac{l}{3E \bar{A}_i^*} + \frac{l}{3E \bar{A}_{i+1}^*} + \frac{b}{2Gl \delta_i} + \frac{b}{2Gl \delta_{i+1}}, \\ \alpha_{i,i+1} &= - \frac{b^3}{3l^2 E \bar{A}_{i+1}^*} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b_1}{b} \right) + \frac{l}{6E \bar{A}_i^*} - \frac{b}{2Gl \delta_{i+1}}, \\ \alpha_{i,i+2} &= \frac{b^3}{6l^2 E \bar{A}_{i+1}^*} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b_1}{b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

gdzie oznaczenia $\bar{A}^*$, $\bar{A}^{**}$, A^* zostają bez zmian. Wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ określone są nadal tymi samymi wzorami (8.8).

W przypadku gdy żebra są nieskończenie sztywne, współczynniki $\alpha_{i,k}$ dla tarczy 4-pasowej i 3-pasowej są identyczne, a wartości sił X określone z układu równań (8.10) takie same.

Jak wykazują obliczenia typowych konstrukcji, wpływ podatności żeber jest niewielki i na ogół nie przekracza kilku procent. Biorąc to pod uwagę, a ponadto uwzględniając, że rachunkowe rozwiązanie układu 3-członowych równań jest prostsze niż 5-członowych, zazwyczaj zakładamy nieskończoną sztywność żeber. Niedokładność, którą przy tym popełniamy, idzie w kierunku zwiększenia bezpieczeństwa konstrukcji, gdyż interesujące nas wartości otrzymane przy założeniu nieskończonej sztywności żeber są większe od obliczonych przy uwzględnieniu ich odształcalności. Dotyczy to specjalnie wydatków stycznych. Jeśli rozwiązana tarcza 3- lub 4-pasowa jest konstrukcją zastępczą tarczy wielopasowej (art. 8.2), to stosując wzory (8.3) lub (8.4) możemy z kolei określić przybliżony rozkład σ w poprzecznym przekroju tarczy.

8.4. Analityczne rozwiązanie tarczy 3- i 4-pasowej

Podana w artykule 8.3 metoda pozwala rozwiązać przypadek dowolnego ukształtowania symetrycznej tarczy 3- lub 4-pasowej. Wadą tej metody jest to, że wynik otrzymuje się pod postacią układu równań, a nie wzoru, który by dawał konstruktorom przejrzysty obraz zmienności sił i wpływu, jaki powoduje zmiana sztywności elementów. Wadę tę można usunąć wprowadzając zastępczą konstrukcję o nieskończeniu wielkiej liczbie segmentów, nieskończenie krótkich. W wyniku tego zamiast układu równań liniowych otrzymuje się równanie różniczkowe.

Biorąc taką symetryczną tarczę* o nieodkształcalnych żebrach, symetrycznie obciążoną (rys. 8.14), otrzymujemy w przekroju x układ sił wewnętrznych składający się z sił N' i N'' w pasach i wydatków stycznych $q(x)$ w pokryciu (rys. 8.14b). Z równowagi poszczególnych elementów (rys. 8.14c) wynika, że

$$\frac{dN''}{dx} = 2q, \quad \frac{dN'}{dx} = -(q + q_z). \quad (8.13)$$

Zależności te nie wystarczają do określenia trzech niewiadomych N' , N'' i q . Brakującą zależność wyznaczamy z warunku odształceń. Jeśli mianowicie przemieszczenia wzdłużne

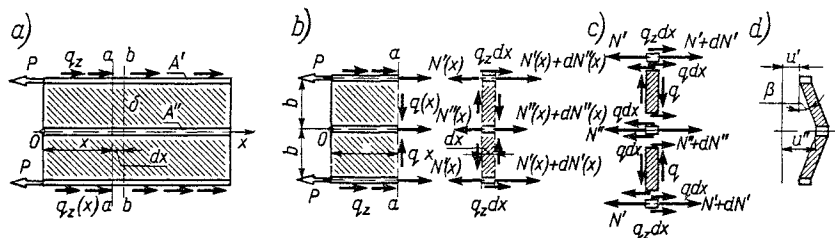
* Z uwagi na założoną nieodkształcalność żeber analiza obu tarcz 3- i 4-pasowej jest identyczna, jeśli tylko pod oznaczeniem A'' rozumiemy będziemy dla tarczy 4-pasowej sumaryczne pole przekrojów pasów wewnętrznych (rys. 8.13).

pasów w badanym przekroju są u' i u'' (rys. 8.14d), to kąt odkształcenia postaciowego pokrycia

$$\beta(x) = \frac{\tau}{G} = \frac{q}{G\delta} = \frac{u'' - u'}{b}. \quad (8.14)$$

Z drugiej strony wydłużenie względne odcinków pasów o długości dx określa się zależnościami

$$\frac{du'}{dx} = \frac{N'}{EA'}, \quad \frac{du''}{dx} = \frac{N''}{EA''}. \quad (8.15)$$



Rys. 8.14. Rozwiązanie tarczy 3-pasowej o nieskończonej liczbie zeber

a) schemat tarczy i układ obciążeń; b) układ sił wewnętrznych; c) statyka elementów odcinka konstrukcji; d) określenie kąta β . Dla prostoty pominięto na rysunkach układ zeber.

Różniczkując dwukrotnie równanie (8.14) i jednokrotnie zależności (8.15) mamy po uwzględnieniu równań (8.13) równanie różniczkowe określające wydatek styczny

$$\frac{d^2 q}{dx^2} - \frac{2G\delta}{EbA''} q + \frac{G\delta}{Eb} \frac{d}{dx} \left(\frac{N'}{A'} \right) = 0, \quad (8.16)$$

przy czym założono, że grubość pokrycia δ i przekrój pasa środkowego A'' są stałe, natomiast przekrój pasa zewnętrznego A' może być zmienny.

Jeśli A' jest też stałe, to podstawiając do wzoru (8.16) wyrażenie dN'/dx ze wzoru (8.13) mamy

$$\frac{d^2 q}{dx^2} - K^2 q = \frac{G\delta}{bEA'} q_z, \quad (8.17a)$$

gdzie K [1/cm] wyraża się wzorem

$$K = \sqrt{\frac{G\delta}{Eb} \left(\frac{2}{A''} + \frac{1}{A'} \right)}. \quad (8.17b)$$

Rozwiązanie równania (8.17a) jest sumą rozwiązania ogólnego $q'(x)$ równania uproszczonego

$$q'(x) = C_1 \cosh Kx + C_2 \sinh Kx \quad (8.18)$$

oraz rozwiązania szczególnego $q''(x)$ równania pełnego. Jeśli obciążenie zewnętrzne q_z ma postać

$$q_z(x) = q_0 + q_1(x/l), \quad (8.19a)$$

to

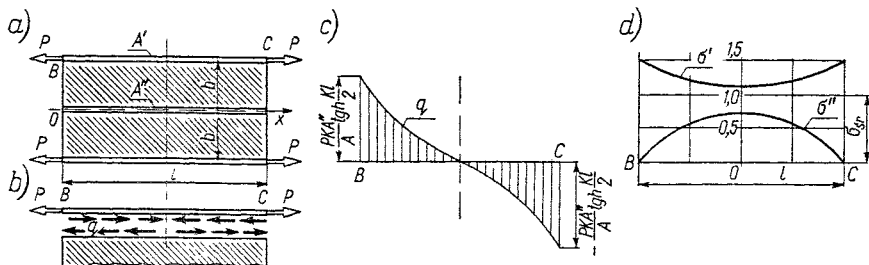
$$q''(x) = -\frac{A''}{A} \left(q_0 + \frac{q_1 x}{l} \right),$$

gdzie $A = 2A' + A''$ jest łącznym przekrojem wszystkich pasów. W wyniku, przy takim obciążeniu q_z ,

$$q = C_1 \cosh Kx + C_2 \sinh Kx - \frac{A''}{A} \left(q_0 + \frac{q_1 x}{l} \right). \quad (8.19b)$$

Wartości stałych C_1 i C_2 zależą od sposobu podparcia i rodzaju obciążenia. Rozpatrzmy naprzód przypadek, gdy $q_z \equiv 0$, a jedyne obciążenie stanowią siły w przekrojach skrajnych. Ze wzorów (8.19b), (8.14) i (8.15) wynika wtedy

$$\frac{dq}{dx} = C_1 K \sinh Kx + C_2 K \cosh Kx = \frac{G\delta}{b} \left(\frac{N''}{EA''} - \frac{N'}{EA'} \right). \quad (8.20)$$



Rys. 8.15. Przykład rozwiązania tarczy 3-pasowej

a) układ obciążen; b) układ oddziaływan między pasem a pokryciem, c) rozkład wydatków stycznych; d) przebieg naprężeń w pasach. Wykresy na c) i d) odpowiadają $Kl = 2$ i $A''/2A' = 0,5$.

Mając więc zadane wartości sił N' i N'' w przekrojach skrajnych można wyznaczyć stałe całkowania. Jeśli na przykład dla $x = -l$ i $x = l$, $N' = P$, $N'' = 0$ (rys. 8.15a), to podstawiając te wartości do (8.20) mamy

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{G\delta}{bEA'K} P \frac{1}{\cosh Kl},$$

a następnie uwzględniając wzór (8.17b) mamy ze wzoru (8.19b)

$$q = -PK \frac{A''}{A} \frac{\sinh Kx}{\cosh Kl}. \quad (8.21)$$

Całkowanie równań (8.13) przy uwzględnieniu warunków dla $x = -l$ i $x = l$ daje z kolei

$$N'' = 2P \frac{A''}{A} \left(1 - \frac{\cosh Kx}{\cosh Kl} \right), \quad N' = 2P \frac{A'}{A} \left(1 + \frac{A'' \cosh Kx}{2A' \cosh Kl} \right), \quad (8.22)$$

skąd naprężenia $\sigma'' = N''/A''$ oraz $\sigma' = N'/A'$ są przy oznaczeniu $\sigma_{sr} = 2P/A$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' &= \sigma_{sr} \left(1 - \frac{\cosh Kx}{\cosh Kl} \right), \\ \sigma' &= \sigma_{sr} \left(1 + \frac{A''}{2A'} \frac{\cosh Kx}{\cosh Kl} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Analizując otrzymane wyniki widzimy, że wydatek q jest dodatni, gdy $x < 0$, dla $x > 0$ zaś staje się on ujemny (rys. 8.15). Oznacza to, iż w lewej połowie konstrukcji oddziaływanie q na pasy jest takie jak na rys. 8.14c, na prawej zaś odwrotne (rys. 8.15b). Naprężenia σ'' w pasie środkowym są wszędzie dodatnie, a tylko dla $x = -l$ i $x = l$ są równe zeru (rys. 8.15d). Maksimum osiągają one dla $x = 0$

$$(\sigma'')_{\max} = \sigma_{sr} \left(1 - \frac{1}{\cosh Kl} \right) \quad (8.24a)$$

i gdy ściana jest dostatecznie długa, to $(\sigma'')_{\max} \rightarrow \sigma_{sr}$. Oznacza to pełną współpracę pasa środkowego. Naprężenia w pasach zewnętrznych spadają od wartości $\sigma' = \sigma_{sr}[1 + (A''/2A')]$ dla $x = -l$ i $x = l$, do minimalnej wartości dla $x = 0$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{sr} \left(1 + \frac{A''}{2A'} \frac{1}{\cosh Kl} \right). \quad (8.24b)$$

Z punktu widzenia praktyki interesuje nas długość $l - x = l_w$, dla której można przyjąć, iż naprężenia we wszystkich pasach są mniej więcej równe. Określenie l_w zależy oczywiście od nierównomierności naprężeń przyjętej za dopuszczalną. Jeśli na przykład założyć, że

$$\sigma_{sr} - \sigma'' = 0,05\sigma_{sr},$$

to ze wzoru (8.23a) otrzymujemy dla $x = l - l_w$ i przy założeniu, że Kl jest dużą liczbą

$$\frac{\cosh(Kl - Kl_w)}{\cosh Kl} \approx e^{-Kl_w} = 0,05$$

i stąd

$$Kl_w \approx 3,0.$$

Maksymalna bezwzględna wartość naprężeń stycznych pojawia się dla $x = -l$ bądź $x = l$

$$\tau_{\max} = \frac{PKA''}{A\delta} \tanh Kl. \quad (8.25a)$$

Jeśli $Kl > 3$, to z dokładnością większą niż 10%

$$\tau_{\max} \approx \frac{PKA''}{A\delta}. \quad (8.25b)$$

Podobnie rozwiązujemy inne przypadki wprowadzenia sił, przy czym stałe całkowania określamy z równania (8.20). Wyjątek stanowi warunek utwierdzenia, dla którego $u' = u'' = 0$, a stąd $q = G\delta\beta = 0$. Wyniki tych rozwiązań podano w tabl. 8.1.

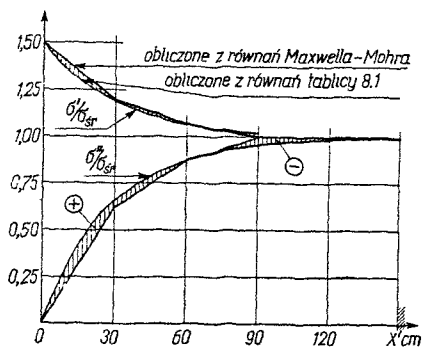
Aby ocenić stopień dokładności rozwiązania analitycznego, porównajmy wyniki obliczeń konstrukcji (rys. 8.12) wykonane tą metodą, z wynikami rozwiązania za pomocą równań M—M. Wstawiając do wzoru (8.17b) wartości liczbowe z rys. 8.12 otrzymujemy $K = 3,39 \cdot 10^{-2}$ 1/cm. Stosując wzory z tabl. 8.1 dla przypadku 2 otrzymujemy przebieg naprężeń w pasach zaznaczonych linią ciągłą (rys. 8.16) w funkcji $x' = l - x$. Naniesiony na tymże wykresie przebieg naprężeń σ' i σ'' wyznaczony poprzednio (rys. 8.12d) wykazuje bardzo dobrą zgodność obu metod.

WPROWADZENIE SIŁ W SYMETRYCZNEJ ŚCIANIE 3-PASOWEJ

Tablica 8.1

1		$q = -\frac{PK \cosh Kx}{2 \sinh KL}$ $\sigma' = \frac{P}{2A'} \frac{\sinh Kx}{\sinh KL}$ $\sigma'' = -\frac{P}{A''} \frac{\sinh Kx}{\sinh KL}$
2		$q = -PK \frac{A''}{A} \frac{\sinh Kx}{\cosh KL}$ $\sigma' = \sigma_{sr} \left(1 - \frac{A''}{2A'} \frac{\cosh Kx}{\cosh KL} \right)$ $\sigma'' = \sigma_{sr} \left(1 - \frac{\cosh Kx}{\cosh KL} \right)$
3		$q = -PK \frac{A''}{A} \frac{\cosh Kx}{\sinh KL}$ $\sigma' = \sigma_{sr} \left(1 + \frac{A''}{2A'} \frac{\sinh Kx}{\sinh KL} \right)$ $\sigma'' = \sigma_{sr} \left(1 - \frac{\sinh Kx}{\sinh KL} \right)$
4		$q = -PK \left[\frac{2A' \cosh K(L-x)}{A \sinh KL} + \frac{A'' \cosh Kx}{A \sinh KL} \right]$ $\sigma' = \sigma_{sr} \left[1 + \frac{A'' \sinh Kx}{2A' \sinh KL} - \frac{\sinh K(L-x)}{\sinh KL} \right]$ $\sigma'' = \sigma_{sr} \left[1 - \frac{\sinh Kx}{\sinh KL} + \frac{2A' \sinh K(L-x)}{A'' \sinh KL} \right]$

U w a g a: Identyczne wzory są rozwiązaniem symetrycznej tarczy 4-pasowej, jeśli tylko pod oznaczeniem A'' rozumieć sumaryczne pole przekrojów pasów wewnętrznych



Rys. 8.16. Porównanie wyników obliczeń

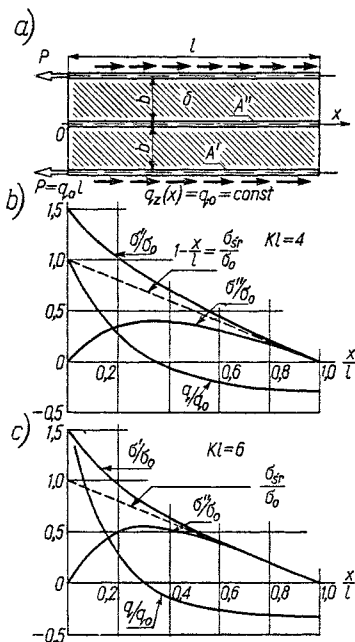
8.5. Inne analityczne rozwiązania tarczy 3- i 4-pasowej

Wracając do wzoru (8.19b) rozważmy przypadek, gdy $q_z(x) = q_0 = \text{const}$, a środkowy pręt jest swobodny na obu końcach (rys. 8.17a). Wstawienie do równania (8.20) warunków brzegowych $N'' = 0$ i $N' = q_0 l$ dla przekroju $x = 0$ oraz $N'' = 0$ i $N' = 0$ w przekroju $x = l$ daje

$$C_1 = q_0 l \frac{G\delta}{bEA'K} \operatorname{ctgh} Kl, \quad C_2 = -q_0 l \frac{G\delta}{bEA'K},$$

skąd ze wzoru (8.19b) mamy

$$q = -q_0 \frac{A''}{A} \left(1 - \frac{Kl \cosh Kx'}{\sinh Kl} \right), \quad (8.26)$$



Rys. 8.17. Analityczne rozwiązanie tarczy przy obciążeniu $q_0 = \text{const}$
a) schemat tarczy; b), c) wyniki rozwiązań.

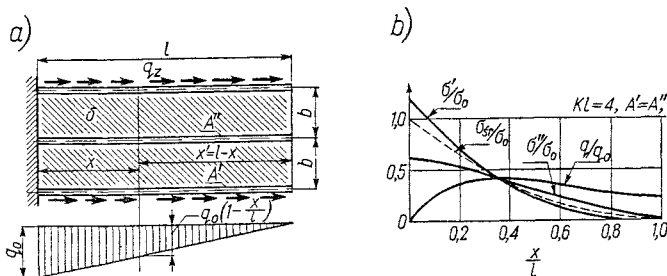
gdzie $x' = l - x$. Wstawiając tak określony wydatek do równań (8.13) otrzymujemy po scałkowaniu i przekształceniach

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(\frac{x'}{l} + \frac{A''}{2A'} \frac{\sinh Kx'}{\sinh Kl} \right), \quad (8.27a)$$

$$\sigma_x'' = \sigma_0 \left(\frac{x'}{l} - \frac{\sinh Kx'}{\sinh Kl} \right), \quad (8.27b)$$

gdzie $\sigma_0 = 2q_0 l / A$ — średnie naprężenie w przekroju $x = 0$ obliczone tak, jak gdyby wszystkie pasy pracowały równomiernie. Jak widać, całe obliczenie konstrukcji można przeprowadzić, jeśli tylko znana jest wartość K . Biorąc na przykład konstrukcję, dla której $A' = A''$, a $Kl = 4$ bądź $Kl = 6$, otrzymujemy wykresy pokazane na rys. 8.17b, c. Ujemne wartości wydatków stycznych w sąsiedztwie prze-

kroju $x = l$ oznaczają (rys. 8.14c), iż przy posuwaniu się w lewo siła N'' rośnie. Osiąga ona ekstremum, gdy $q = 0$, a następnie spada do zera. Siły N' są zawsze większe niż $\sigma_{sr}A'$. Jeśli przy tym wartość Kl rośnie, to wzrost siły N' ogranicza się bardziej do lewego końca, w którym wprowadzone są obciążenia $P = q_0l$.



Rys. 8.18. Analityczne rozwiązanie tarczy zamocowanej przy obciążeniu liniowo zmiennym

Jako drugi przypadek rozpatrzmy utwierdzoną tarczę (rys. 8.18) obciążoną wydatkiem $q_x = q_0[1 - (x/l)]$. Wstawiając we wzorach (8.19) $q_1 = -q_0$ mamy dla określenia stałych całkowania C_1 i C_2 następujące warunki:

dla $x = 0$ $u' = u'' = 0$, skąd $q = 0$ (wzór 8.14);

dla $x = l$ $N' = N'' = 0$, skąd $dq/dx = 0$ (wzór 8.20).

Wykorzystując te warunki otrzymujemy w wyniku

$$q = -\frac{q_0 A''}{A} \left[\frac{x'}{l} + \frac{\sinh Kx}{Kl \cosh Kl} - \frac{\cosh Kx'}{\cosh Kl} \right], \quad (8.28)$$

a po scałkowaniu równań (8.13) i przekształceniach mamy

$$\sigma' = \sigma_0 \left[\left(\frac{x'}{l} \right)^2 - \frac{A''}{A' K^2 l^2} \left(1 - \frac{\cosh Kx}{\cosh Kl} \right) + \frac{A''}{A' Kl} \frac{\sinh Kx'}{\sinh Kl} \right], \quad (8.29a)$$

$$\sigma'' = \sigma_0 \left[\left(\frac{x'}{l} \right)^2 + \frac{2}{K^2 l^2} \left(1 - \frac{\cosh Kx}{\cosh Kl} \right) - \frac{2}{Kl} \frac{\sinh Kx'}{\cosh Kl} \right], \quad (8.29b)$$

gdzie $\sigma_0 = q_0 l / A$ — średnie naprężenie w przekroju utwierdzonym.

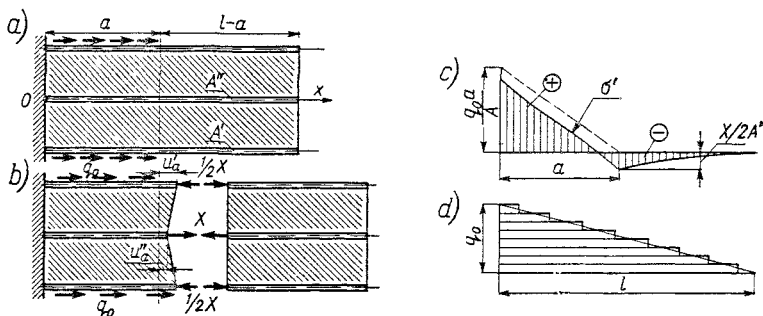
Typowy przebieg σ' i σ'' (rys. 8.18b) wykazuje w okolicy utwierdzenia, że $\sigma' > \sigma_{sr}$, a $\sigma'' < \sigma_{sr}$, gdzie σ_{sr} jest wartością średnią naprężeń w przekroju x

$$\sigma_{sr} = \frac{q_0(l-x)^2}{Al} = \sigma_0 \left(\frac{x'}{l} \right)^2$$

Należy przy tym zauważyć, że różnice $\sigma' - \sigma_{sr}$ i $\sigma'' - \sigma_{sr}$ są mniejsze niż w przypadku poprzednim, w którym pasy zewnętrzne musiały przenieść w przekroju $x = 0$ całkowite obciążenie. Na uwagę również zasługuje to, że wbrew pozorom w przekrojach oddalonych od utwierdzenia $\sigma'' > \sigma'$. Zjawisko to wyjaśnia analiza przypadku, gdy równomierne obciążenie ciągłe działa na długości $a < l$ (rys. 8.19a). Rozcinając myślowo taką konstrukcję w przekroju $x = a$ widzimy, iż gdyby w tym przekroju nie działały żadne siły wzdłużne, to rozcięte części nie mogłyby do siebie pasować. W rzeczywistości musi powstać w tym przekroju układ sił X rozciągający pas środkowy, a ściskający pasy zewnętrzne. Wskutek tego naprężenia σ' są w części rozciągające, w części zaś ściskające (rys. 8.19c). Wracając teraz do obciążenia z rys. 8.18 zauważmy, iż można je traktować jako superpozycję nieskończenie wielu obciążeń równomiernych ciągnących się na coraz to innej długości a (rys. 8.19d). Każde z tych obciążeń wywoła

nieskończoności mały układ naprężeń typu podanego na rys. 8.19c, a ich nałożenie da w rezultacie wykres według rys. 8.18b.

W rozpatrywanych dotychczas przypadkach analitycznych rozwiązań tarcz zakładano $A' = \text{const}$. Jeśli A' jest zmienne, to podstawiając w równaniu (8.16) q wyrażone przez N' (wzór 8.13) sprowadzamy zadanie do rozwiązania równania różniczkowego 3 rzędu o zmiennych współczynnikach. To zadanie ma na ogół małe znaczenie techniczne. Znacznie większe znaczenie ma zagadnienie polegające na takim



Rys. 8.19. Statyka tarczy przy obciążeniu $q_0 = \text{const}$ na długości $a < l$

a) układ obciążeń; b) nieciągłość przemieszczeń w przekroju $x = a$; c) przebieg naprężeń w pasie zewnętrznym, linią kreskowaną zaznaczono przebieg odpowiadający pełnej współpracy wszystkich pasów; d) przedstawienie obciążenia ciągłego jako superpozycji elementarnych obciążeń statycznych.

doborze przekroju A' , aby naprężenia w pasie zewnętrznym $\sigma' = N'/A'$ były stałe. Oznaczając w równaniu (8.16)

$$K_1^2 = \frac{2G\delta}{EbA''} \quad (8.30a)$$

mamy rozkład wydatków q w postawionym zadaniu w postaci

$$q = C_1 \cosh K_1 x + C_2 \sinh K_1 x. \quad (8.30b)$$

Stałe całkowania wyznaczamy jak poprzednio. Tak na przykład w tarczy (rys. 8.15) mamy w przekroju $x = 0$ kąt $\beta = 0$ (z uwagi na symetrię), a w przekroju $x = l$ wartości sił $N' = P$, $N'' = 0$. Wykorzystując te warunki otrzymujemy z równań (8.30b) i (8.20)

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{G\delta k_r}{EbK_1 \cosh K_1 l}$$

gdzie $k_r = \sigma' = \text{const}$. Mając C_1 i C_2 ze wzoru (8.30b) otrzymujemy

$$q = -\frac{K_1 k_r A''}{2} \frac{\sinh K_1 x}{\cosh K_1 l}. \quad (8.30c)$$

Całkowanie z kolei pierwszego z równań (8.13) daje w rezultacie

$$\sigma'' = k_r \left(1 - \frac{\cosh K_1 x}{\cosh K_1 l} \right). \quad (8.31)$$

Pole przekroju A' wyznaczamy z warunku $N'' + 2N' = 2P$ tak, aby $\sigma' = k_r = \text{const}$. W rezultacie

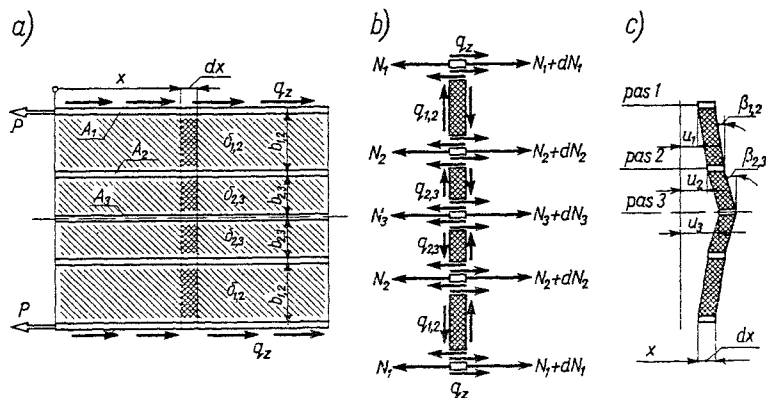
$$A' = \frac{P}{k_r} - \frac{A''}{2} \left(1 - \frac{\cosh K_1 x}{\cosh K_1 l} \right). \quad (8.32)$$

Otrzymane rozwiązania analityczne stosują się również do symetrycznej ściany 4-pasowej symetrycznie obciążonej (rys. 8.13), jeśli pole przekroju pasa środkowego A'' tarczy 3-pasowej przyjąć

równe sumie pól przekrojów pasów wewnętrznych, zostawiając bez zmian szerokość b oraz grubość δ . Obciążenie w pasie środkowym takiej tarczy 3-pasowej przyjmujemy równe sumie obciążeń pasów wewnętrznych tarczy 4-pasowej.

3.6. Analityczne rozwiązanie symetrycznej tarczy 5- i 6-pasowej

Wprowadzony model tarczy 3- lub 4-pasowej pozwala w przybliżony sposób rozwiązać zagadnienia wprowadzenia skupionych sił wzdłużnych w konstrukcjach skrzynkowych (rys. 8.4 i 8.5b). W zagadnieniach wpływu wykrojów (rys. 8.5a) musimy uciec się do analizy tarczy z większą liczbą pasów wzdłużnych, jeśli zastępcza konstrukcja ma oddawać zasadnicze cechy rzeczywistej konstrukcji osłabionej wykrejem. Nie uzasadniając na razie tego stwierdzenia (patrz art. 8.7) przyjmijmy za udowodnione, że zastępczy model



Rys. 8.20. Analiza tarczy 5-pasowej symetrycznie obciążonej

a) schemat konstrukcji; b) statyka elementów nieskończenie krótkiego segmentu; c) określenie kątów odkształcenia postaciowego.

takiej konstrukcji daje się przedstawić w postaci symetrycznej tarczy 5-pasowej. Ponieważ rozwiązanie analityczne jest prostsze niż rozwiązanie układu równań $M-M$, założymy, że taka tarcza (rys. 8.20) składa się z nieskończenie wielu, nieskończenie krótkich segmentów usztywnionych nieodkształcalnymi żebrami, przy czym przekroje pasów są stałe.

Rozpatrzenie równowagi elementów nieskończenie krótkiego segmentu (rys. 8.20b) daje następujące trzy równania

$$\frac{dN_1}{dx} = -q_{1,2} - q_z, \quad \frac{dN_2}{dx} = -q_{2,3} + q_{1,2}, \quad \frac{dN_3}{dx} = 2q_{2,3}, \quad (8.33)$$

w których występują trzy niewiadome siły N_1 , N_2 i N_3 , niewiadome wydatki $q_{1,2}$ i $q_{2,3}$ oraz znane obciążenia zewnętrzne $q_z(x)$. Brakujące równania otrzymamy z warunków odkształceń. Wprowadzając mianowicie przemieszczenia wzdłużne przekrojów pasów u_1 , u_2 i u_3 (rys. 8.20c), mamy następujące dwie zależności:

$$\frac{q_{1,2}}{G\delta_{1,2}} = \beta_{1,2} = \frac{u_2 - u_1}{b_{1,2}}, \quad \frac{q_{2,3}}{G\delta_{2,3}} = \beta_{2,3} = \frac{u_3 - u_2}{b_{2,3}}, \quad (8.34)$$

a ponadto równania analogiczne do równań (8.15)

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{N_1}{EA_1}, \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{N_2}{EA_2}, \quad \frac{du_3}{dx} = \frac{N_3}{EA_3}. \quad (8.35)$$

W rezultacie mamy więc łącznie osiem równań z ośmioma niewiadomymi. Po przekształceniach otrzymujemy w końcu dwa równania różniczkowe dla $q_{1,2}$ i $q_{2,3}$, a mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q_{1,2}}{dx^2} - K_1^2 q_{1,2} + K_{1,2}^2 q_{2,3} &= \frac{G \delta_{1,2}}{EA_1 b_{1,2}} q_z, \\ \frac{d^2 q_{2,3}}{dx^2} - K_2^2 q_{2,3} + K_{2,3}^2 q_{1,2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

przy czym przyjęto, że przekroje pasów są stałe. Wielkości K są

$$K_1 = \sqrt{\frac{G \delta_{1,2}}{E b_{1,2}} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{G \delta_{2,3}}{E b_{2,3}} \left(\frac{1}{A_2} + \frac{2}{A_3} \right)},$$

$$K_{1,2} = \sqrt{\frac{G \delta_{1,2}}{E A_2 b_{1,2}}}, \quad K_{2,3} = \sqrt{\frac{G \delta_{2,3}}{E A_2 b_{1,3}}}.$$

Rozwiązanie uproszczonego układu równań (8.36), gdy $q_z = 0$, ma postać

$$q_{1,2} = C e^{kx}, \quad q_{2,3} = D e^{kx}. \quad (8.37)$$

Podstawiając $q_{1,2}$ i $q_{2,3}$ do równań (8.36) mamy

$$\left. \begin{aligned} C(k^2 - K_1^2) + D K_{1,2}^2 &= 0, \\ C K_{2,3}^2 + (k^2 - K_2^2) D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Niezerowe odpowiedzi dla stałych C i D otrzymamy tylko wtedy, gdy wyznacznik charakterystyczny jest równy zero. Wynika stąd równanie dwukwadratowe dla nieznanego dotąd współczynnika k

$$k^4 - (K_1^2 + K_2^2)k^2 + (K_1 K_2)^2 - (K_{1,2} K_{2,3})^2 = 0, \quad (8.39)$$

którego rozwiązanie daje cztery pierwiastki

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{(K_1^2 + K_2^2)}{2}} \pm \sqrt{\frac{(K_1^2 - K_2^2)^2}{4} + (K_{1,2} K_{2,3})^2}. \quad (8.39b)$$

W wyniku ogólne rozwiązanie uproszczonego układu równań (8.36) ma postać

$$q_{1,2} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x}, \quad (8.40a)$$

$$q_{2,3} = D_1 e^{k_1 x} + D_2 e^{k_2 x} + D_3 e^{k_3 x} + D_4 e^{k_4 x}. \quad (8.40b)$$

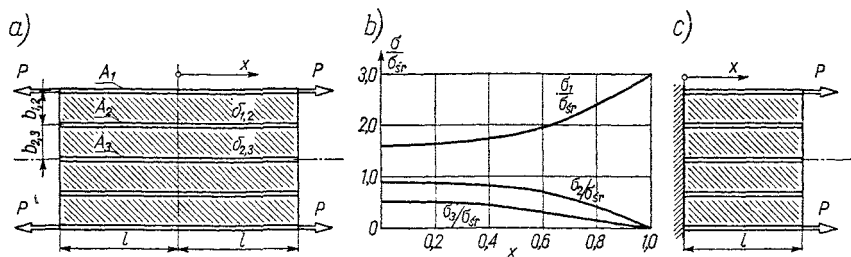
Rozwiązanie to ma tylko cztery niezależne stałe całkowania, gdyż stałe C i D związane są zależnościami (8.38), a więc

$$C_i = -D_i K_{1,2}^2 / (k_i^2 - K_1^2) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (8.40c)$$

Aby więc określić rozkład sił wewnętrznych, musimy narzucić cztery warunki brzegowe. Zakładając na przykład, iż na brzegach $x = \pm l$ działają siły $N_1 = P, N_2 = 0$ i $N_3 = 0$ (rys. 8.21) mamy ze zróżniczkowania równań (8.34)

$$\left(\frac{dq_{1,2}}{dx} \right)_{x=\pm l} = \frac{G\delta_{1,2}}{b_{1,2}} \left(\frac{N_2}{EA_2} - \frac{N_1}{EA_1} \right)_{x=\pm l} = \mp \frac{G\delta_{1,2}}{b_{1,2}EA_1} P,$$

$$\left(\frac{dq_{2,3}}{dx} \right)_{x=\pm l} = \frac{G\delta_{2,3}}{b_{2,3}} \left(\frac{N_3}{EA_3} - \frac{N_2}{EA_2} \right) = 0.$$



Rys. 8.21. Przykład analitycznego rozwiązania tarczy 5-pasowej

a) schemat konstrukcji; b) typowy przebieg naprężeń w pasach obliczony dla przypadku, gdy $b_{1,2} = b_{2,3} = 20$ cm, $\delta_{1,2} = \delta_{2,3} = 0,2$ cm, $A_1 = A_2 = 0,5A_3 = 5$ cm², $l = 60$ cm, $G/E = 0,40$; c) przypadek tarczy utwardzonej.

Z drugiej strony różniczkując równania (8.40) otrzymujemy

$$C_1 k_1 e^{\pm k_1 l} + C_2 k_2 e^{\pm k_2 l} + C_3 k_3 e^{\pm k_3 l} + C_4 k_4 e^{\pm k_4 l} = \mp \frac{G\delta_{1,2}}{b_{1,2}EA_1} P \quad (\text{równanie I i II}),$$

$$\frac{k_1^2 - K_1^2}{K_{1,2}^2} k_1 C_1 e^{\pm k_1 l} + \frac{k_2^2 - K_1^2}{K_{1,2}^2} k_2 C_2 e^{\pm k_2 l} + \frac{k_3^2 - K_1^2}{K_{1,2}^2} k_3 C_3 e^{\pm k_3 l} + \frac{k_4^2 - K_1^2}{K_{1,2}^2} k_4 C_4 = 0$$

(równanie III i IV).

Biorąc pod uwagę, iż $k_2 = -k_1$ i $k_4 = -k_3$, otrzymujemy

$$C_1 = -C_2, \quad C_3 = -C_4,$$

stąd wynika, że

$$\left. \begin{aligned} q_{1,2} &= 2C_1 \sinh k_1 x + 2C_3 \sinh k_3 x, \\ q_{2,3} &= 2a_1 C_1 \sinh k_1 x + 2C_3 \sinh k_3 x, \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

gdzie stałe C_1 i C_3 określone są wzorami

$$C_1 = \frac{G\delta_{1,2}}{2EA_1 b_{1,2}} \frac{Pa_3}{(a_1 - a_3)k_1 \cosh k_1 l}, \quad C_3 = -\frac{G\delta_{1,2}}{2EA_1 b_{1,2}} \frac{Pa_1}{(a_1 - a_3)k_3 \cosh k_3 l},$$

przy czym wprowadzono oznaczenia

$$a_1 = \frac{k_1^2 - K_1^2}{K_{1,2}^2}, \quad a_3 = \frac{k_3^2 - K_1^2}{K_{1,2}^2}.$$

Jak widać, wydatki $q_{1,2}$ i $q_{2,3}$ są równe zeru w przekroju $x = 0$. Jest to oczywiste, jeśli wziąć pod uwagę symetrię konstrukcji i symetrię obciążenia.

Mając tak obliczone wydatki z całkowania równań (8.33) otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 2P \frac{A_1}{A} - P \frac{G\delta_{1,2}}{EA_1 b_{1,2}(a_1 - a_3)} \left(\frac{a_3}{k_1^2} \frac{\cosh k_1 x}{\cosh k_1 l} - \frac{a_1}{k_3^2} \frac{\cosh k_3 x}{\cosh k_3 l} \right), \\ N_2 &= 2P \frac{A_2}{A} + P \frac{G\delta_{1,2}}{EA_1 b_{1,2}(a_1 - a_3)} \left[\frac{a_3(1+a_1)}{k_1^2} \frac{\cosh k_1 x}{\cosh k_1 l} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1(1+a_3)}{k_3^2} \frac{\cosh k_3 x}{\cosh k_3 l} \right], \\ N_3 &= 2P \frac{A_3}{A} - P \frac{2G\delta_{1,2} a_1 a_3}{EA_1 b_{1,2}(a_1 - a_3)} \left(\frac{1}{k_1^2} \frac{\cosh k_1 x}{\cosh k_1 l} - \frac{1}{k_3^2} \frac{\cosh k_3 x}{\cosh k_3 l} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

gdzie $A = 2A_1 + 2A_2 + A_3$ — całkowite pole przekrojów wszystkich pasów. Jak widać, każda siła N składa się z dwóch składników, z których pierwszy odpowiada prostemu rozciąganiu wszystkich pasów, drugi zaś przedstawia korektę wynikającą z wprowadzenia siły $2P$ w pasach zewnętrznych. Typowy przebieg naprężeń w pasach wzdłużnych podaje wykres (rys. 8.21b).

Przeprowadzone przykładowo rozwiązanie jest jednocześnie rozwiązaniem zagadnienia, gdy tarcza jest utwierdzona w przekroju $x = 0$ i obciążona dwoma siłami $N_1 = P$ w przekroju $x = l$ (rys. 8.21c). W tym bowiem przypadku w przekroju $x = 0$ przemieszczenia $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ i wtedy ze wzorów (8.34) mamy $(q_{1,2})_{x=0} = (q_{2,3})_{x=0} = 0$. Te ostatnie warunki są spełnione przez równania (8.41), co dowodzi słuszności wniosku.

Jeśli poza siłami skupionymi konstrukcja jest obciążona wydatkami stycznymi q_x na pasach zewnętrznych, to rozwiązanie równań (8.36) jest sumą rozwiązania ogólnego (8.40) i rozwiązania szczególnego równania pełnego. Jeśli $q_x = q_0 + (q_1 x/l)$, to rozwiązanie szczególne równań (8.36) ma postać

$$q_{1,2} = -\frac{A_3 + 2A_2}{A} \left(q_0 + \frac{q_1 x}{l} \right), \quad q_{2,3} = -\frac{A_3}{A} \left(q_0 + \frac{q_1 x}{l} \right),$$

gdzie $A = 2A_1 + 2A_2 + A_3$. Stałe całkowania $C_1, \dots, D_4$ dobieramy tak, aby spełnione zostały zadane z góry cztery warunki brzegowe. Ponieważ jednak wyrażenia określające te stałe są dość skomplikowane, wartości ich wyznaczamy z rachunku na liczbach szczególnych.

Podobnie jak w przypadku tarczy 3-pasowej, tak i w przypadku tarczy 5-pasowej otrzymane rozwiązanie jest jednocześnie rozwiązaniem symetrycznej tarczy 6-pasowej, jeśli tylko za A_3 wstawić we wszystkich odpowiednich wzorach sumaryczne pole przekroju dwóch pasów położonych bezpośrednio przy osi symetrii tarczy. Obciążenia tego pasa środkowego takiej tarczy 5-pasowej bierzemy równe sumie obciążeń pasów środkowych tarczy 6-pasowej.

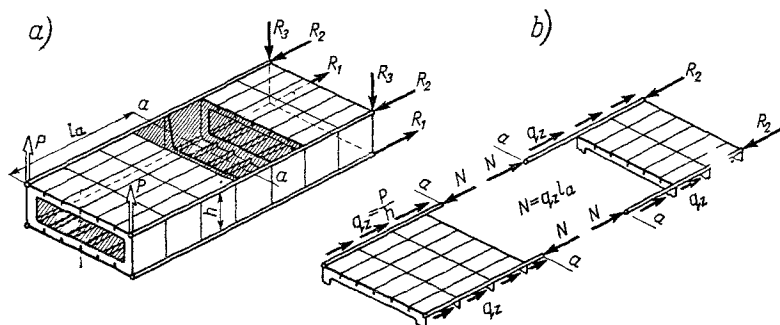
8.7. Wpływ wykrojów w tarczach symetrycznie obciążonych

Analiza zaburzenia w przebiegu sił wewnętrznych wywołanego istnieniem wykroju w symetrycznej konstrukcji skrzynkowej (rys. 8.5a) sprowadza się do analizy tarczy płaskiej osłabionej takim wykrejem, albowiem układ oddziaływań stycznych między tarczą a pionowymi ściankami określony jest z warunków równowagi i nie zależy zupełnie od tego, czy tarcza jest pełna, czy osłabiona wykrejem (art. 8.2).

Jeśli wykrój obejmuje wszystkie pasy podłużne tarczy z wyjątkiem pasów narożnych (rys. 8.22a), to izolując osłabioną tarczę górną od reszty konstrukcji (rys. 8.22b) i prowadząc przekrój $a-a$ redukujemy zagadnienia do rozwiązania dwóch tarcz obciążonych

znanyymi siłami wzdłużnymi i wydatkami q_z . Siły wzdłużne N w przekroju $a-a$ są przy tym jednoznacznie określone z warunku rzutów na oś symetrii każdej tarczy składowej. Analiza takich tarcz była przeprowadzona w art. 8.2, 8.3 i 8.4.

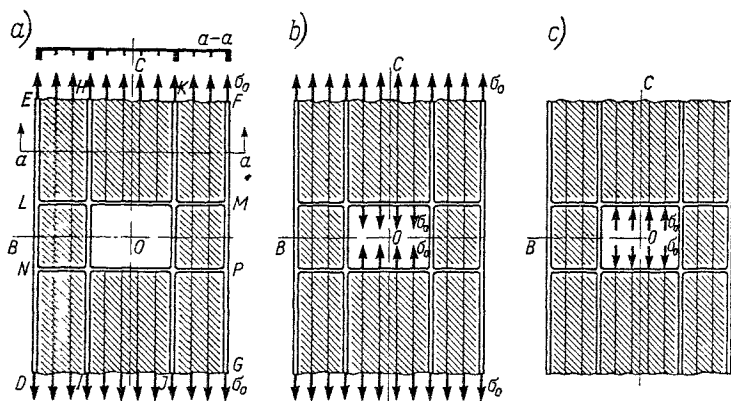
Dodatkowego omówienia wymaga natomiast zagadnienie wpływu wykroju, gdy nie wszystkie pasy konstrukcji są przecięte (rys. 8.5a), przy czym ograniczymy się do przy-



Rys. 8.22. Redukcja zagadnienia wpływu wykroju do analizy tarczy

a) schemat konstrukcji; b) statyka tarczy górnej. Podane wartości q_z i N odpowiadają obciążeniu siłami P . Ogólnie $N = M_a/2h$, gdzie M_a — moment gnący w przekroju $a-a$.

padku bardzo długiej pryzmatycznej tarczy równomiernie rozciąganej w przekrojach odległych od wykroju (rys. 8.23a). Wprowadzając dwa zerowe układy naprężeń rozdzielamy zagadnienie na dwa. Pierwsze z nich (rys. 8.23b) przedstawia proste rozciąganie, drugie zaś stanowi działanie układu samozrównoważonego (rys. 8.23c). W ten sposób

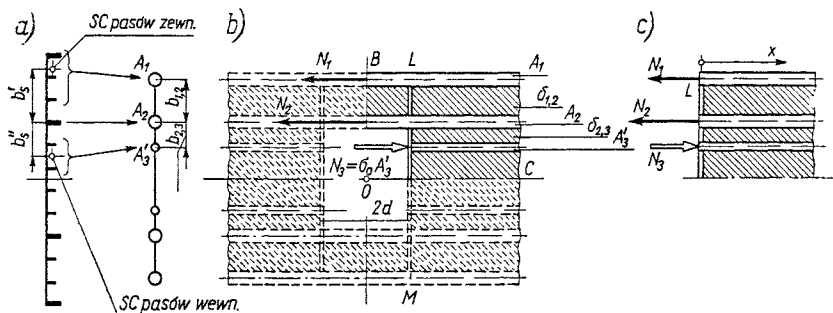


Rys. 8.23. Analiza wpływu wykroju częściowego

a) schemat konstrukcji i układ obciążeń; b) pierwsze zadanie składowe; c) obciążenie konstrukcji układem samozrównoważonym.

zagadnienie wpływu wykroju zostaje sprowadzone do rozwiązania drugiego zadania, albowiem w pierwszym zadaniu odpowiedź jest oczywista, gdyż wszystkie pasy rozciągane są stałymi naprężeniami σ_0 .

W celu uproszczenia drugiego zadania zakładamy, że konstrukcja jest podwójnie symetryczna i że ma ona nieskończenie wiele sztywnych żeber. Ponadto redukujemy liczbę pasów wzdłużnych, a mianowicie wszystkie przecięte pasy zastępujemy dwoma symetrycznie rozstawionymi w odległości $b_{2,3} = 0,7b_s''$, wszystkie zewnętrzne pasy zastępujemy też dwoma ($b_{1,2} = 0,7b_s'$), zostawiając bez zmian pasy obramowujące (rys. 8.24a). Rozwiązanie takiej zastępczej konstrukcji nie odda wszystkich finezji rozkładu



Rys. 8.24. Analiza drugiego zadania składowego

a) określenie wymiarów konstrukcji zastępczej; b) układ obciążeń od konstrukcji zastępczej; c) układ obciążeń w przekroju tarczy na żebrze obramowującym.

naprężeń normalnych i stycznych, odpowie jednak na pytania najbardziej interesujące, a mianowicie określi przebieg naprężeń w pasie obramowującym, przebieg średnich wartości naprężeń w pasach przeciętych i nieprzeciętych oraz maksymalne wartości wydatków stycznych.

Z uwagi na symetrię konstrukcji oraz symetrię obciążenia rozwiązanie drugiego zadania składowego sprowadza się do analizy ćwiartki konstrukcji (rys. 8.24b). Jediną niewiadomą jest siła N_2 , gdyż w zastępczym pasie 1 siła $N_1 = N_3 - N_2$. Wydatek styczny q w przekroju na osi symetrii OB jest równy zeru, stąd zaś wynika, że jest on równy zeru również w całym pokryciu segmentu osłabionego, a siły w pasach na odcinku tegoż segmentu są stałe. W ten sposób zadanie drugie sprowadza się do analizy działania sił N_1 , N_2 i N_3 w bardzo długiej tarczy (rys. 8.24c). Jest ono podobne do zadań rozwiązanych w art. 8.6. Różnica polega na odmienności warunków brzegowych oraz na tym, że pas środkowy A_3 podzielono na dwa pasy A'_3 . Zakładając zatem we wzorach art. 8.6 $A_3 = 2A'_3$ otrzymujemy wydatki styczne ze wzoru (8.40), przy czym wykładniki k_i ($i = 1, \dots, 4$) wyznaczamy ze wzoru (8.39). Z uwagi na dużą długość ściany oraz lokalny charakter obciążenia stałe C_2 i C_4 odpowiadające dodatnim wartościom pierwiastków, tj. k_2 i k_4 muszą być równe zeru. Tak więc

$$q_{1,2} = C_1 e^{k_1 x} + C_3 e^{k_3 x}, \quad q_{2,3} = D_1 e^{k_1 x} + D_3 e^{k_3 x}, \quad (8.43)$$

gdzie stałe C_i i D_i związane są zależnościami (8.40c).

Przechodząc do wyznaczenia stałych C_1 i C_3 oraz nieznannej siły N_2 zauważymy, iż ze wzorów (8.34) i (8.35) otrzymujemy dwie zależności

$$\left(\frac{dq_{1,2}}{dx} \right)_{x=0} = C_1 k_1 + C_3 k_3 = \frac{G \delta_{1,2}}{b_{1,2}} \left(\frac{N_2}{EA_2} - \frac{N_1}{EA_1} \right), \quad (8.44a)$$

$$\left(\frac{dq_{2,3}}{dx}\right)_{x=0} = -C_1 \frac{k_1(k_1^2 - K_1^2)}{K_{1,2}^2} - C_3 \frac{k_3(k_1^2 - K_3^2)}{K_{1,2}^2} = \frac{G\delta_{2,3}}{b_{2,3}} \left(-\frac{N_3}{EA_3} - \frac{N_2}{EA_2}\right). \quad (8.44b)$$

Brakującą trzecią zależność otrzymamy biorąc pod uwagę, że

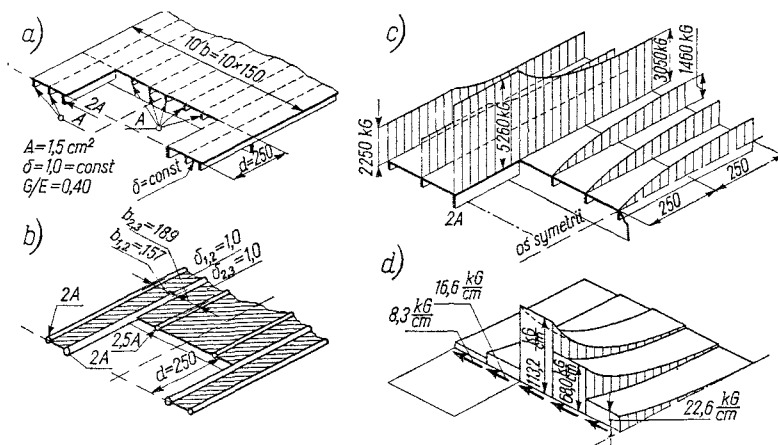
$$(u_1)_{x=0} = \frac{N_1}{EA_1}d, \quad (u_2)_{x=0} = \frac{N_2}{EA_2}d,$$

skąd ze wzorów (8.34a) i (8.43) wynika

$$(q_{1,2})_{x=0} = C_1 + C_3 = \frac{G\delta_{1,2}d}{b_{1,2}} \left(\frac{N_2}{EA_2} - \frac{N_1}{EA_1}\right), \quad (8.44c)$$

przy czym $N_1 = N_3 - N_2$. Rozwiązanie równań (8.44) przeprowadzamy zazwyczaj na wartościach szczegółowych, po czym ze wzorów (8.33) określamy przebieg sił w pasach. Całkowite siły w pasach wyznaczamy składając rozwiązania obydwu zadań (rys. 8.23b, c).

Wyniki analizy przeprowadzonej według tych wskazówek podaje rys. 8.25. Siłę w pasie obramowującym określamy jako N_3 , natomiast siły w pasach pozostałych określa się przy założeniu, że wszystkie



Rys. 8.25. Wyniki analizy wpływu wykoju

a) szkic konstrukcji rzeczywistej; b) konstrukcja zastępcza; c) przebieg sił w pasach przy $\sigma_0 = 1000 \text{ kG/cm}^2$; d) przebieg wydatków.

pasy związane w zastępczej konstrukcji w jeden mają te same naprężenia. Tak więc w rozważanym przykładzie siła w każdym z przeciętych pasów jest równa $0,4N_3$, a w każdym pasie zewnętrznym $0,5N_1$. Jak widać najsilniejsza koncentracja naprężeń normalnych (-75%) występuje w pasie obramowującym.

Wprowadzone założenie o rozdziale sił N_3 i N_2 określa przebieg wydatków q w poszczególnych pasach pokrycia. Wydatki te zmieniają się schodkami (rys. 8.25d), przy czym wysokość schodka jest proporcjonalna do przekroju pasa rozgraniczającego pola pokrycia. W omawianym przykładzie jest ona równa $0,5q_{1,2}$ w części zewnętrznej i $0,4q_{2,3}$ w części wewnętrznej, przy czym przebieg $q(x)$ określony jest w każdym z pól wzorem (8.43). W przypadku granicznym, gdy pasów jest bardzo dużo, wykresy schodkowe zamieniają się na spadające liniowo do środka lub na zewnątrz. Podkreślić należy, iż w części zewnętrznej maksymalny wydatek styczny pojawia się przy $x > 0$, podczas gdy w części wewnętrznej występuje on w przekroju $x = 0$. Wydatki styczne w części zewnętrznej są znacznie (kilkakrotnie) mniejsze niż w wewnętrznej przeciętej części.

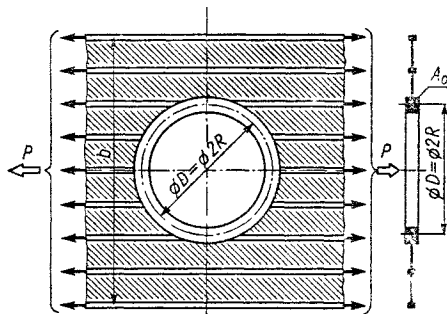
Bardzo często pas obramowujący jest wzmocniony w części osłabionej wykrojem, przy czym to zgrubienie pasa maleje łagodnie na zewnątrz tej osłabionej części. W przypadkach takich, jak wykazują doświadczenia, dość dobre przybliżenie* otrzymuje się formułując dwukrotnie układ równań (8.44), a mianowicie:

a. W wersji I zakładamy, iż A_2 ma na całej długości ściany wartość odpowiadającą części tarczy osłabionej wykrojem. Obliczone tak wartości naprężeń przyjmujemy jako obowiązujące w osłabionej części oraz w nieosłabionej części tarczy do połowy odcinka, na którym zachodzi stopniowe zgrubienie pasa obramowującego.

b. W wersji II zakładamy, iż A_2 ma na całej długości ściany wartość, odpowiadającą nieosłabionej części tarczy. Obliczone tak naprężenia przyjmujemy jako działające na zewnątrz od połowy odcinka, na którym zachodzi zgrubienie pasa obramowującego.

Warunkiem stosowania tej metody jest, aby odcinek l , na którym pogrubiamy pas obramowujący, był dostatecznie długi ($K_2 l \geq 1$). Wartość K_2 obliczamy przy tym według art. 8.6 stosując średnią wartość pola przekroju A_2 .

W niektórych przypadkach wielopasowe ściany osłabione są wykrojem kołowym (rys. 8.26) wzmocnionym pierścieniem obramowującym ten wykrój. Zagadnienie określenia naprężeń w tego rodzaju



Rys. 8.26. Parametry geometryczne wykroju kołowego

konstrukcji nie zostało jeszcze rozwiązane ściśle i dlatego posługujemy się zależnościami empirycznymi. Średnia wartość naprężeń σ_{sr} w pokryciu i pasach osłabionego przekroju tarczy rozciąganej siłą P

$$\sigma_{sr} = P/(A + 1,16A_0), \quad (8.45a)$$

gdzie

A_p — przekrój pokrycia i pasów wzdłużnych w przekroju osłabionym,

A_0 — przekrój pierścienia obramowującego.

Maksymalne naprężenie

$$\sigma_{max} = \sigma_{sr}[1 + (D/b)] \quad (8.45b)$$

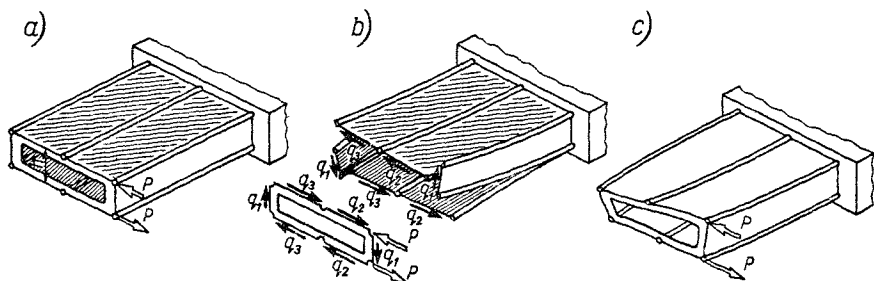
występuje w pasie stycznym do pierścienia lub w pierwszym najbliższym do tego pasa pasie przeciętym. Co się tyczy naprężeń od zginania w samym pierścieniu, to dotychczas nie znaleziono prawidłowej metody ich obliczania. Rozpatrywanie pierścienia jako ramy obciążonej oddziaływaniami pasów z pominięciem współdziałania pokrycia, które w tym ujęciu jest myślowo wzdłuż poprzecinane, daje wartości naprężeń kilkakrotnie większe od rzeczywistych. Maksymalne naprężenia styczne w pokryciu można średnio przyjmować $0,45\sigma_{max}$. Wzory (8.45) są wynikiem ograniczonej liczby doświadczeń i dlatego należy traktować z pewną ostrożnością.

* Przeprowadzone w NACA doświadczenia wykazały, iż wprowadzony schemat zastępczy pozwala określić naprężenia w pasach wzdłużnych z dokładnością do 5% (błąd średni).

8.8 Przestrzenne współdziałanie segmentów.

Skrzynkowa konstrukcja 4-pasowa

Redukcja rozpatrzonych dotychczas zagadnień określenia korygujących stanów napięć do zagadnień statyki tarcz płaskich (art. 8.2) była możliwa tylko dlatego, że dzięki symetrii konstrukcji i symetrii obciążenia znany był stan napięć w pionowych półkorupowych ściankach (rys. 8.4). Jeśli jednak skrzynkowa konstrukcja symetryczna obciążona jest antysymetrycznie (rys. 8.27), to warunek równoważności momentów skręcających, jako



Rys. 8.27. Przykład konstrukcji, w której występuje współdziałanie przestrzenne
a) szkic konstrukcji i układ obciążeń; b) rozkład konstrukcji na elementy płaskie, równanie momentów $q_1 h(b_2 + b_3) + q_2 b_2 h + q_3 b_3 h = Ph$ ma 3 niewiadome wydatki; c) obraz odkształceń zespołu.

jedyny niespełniony tożsamościowo, przedstawia równanie co najmniej z dwoma niewiadomymi wydatkami stycznymi*. Stosunek wartości wydatków w powłokach górnej i dolnej i ściankach pionowych zależy od stosunku sztywności elementów**.

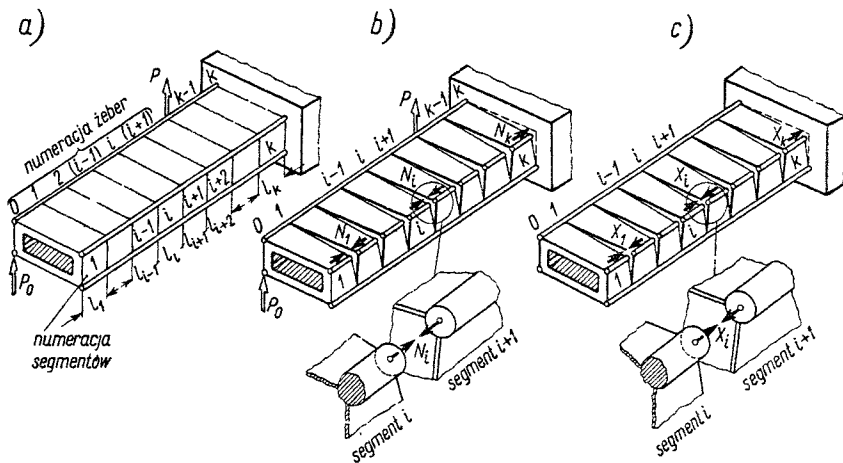
Analizę tego rodzaju zagadnień, w których występuje współdziałanie podzespołów nie leżących w jednej płaszczyźnie, a więc zagadnień przestrzennych, rozpoczniemy od przypadku 4-pasowej konstrukcji skrzynkowej półkorupowej (rys. 8.28). Dla ogólności założymy przy tym, że konstrukcja nie ma pionowej płaszczyzny symetrii. Wracając do podanej w art. 8.1 interpretacji fizycznej zauważmy, że w konstrukcji tej, na skutek jej wielosegmentowej budowy, napięcia stanu podstawowego mogą wywołać nieciągłości przemieszczeń między każdymi sąsiadującymi segmentami. Do zlikwidowania tych nieciągłości

* Stwierdzenie to jest słuszne, gdy liczba pasów jest równa lub większa od czterech. Jeśli pasów jest mniej niż cztery, to zadanie jest statycznie wyznaczalne (patrz art. 7.9).

** Rozważaną konstrukcję można traktować jako powstałą ze złączenia wzdłuż narożnych pasów dwóch dźwigarów poziomych i dwóch pionowych (rys. 8.27b). Dzięki istnieniu sztywnego zebra obciążenie momentem Ph rozprowadzone zostaje na cały obwód poprzecznego przekroju konstrukcji pod postacią wydatków stycznych, zginających każdy składowy dźwigar w jego płaszczyźnie. Ugięcia jednak tych dźwigarów związane są z obrotem sztywnego zebra w jego płaszczyźnie, nie mogą więc być niezależne od siebie (rys. 8.27c). Wskutek tego rozdział momentu Ph na pionową i poziome pary sił zależeć będzie od sztywności dźwigarów. Przedstawiona interpretacja fizycznej strony zjawiska nie wyklucza interpretacji podanej w art. 8.1. Posługiwanie się jedną lub drugą interpretacją zależy od tego, która z nich jest w danym przypadku wygodniejsza.

wprowadzamy siły wzdłużne* X_i , przy czym działanie każdej z sił X zamyka się w obrębie dwóch sąsiadujących segmentów. Jeśli uwzględniamy odkształcalność żeber, to stwierdzenie to prowadzi w wyniku do 5-członowych równań M—M (art. 1.4). Równanie wyrażające ciągłość przemieszczeń wzdłużnych między segmentem i a $i+1$ ma postać

$$a_{i,i-2}X_{i-2} + a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,i+2}X_{i+2} + a_{i,0} = 0, \quad (8.46a)$$



Rys. 8.23. Analiza wielosegmentowej konstrukcji 4-pasowej

a) szkic konstrukcji; b) układ statycznie wyznaczalny, N_i — siła stanu podstawowego (stan „0”) w przeciętym myślowo pasie określona według art. 7.12 dla 4-pasowej konstrukcji; c) układ sił X_i statycznie niewyznaczalnych.

gdzie $a_{i,i}$ — zbliżenie przekrojów rozciętego myślowo pasa na żebrze i wywołane siłą $X_i = 1 \text{ kG}$,

$a_{i,i+2}$ — także zbliżenie wywołane siłą $X_{i+2} = 1 \text{ kG}$ itp.

W przypadku gdy można zaniedbać odkształcalność żeber, równania (8.46a) przekształcają się w 3-członowe

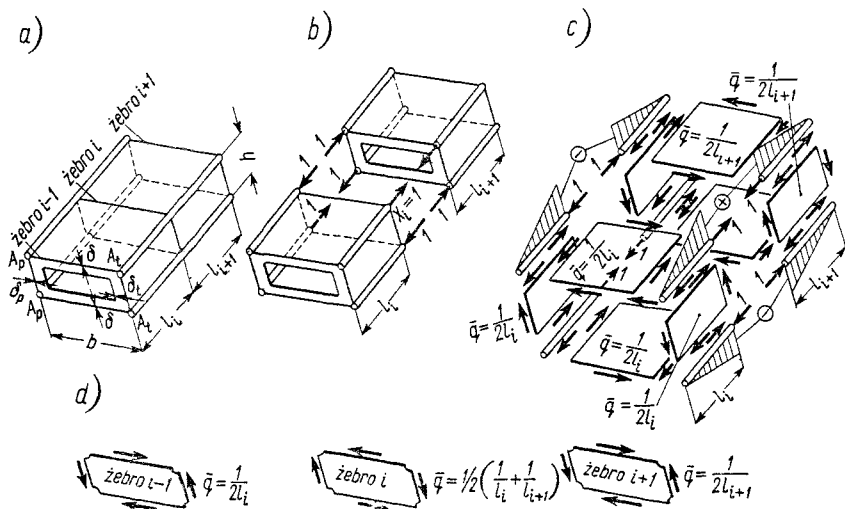
$$a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,0} = 0, \quad (8.46b)$$

gdyż o sprzężeniu między układem X_i a X_{i+2} decyduje wyłącznie odkształcalność żebra między segmentem $(i+1)$ a $(i+2)$. Żebro to jest bowiem jedynym elementem konstrukcji, w którym jednocześnie pojawiają się różne od zera siły wewnętrzne od układu X_i oraz X_{i+2} . To samo stwierdzenie dotyczy sprzężenia między X_{i-2} oraz X_i .

Aby układ równań (8.46) miał znaczenie praktyczne, potrzeba podać wyrażenia dla współczynników $a_{i,j}$ oraz wyrazu wolnego $a_{i,0}$. W tym celu należy najpierw obliczyć siły wewnętrzne w konstrukcji wywołane jednostkową siłą X_i . Jeśli konstrukcja jest

* Zarówno postać sił X_i , jak i model ustroju powstającego w wyniku wprowadzenia tych sił są merytorycznie te same co i w 4-podłużnicowych kratownicach przestrzennych (art. 4.3, rys. 4.6). Jedyną różnicę stanowi odmienny sposób przeniesienia sił wewnętrznych wynikający z zastąpienia prętowych wykrzyżowań przez ścianki (art. 7.3).

skrzynkowa (rys. 8.29a), to po przecięciu w płaszczyźnie zębra i zauważamy, że oddziaływania pozostałych pasów przedstawiają się pod postacią trzech sił wzdłużnych też o jednostkowej wartości (rys. 8.29b). Działanie takiej grupy sił wzdłużnych na pojedynczy segment było już rozpatrywane (patrz rys. 7.22). Transponując więc tamte wyniki otrzymujemy układ sił wewnętrznych działających w poszczególnych elementach (rys. 8.29c, d).



Rys. 8.29. Stan $X_i = 1$ kG (stan „i”)

a) szkic konstrukcji; b) układ oddziaływań między segmentem i a $i+1$; c) układ sił wewnętrznych w pokryciu i pasach; d) statyka zębów.

Jeśli podobnie narysować działanie sił $X_{i-2} = 1$ kG, $X_{i-1} = 1$ kG itd., to postępując według reguły z art. 1.2 i wykorzystując wzór (7.5), otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned}
 a_{i,i-2} &= \frac{B_{i-1}}{l_i l_{i-1}}, \\
 a_{i,i-1} &= -\frac{B_{i-1}}{l_i l_{i-1}} \left(1 + \frac{l_{i-1}}{l_i}\right) - \frac{B_i}{l_i^2} \left(1 + \frac{l_i}{l_{i+1}}\right) - \frac{p_i}{4Gl_i} + \frac{l_i}{3EA_i^*}, \\
 a_{i,i} &= \left[\frac{B_{i-1}}{l_i^3} + \frac{B_i}{l_i^2} \left(1 + \frac{l_i}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}^3} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4G} \left(\frac{p_i}{l_i} + \frac{p_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \frac{2}{3E} \left(\frac{l_i}{A_i^*} + \frac{l_{i+1}}{A_{i+1}^*} \right), \\
 a_{i,i+1} &= -\frac{B_i}{l_i l_{i+1}} \left(1 + \frac{l_i}{l_{i+1}}\right) - \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}^2} \left(1 + \frac{l_{i+1}}{l_{i+2}}\right) - \frac{p_{i+1}}{4Gl_{i+1}} + \frac{l_{i+1}}{3EA_{i+1}^*}, \\
 a_{i,i+2} &= \frac{B_{i+1}}{l_{i+1} l_{i+2}},
 \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

gdzie

$$p_i = \left(\frac{2b}{\delta} + \frac{h}{\delta_p} + \frac{h}{\delta_t} \right)_i, \quad \frac{1}{A_i^*} = \left(\frac{1}{A_p} + \frac{1}{A_t} \right)_i. \quad (8.48)$$

Wielkość B_i zależy od odkształcalności żebra i , a mianowicie, gdy żebro stanowi pełną ścianę o grubości $\bar{\delta}_i$, to

$$B_i = bh/4G\bar{\delta}_i, \quad (8.49a)$$

gdy zaś jest ramą o stałej sztywności EJ_i (rys. 7.22), to

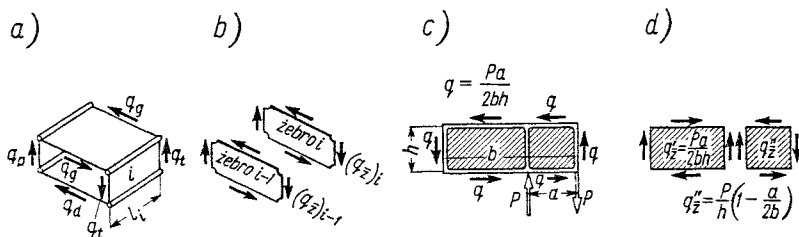
$$B_i = (b'h')^2(b' + h')/96EJ_i. \quad (8.49b)$$

W przypadku konstrukcji regularnej, gdy wszystkie segmenty są jednakowe, wzory (8.47) przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-2} &= a_{i,i+2} = \frac{B}{l^2}, \\ a_{i,i+1} &= a_{i,i-1} = -\frac{4B}{l^2} - \frac{p}{4Gl} + \frac{l}{3EA^*}, \\ a_{i,i} &= \frac{6B}{l^2} + \frac{2p}{4Gl} + \frac{4l}{3EA^*}, \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

gdzie oznaczenia są określone wzorami (8.48) i (8.49).

Obliczenie wyrazów wolnych $a_{i,0}$ przeprowadzamy według reguł art. 1.2 uwzględniając odkształcalność pasów, pokrycia i żebier. Łatwo się przy tym przekonać, że składnik wynikający z odkształcalności pasów jest równy zeru, o ile siły podstawowego stanu napięć w tych pasach są wyznaczone jak



Rys. 8.30. Wydatki stanu podstawowego

a), b) dodatnie zwroty wydatków stycznych stanu podstawowego w pokryciu i żebier; c), d) przykład określenia wydatków stycznych stanu podstawowego w żebierze.

dla 4-pasowego pręta (art. 6.5). Jeśli wydatki q stanu podstawowego mają zwroty takie jak podaje rys. 8.30a, b, to dla konstrukcji z żebierami w postaci pełnych ścian

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= \frac{1}{2G} \left[h \left(\frac{q_p}{\delta_p} + \frac{q_t}{\delta_t} \right) - \frac{b}{\delta} (q_g + q_d) \right]_i - \frac{1}{2G} \left[h \left(\frac{q_p}{\delta_p} + \frac{q_t}{\delta_t} \right) - \frac{b}{\delta} (q_g + q_d) \right]_{i+1} - \\ &- \frac{1}{2Gl_i \bar{\delta}_{i-1}} \left[\int q_z dF \right]_{i+1} + \frac{1}{2G\bar{\delta}_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) \left[\int q_z dF \right]_i - \frac{1}{2Gl_{i+1} \bar{\delta}_{i+1}} \left[\int q_z dF \right]_{i+1}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

gdzie $[\]_i$ oznacza, iż wszystkie wielkości w nawiasie należy brać ze wskaźnikiem i , a $[\int q_z dF]_i$ przedstawia

całkowanie na całej powierzchni zębra i wydatków stycznych odpowiadających podstawowemu stanowi napięcie*.

Dla konstrukcji z żebrami ramowymi we wzorze (8.51) ulegają zmianie tylko trzy ostatnie człony, zamiast których należy wstawić

$$\left[\oint \frac{Mm}{EJ} ds \right]_{i-1} + \left[\oint \frac{Mm}{EJ} ds \right]_i + \left[\oint \frac{Mm}{EJ} ds \right]_{i+1} \quad (8.52)$$

gdzie M , m są odpowiednio momentami zginającymi w danym zębrze podstawowego stanu napięcia i stanu jednostkowego obciążenia, a całkowanie obejmuje cały obwód ramy**.

Przechodząc do omówienia układu równań (8.46) zauważmy, iż w przypadku, gdy obydwa skrajne zębra konstrukcji są swobodne, symboliczna postać układu pokrywa się z podaną na rys. 1.13. W przypadku gdy jeden z przekrojów końcowych jest utwierdzony, $X_k \neq 0$ (rys. 8.28). W takim przypadku równania ciągłości przemieszczeń w przekrojach zębów $k-1$ oraz k mają postać

$$\left. \begin{aligned} a_{k-1,k-3} X_{k-3} + a_{k-1,k-2} X_{k-2} + \bar{a}_{k-1,k-1} X_{k-1} + \bar{a}_{k-1,k} X_k + \bar{a}_{k-1,0} &= 0, \\ a_{k,k-2} X_{k-2} + \bar{a}_{k,k-1} X_{k-1} + \bar{a}_{k,k} X_k + \bar{a}_{k,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.53)$$

gdzie $\bar{a}$ oznaczają te współczynniki, które obliczamy wprowadzając we wszystkich odpowiednich wzorach (8.47÷8.51) fikcyjny segment $k+1$ o zerowej długości i nieskończonej sztywności jego elementów. Jeśli ponadto utwierdzenie uniemożliwia zmianę kształtu zębra k w jego płaszczyźnie, to należy założyć $\bar{\delta}_k = \infty$, względnie $J_k = \infty$. Łatwo przy tym sprawdzić, że liczba niewiadomych grup sił X pokrywa się z liczbą równań.

8.9. Inne konstrukcje przestrzenne 4-pasowe

Jeśli skrzynkowa konstrukcja wielosegmentowa jest lekko zbieżna (rys. 8.31a), to wyznaczenie w niej sił wewnętrznych wywołanych grupami sił X należałoby prowadzić według wskazówek art. 7.5.

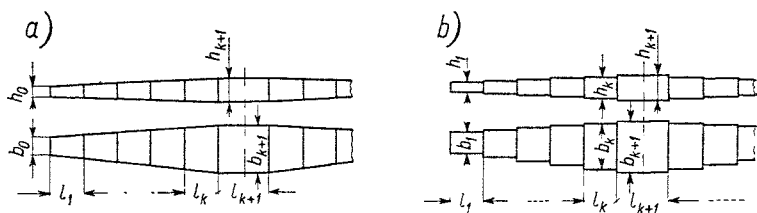
Jak wynika jednak z przeprowadzonych przeliczeń, zadowalającą dokładność rozwiązania układu statycznie niewyznaczalnego otrzymujemy wprowadzając konstrukcję zastępczą o prostopadłościennych segmentach (rys. 8.31b). Wymiary b i h tych segmentów są równe średnim wartościom tych wymiarów

* Jeśli na przykład w płaszczyźnie zębra i (rys. 8.30c) wprowadzono parę sił skupionych, a zebro ukształtowane jest jako płaski dźwigar, to wyznaczając siły wewnętrzne (rys. 8.30d) i uwzględniając przyjęty za dodatni zwrot wydatków (q_2) _{i} (rys. 8.30b) mamy w danym przyкладzie

$$\left[\int q_2 dF \right]_i = - \frac{Pa}{2bh} (b-a) h + \frac{P(2b-a)}{2bh} ha = \frac{Pa}{2}.$$

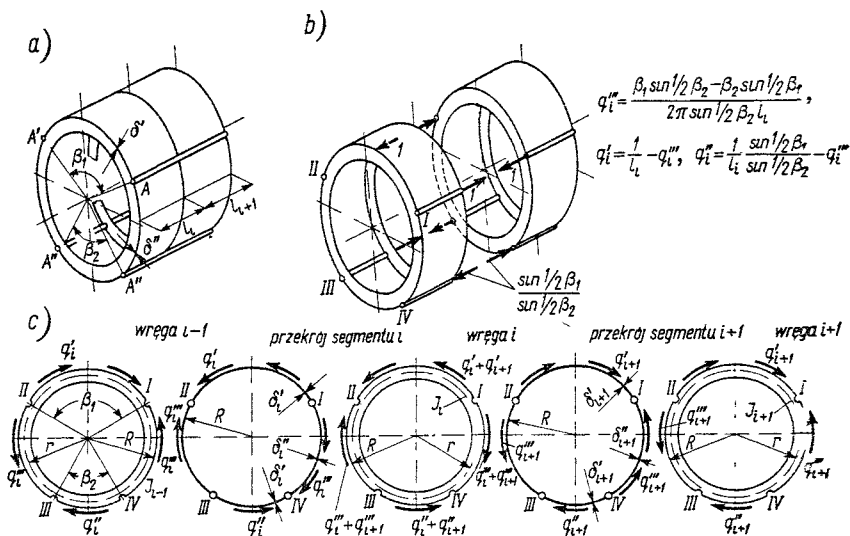
** Jeśli na pewnym odcinku wielosegmentowej konstrukcji pryzmatycznej siła poprzeczna i moment skręcający są stałe, to wyrazy $a_{i,0}$ na tym odcinku są równe zeru. Wartość współczynników równań (8.46) zależy od podatności pasów, pokrycia i zębów. Przy gęstym rozstawie zębów ($l < 0,5b$) podatność pasów i cienkościennych tarczowych zębów daje składniki tego samego rzędu. Wartości tych składników są znacznie mniejsze od członu odpowiadającego podatności pokrycia. Inaczej nieco przedstawiają się proporcje w przypadku konstrukcji z żebrami ramowymi, gdyż wtedy głównym składnikiem staje się człon odpowiadający podatności tych zębów.

na danym segmencie. Równania (8.46) nie zmieniają swej postaci, a tylko w wyrażeniach (8.47 ÷ 8.51) wymiary b i h otrzymują odpowiednie wskaźniki przypominające o ich zmiennej skokami wartości. Przy obliczeniu wyrazów wolnych wydatki odpowiadające podstawowemu stanowi napięć bierzemy równe wartościom średnim wyznaczonym z uwzględnieniem zbieżności konstrukcji (patrz art. 6.12).



Rys. 8.31. Uproszczenie konstrukcji zbieżnej

Dla 4-pasowych konstrukcji o kształcie odmiennym od skrzynkowego zmienia się postać grup sił X (rys. 8.29b), a mianowicie przestaje na ogół obowiązywać równość bezwzględnych wartości poszczególnych sił składających się na daną grupę. Układ jednak równań (8.46) oraz metoda wyznaczania si



Rys. 8.32. Stan $X_i = 1 \text{ kG}$ (stan „i’’) w konstrukcji 4-pasowej cylindrycznej

a) szkic konstrukcji; b) grupa sił $X_i = 1 \text{ kG}$; c) układ wydatków stycznych w pokryciu i oddziaływań na wręgi.

wewnętrznych i współczynników zostaje niezmienniona. Jeśli na przykład konstrukcja ma postać walca kołowego (rys. 8.32a), to grupa sił $X_i = 1 \text{ kG}$ ma postać według rys. 8.32b. Obliczenie sił wewnętrznych w każdym z elementów przeprowadzamy według art. 7.11, otrzymując w wyniku układ sił wewnętrznych

(rys. 8.32c). Jeśli $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, to grupa sił $X_i = 1$ kG ma postać jak dla konstrukcji skrzynkowej. W tym przypadku współczynniki równań (8.46) wyrażają się następująco

$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-2} &= \frac{B_{i-1}}{l_{i-1}l_i}, \\ a_{i,i-1} &= -\frac{B_{i-1}}{l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) - \frac{B_i}{l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) - \frac{2\beta\gamma RK_i}{\pi^2 G} + \frac{l_i}{3EA_i^*}, \\ a_{i,i} &= \frac{B_{i-1}}{l_i^2} + B_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right)^2 + \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}^2} + \frac{2\beta\gamma R(K_i + K_{i+1})}{\pi^2 G} + \frac{2l_i}{3EA_i^*} + \frac{2l_{i+1}}{3EA_{i+1}^*}, \\ a_{i,i+1} &= -\frac{B_i}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) - \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}} \right) - \frac{2\beta\gamma RK_{i+1}}{\pi^2 G} + \frac{l_{i+1}}{3EA_{i+1}^*}, \\ a_{i,i+2} &= \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}l_{i+2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.54)$$

gdzie

$$\frac{1}{A_i^*} = \frac{1}{A_i'} + \frac{1}{A_i''}, \quad \gamma + \beta = \pi, \quad K_i = \left(\frac{\gamma}{\delta_i'} + \frac{\beta}{\delta_i''} \right) \frac{1}{l_i}.$$

Wielkość B zależy od ukształtowania żebra (wrgi). Jeśli wrga przedstawia pierścień (ramę), to

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{R^2 \xi}{EJ_i} \left\{ \xi^2 \left[\sin \frac{\beta}{2} (\gamma - \sin \gamma) + \sin \frac{\gamma}{2} (\beta - \sin \beta) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8\xi}{\pi} \left[\beta \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) + \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \right] + \frac{\beta^2 \gamma^2}{6\pi} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\xi = r/R$, a ponadto J_i — moment bezwładności przekroju wrgi i , oddzielającej segment i od $i+1$.

Postępując podobnie w przypadku konstrukcji 4-pasowej z dźwigarami o niejednakowej wysokości (rys. 8.33), otrzymujemy

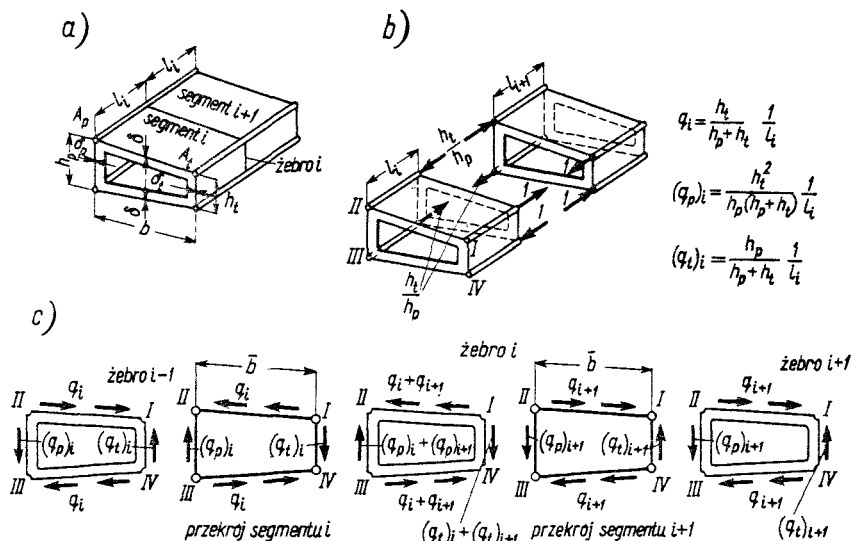
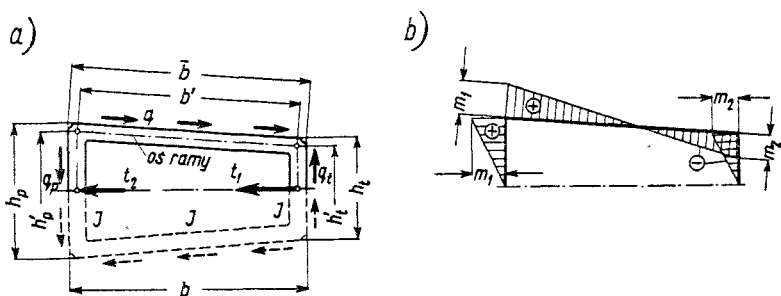
$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-2} &= \frac{B_{i-1}}{l_{i-1}l_i}, \\ a_{i,i-1} &= -\frac{B_{i-1}}{l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) - \frac{B_i}{l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) - \frac{p_i}{Gl_i(1+\psi)^2} + \frac{l_i}{3EA_i^*}, \\ a_{i,i} &= \frac{B_{i-1}}{l_i^2} + B_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right)^2 + \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}^2} + \frac{1}{G(1+\psi)^2} \left(\frac{p_i}{l_i} + \frac{p_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \frac{2l_i}{3EA_i^*} + \frac{2l_{i+1}}{3EA_{i+1}^*}, \\ a_{i,i+1} &= -\frac{B_i}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) - \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}} \right) - \frac{p_{i+1}}{G(1+\psi)^2 l_{i+1}} + \frac{l_{i+1}}{3EA_{i+1}^*}, \\ a_{i,i+2} &= \frac{B_{i+1}}{l_{i+1}l_{i+2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

gdzie

$$\psi = h_i/h_p, \quad 1/A_i^* = (1/A_{pi}) + (1/A_{ti}), \quad p_i = \left(\frac{2b}{\delta} \psi^2 + \frac{h_t}{\delta_i} + \frac{h_p}{\delta_p} \psi^4 \right)_i.$$

Jeśli zebrą ukształtowane są jako ramy (rys. 8.34), to zakładając dla prostoty, że oś sprężysta ramy pokrywa się z konturem pokrycia ($h_p = h_p'$, $h_t = h_t'$, $b' = b$) otrzymujemy

$$B_i = \frac{1}{3EJ_i} [m_2^2 h_p + m_1^2 h_t + b'(m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2)],$$

Rys. 8.33. Stan $X_i = 1 \text{ kG}$ w 4-pasowej konstrukcji trapezoweja) szkic konstrukcji; b) grupa sił $X_i = 1 \text{ kG}$; c) układ wydatków stycznych w pokryciu i oddziaływań na żebra.

Rys. 8.34. Statyka żebra ramowego

a) wymiary ramy; b) wykres momentów gnących, gdy $\bar{b} = b'$, $h_p = h'_p$, $h_t = h'_t$ i gdy $q = h_t/(h_t + h_p)$.

gdzie

$$m_1 = bh_p \frac{[1 + \chi(2 + \psi)]\psi^2}{2(1 + \psi)[(1 + \psi^3) + 2\chi(1 + \psi + \psi^2)]},$$

$$m_2 = bh_p \frac{(1 - \psi + \psi^3) + \chi(2 + \psi^2)}{2(1 + \psi)[1 + \psi^3 + 2\chi(1 + \psi + \psi^2)]},$$

przy czym $\chi = b'/b$.W przypadku żebier wykonanych jako ściany o grubości δ_z

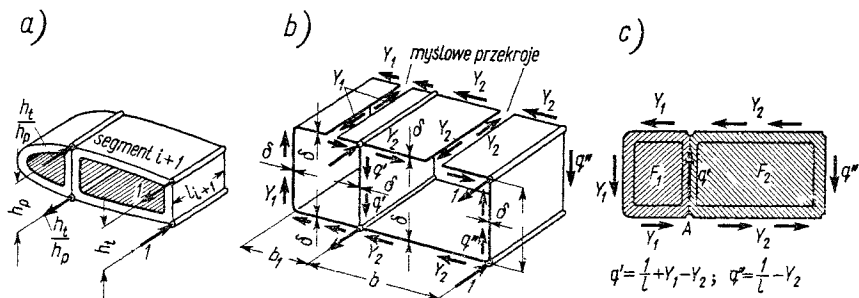
$$B_i \approx \psi^2 bh_p / 2G(1 + \psi)(\delta_z)_i.$$

W przypadku gdy 4-pasowa konstrukcja jest wieloobwodowa (rys. 8.35a), postać grupy sił X zostaje taka jak dla konstrukcji jednoobwodowej. Wartość wydatków w pokryciu określamy w sposób

przybliżony według wskazówek art. 6.11. Jeśli konstrukcja ma przekrój złożony z dwóch prostokątnych obwodów (rys. 8.35b), to układ wydatków $\bar{q} = 1/l$ odpowiadających konstrukcji z wprowadzonymi przecięciami musi być uzupełniony wydatkami* Y_1 i Y_2 określonymi z równań (6.44),

$$p_{1,1}Y_1 - p_{1,2}Y_2 + \oint_1 \frac{\bar{q} ds}{\delta} = 2GF_1\varphi,$$

$$-p_{2,1}Y_1 + p_{2,2}Y_2 + \oint_2 \frac{\bar{q} ds}{\delta} = 2GF_2\varphi,$$



Rys. 8.35. Stan $X_i = 1$ kG w 4-pasowej konstrukcji 2-obwodowej

a) grupa sił $X_i = 1$ kG, dla prostoty narysowano tylko segment $i+1$ opuszczając segment i ; b) układ sił wewnętrznych, gdy rury są prostokątne; c) układ oddziaływań na żebro odpowiadający obciążeniu $X_i = 1$ kG.

gdzie

$$p_{1,1} = 2(b_1 + h)/\delta, \quad p_{1,2} = p_{2,1} = h/\delta, \quad p_{2,2} = 2(b + h)/\delta, \quad F_1 = b_1 h, \quad F_2 = b h,$$

a ponadto

$$\oint_1 \frac{\bar{q} ds}{\delta} = \frac{h}{l\delta}, \quad \oint_2 \frac{\bar{q} ds}{\delta} = -\frac{2h}{l\delta}.$$

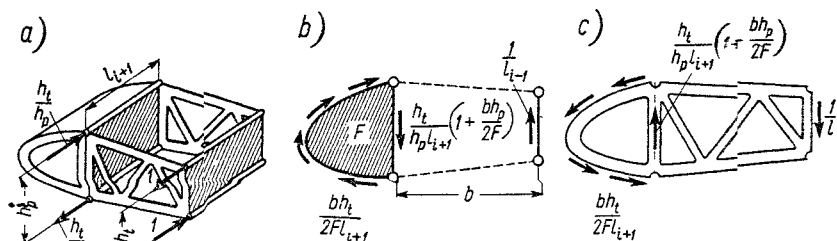
Warunek równowagi momentów dla żebra napisany względem obranego punktu A (rys. 8.35c) daje równanie typu (6.45)

$$2Y_1F_1 + 2Y_2F_2 - \frac{1}{l}F_2 = 0.$$

Mając te trzy równania możemy określić siły wewnętrzne stanu $X_i = 1$ kG, a następnie w sposób podobny jak poprzednio obliczyć współczynniki $a_{i,j}$ układu równań (8.46). Tą samą metodą można rozwiązać konstrukcję (rys. 8.36), w której działanie grupy sił $X_i = 1$ kG wywołuje siły wewnętrzne podane na rysunku 8.36b.

Jak widać z przytoczonych wzorów, nawet dla względnie prostych konstrukcji współczynniki a wyrażają się w sposób bardzo złożony. Z tego powodu w praktyce, po ustaleniu postaci grupy sił $X_i = 1$ (rys. 8.33b), wszystkie dalsze obliczenia prowadzimy na liczbach szczegółowych wyznaczając najpierw wartości sił wewnętrznych, a następnie według reguł art. 1.2 określając współczynniki $a_{i,j}$ i wyrazy wolne $a_{i,0}$.

* W porównaniu z art. 6.11 zmieniono tu oznaczenia wydatków w myślowych przekrojach, aby przez to uniknąć nieporozumień. Przybliżenie opisanego sposobu wynika z nieuwzględnienia odkształcalności żeber, co z kolei wpływa na wartości wydatków Y_1 i Y_2 .

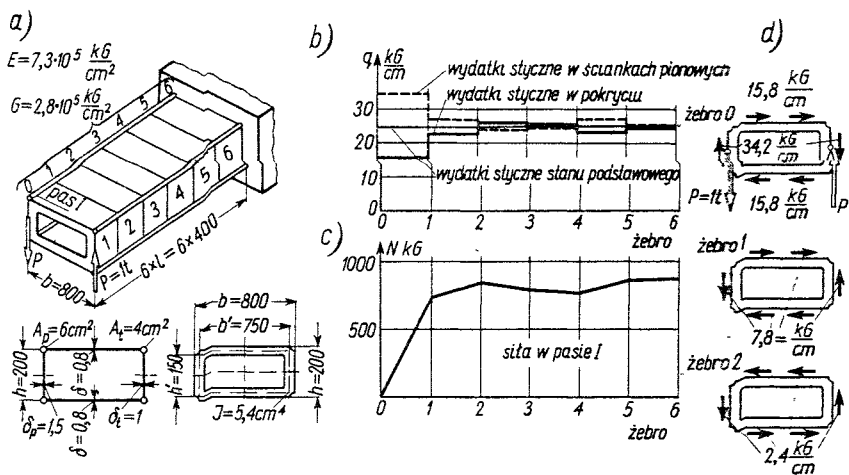


Rys. 8.36. Stan $X_i = 1 \text{ kG}$ w 4-pasowej konstrukcji z kesonem przednim

a) grupa sił $X_i = 1 \text{ kG}$, dla prostoty opuszczono segment i ; b) układ wydatków stykowych w pokryciu. c) układ oddziaływań na żebro i od wydatków w segmencie $i+1$.

8.10. Analiza wyników rozwiązań konstrukcji 4-pasowych

Opierając się na rozważaniach art. 8.8 i 8.9 rozwiązano kilka przykładów liczbowych. Wyniki końcowe tych rozwiązań podane są na rysunkach 8.37 ÷ 8.39. Przykład pierwszy (rys. 8.37) miał na celu pokazanie wpływu zamocowania oraz mechanizmu wprowadzenia

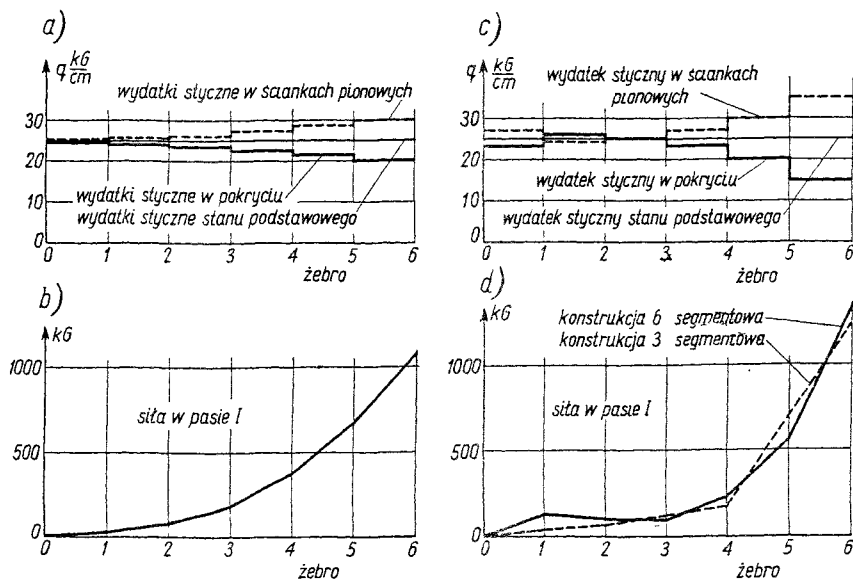


Rys. 8.37. Rozwiązanie pryzmatycznej konstrukcji 4-pasowej

a) szkic konstrukcji; b) przebieg wydatków stykowych; c) przebieg sił w pasie I; d) statyka żebra.

obciążenia skupionego (momentu skręcającego) w przypadku, gdy żebra są w swoich płaszczyznach stosunkowo mało sztywne (ramy). W wyniku otrzymujemy wykresy wydatków stykowych i sił w pasach (rys. 8.37b, c). Jak widać z tych wykresów, na skutek odkształcalności żebra 0, sąsiadujące żebra współpracują w stopniowym przenoszeniu obciążeń na pokrycie poziome (rys. 8.37d). Gdyby bowiem żebro 0 było w swej płaszczyźnie bardzo sztywne, to wciągnięcie do współpracy pokrycia poziomego byłoby zrealizowane

wane tylko przez żebro 0, pozostałe zaś praktycznie nie uczestniczyłyby w tym działaniu. Gdyby na odwrót żebro 0 i inne były bardzo podatne, to przeniesienie sił P odbywałoby się przez zginanie pionowych dźwigarów, podczas gdy pokrycie poziome w przenoszeniu obciążenia nie uczestniczyłoby zupełnie. W przypadku rozważanym proces stopniowego wciągnięcia pokrycia poziomego zamyka się na długości dwóch segmentów.



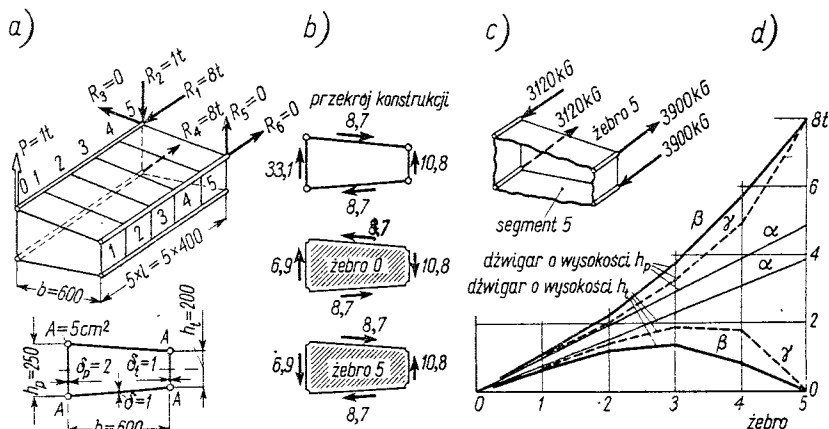
Rys. 8.38. Wyniki rozwiązań zmodyfikowanej konstrukcji z rys. 8.37a

a) i b) wydatki styczne i siła w pasie I w konstrukcji ze wzmożonym żebrem 0; c), d) wydatki i siły w konstrukcji z wzmożeniami wszystkimi żebrowami.

Z punktu widzenia konstruktora korzystne jest jak najszybsze wciągnięcie do współpracy wszystkich elementów. Cel ten osiągamy wzmacniając żebra wprowadzając obciążenie. Jeśli na przykład żebro 0 wykonać jako pełną ścianę ($\delta_2 = 1,0$ mm) to, jak widać z rysunku 8.38a, b, pełne wciągnięcie do współpracy pokrycia poziomego następuje już w przekroju żebra 0. Siły wzdłużne w pasach (rys. 8.38b) wykazują przebieg odmienny od poprzedniego (rys. 8.37), a mianowicie maksymalną wartość osiągają w utwierdzeniu. Wiąże się to z koniecznością zlikwidowania w tym przekroju nieciągłości przemieszczeń (różnicy spacen) między podłożem a segmentem 6. W otoczeniu natomiast żebra 0 siły X są małe z uwagi na to, że ramowe żebra 1, 2, ... są stosunkowo znacznie bardziej podatne niż cienkościenne żebro 0.

Podany na rysunku 8.38c, d przebieg sił wewnętrznych dotyczy konstrukcji (rys. 8.37a), w której żebra ramowe zastąpiono ściankami ($\delta_2 = 0,8$ mm). Konstrukcję tę rozwiązano w dwóch wariantach. W pierwszym z nich konstrukcja jest 6-segmentowa, w drugim usunięto co drugie żebro, tak, że konstrukcja stała się 3-segmentowa o podwójnej długości każdego segmentu. Jak widać w porównaniu z poprzednimi przypadkami (rys. 8.37

i 8.38a, b), siły w pasach wzrastają dość znacznie w przekroju utwierdzonym. Spowodowane jest to dużą sztywnością żeber, na skutek czego nieciągłość przemieszczeń jest zlikwidowana głównie na długości segmentu 6. W otoczeniu zebra 0 istnieje drugie ekstremum wskazujące na stopniowe wciągnięcie do współpracy pokrycia poziomego. W odróżnieniu jednak od konstrukcji (rys. 8.37a) wciągnięcie to odbywa się na odcinku jednego segmentu, co tłumaczy się znacznie większą sztywnością żeber cienkościennych niż ramowych.



Rys. 8.39. Wyniki rozwiązania konstrukcji 4-pasowej podpartej w 3 punktach

a) szkic konstrukcji; b) wydatki styczne w (kg/cm^2) stanu podstawowego; c) wprowadzenie dodatkowego układu samorównoważonego; d) przebieg sił w pasach; α – stan podstawowy, β – konstrukcja pryzmatyczna, γ – konstrukcja ze wzmocnionym segmentem 5. $E = 7,3 \cdot 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $G/E = 0,36$.

Wynik rozwiązania drugiego wariantu (linia przerywana na rys. 8.38d) wykazuje, że zastąpienie rzeczywistej konstrukcji przez konstrukcję o mniejszej liczbie odpowiednio dłuższych segmentów praktycznie nie zmienia maksymalnej wartości sił w pasach. Pozwala to uprościć obliczenia konstrukcji wielosegmentowych przez zmniejszenie liczby segmentów. Należy jednak podkreślić, że spiętrzenie wydatków stycznych w okolicy utwierdzenia lub wprowadzenia obciążeń jest w takiej konstrukcji o zmniejszonej liczbie segmentów mniejsze niż w konstrukcji pierwotnej.

Wreszcie jako ostatni przykład rozważono pryzmatyczną konstrukcję (rys. 8.39) podpartą w przekroju zebra 5 w sposób statycznie wyznaczalny. Siły wewnętrzne stanu podstawowego obliczono według wskazówek art. 6.5 i 6.10 zakładając, że w przekroju oporowym wszystkie cztery pasy połączone są z podłożem. Wskutek tego w pasach dźwigara niższego pojawiają się w przekroju oporowym siły stanu podstawowego o wartości $+3900 \text{ kG}$. Ponieważ ich w rzeczywistości nie ma, to przy obliczaniu sił X dołączamy samorównoważony układ (rys. 8.39c) identyczny z grupą sił $X_5 = 3900 \text{ kG}$ (rys. 8.33b). Układ równań (8.46) sprowadza się zatem do czterech równań, w których poza niewiadomymi $X_1, \dots, X_4$ występuje znana grupa sił X_5 . Wynik końcowy (rys. 8.39d) wykazuje jasno, iż niższy dźwigar nie jest należycie wykorzystany. Przyczyna tego tkwi w nie-

dostatecznej sztywności żeber i pokrycia. Gdybyśmy wzmocnili żebra 4 i 5 dając je z blachy $\delta_2 = 2,5$ mm, a pokrycie segmentu 5 z blachy $\delta = 2$ mm, to przebieg wypadkowych sił w pasach (linia przerywana na rys. 8.39d) wykazuje znacznie bardziej energiczne wciągnięcia niższego dźwigara do współpracy.

Rozwiązane przykłady oddają dość wiernie te problemy, z którymi spotykamy się w rzeczywistych konstrukcjach. Jak widać problemy te dzielą się na 3 klasy w zależności od wielkości korekty wnoszonej przez grupy sił X . Do pierwszej klasy należą te zagadnienia, w których korekta podstawowego układu napięć jest bardzo mała (rzędu paru procent). Do klasy drugiej należą te zagadnienia, w których korekta podstawowego układu jest średnia i wreszcie trzecią klasę, w której modyfikacja wniesiona przez grupy sił X jest zasadnicza. Do klasy pierwszej należą z reguły te problemy, w których grupy sił X powstają dla wyrównania różnicy spaczeń segmentów konstrukcji przyrównanej bądź łagodnie zmiennej o sztywnych żebrach (ściany). Do klasy drugiej należą zagadnienia utwierdzenia konstrukcji o sztywnych żebrach bądź zagadnienia wprowadzenia obciążeń poprzecznych w konstrukcjach z podatnymi żebrami (ramowymi). Aby w konkretnym przypadku orzec, czy zagadnienie należy do klasy drugiej, czy pierwszej, określamy przybliżoną ekstremalną wartość sił X jako

$$X_i = -\xi \frac{\alpha_{i,0}}{\alpha_{i,i}}, \quad (8.56)$$

gdzie $\alpha_{i,0}$ obliczone jest dla przekroju, w którym spodziewamy się maksymalnej nieciągłości przemieszczeń (spaczeń). Współczynnik ξ dla konstrukcji z żebrami ramowymi przyjmujemy $\xi = 2 \div 3$, dla konstrukcji z żebrami pełnymi $\xi = 1 \div 1,5$. Mając tę wartość X oceniamy procentowy jej udział w siłach układu podstawowego i określamy czy istnieje, względnie nie istnieje, potrzeba prowadzenia rachunku statycznie niewyznaczalnego w sposób ścisły.

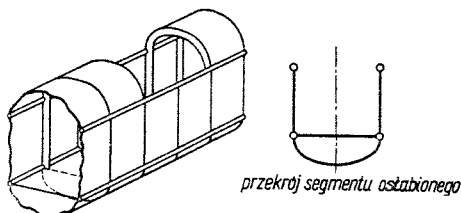
Zadania klasy trzeciej występują z reguły w przypadkach wyraźnej nieciągłości konstrukcji, jaką np. stanowi przecięcie pasa (rys. 8.39). W tej klasie przeprowadzenie rachunku statycznie niewyznaczalnego jest konieczne.

Na zakończenie podkreślamy jeszcze to, że w żadnym z podanych rozwiązań nie korzystano z pojęcia środka sił poprzecznych. Dotyczy to nie tylko analizy sił wewnętrznych, lecz również i odkształceń. Te ostatnie wyznaczamy ze wzoru 7.5. Uwaga ta jest szczególnie ważna w przypadku konstrukcji o przekroju zmiennym, gdzie pojęcie środka sił poprzecznych staje się fikcją.

8.11. Wpływ wykrojów w konstrukcji 4-pasowej

W konstrukcjach 4-pasowych istnieją dwa warianty tego rodzaju zagadnień, w zależności od tego, czy segment osłabiony wykresem pozostaje sztywny sam w sobie, czy staje się mechanizmem. Biorąc na przykład konstrukcję 2-obwodową (rys. 8.40) widzimy, że usunięcie jednego pola pokrycia w jednym z segmentów osłabia ten segment, nie zmienia jednak jego na mechanizm. W takim przypadku metoda rozwiązania jest identyczna

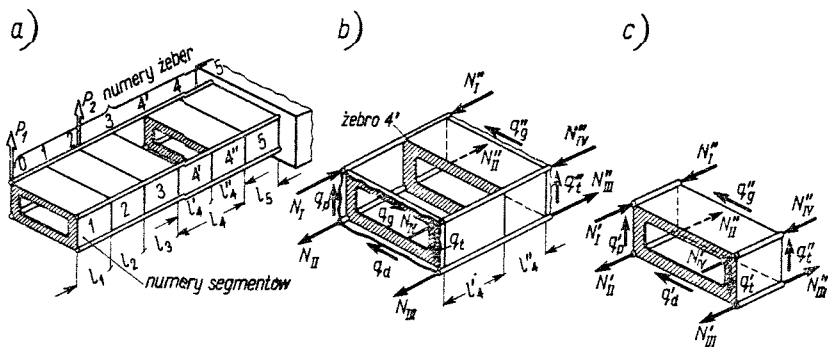
jak poprzednio (art. 8.9), a postać grup sił X statycznie niewyznaczalnych zostaje bez zmian. Jedyna różnica polega na tym, że siły wewnętrzne (wydatki styczne) stanu podstawowego i przy obciążeniu jednostkowymi grupami X będą miały w segmencie osłabionym odmienny przebieg niż w nieosłabionych segmentach sąsiadujących. Obliczenie tych sił wewnętrznych przeprowadzamy według wskazówek art. 6.10 i 7.11. Szczególną uwagę należy przy tym zwrócić na statykę zeber ograniczających osłabiony segment i zamieniających jeden rozkład wydatków stycznych w segmencie nieosłabionym na



Rys. 8.40. Pierwszy wariant konstrukcji z wykrojem

drugi w segmencie osłabionym). W wyniku współczynniki $\alpha_{i,j}$ oraz $\alpha_{i,0}$ układu (8.46) są dla segmentów sąsiadujących z segmentem osłabionym odmienne od wyrażeń, odpowiadających segmentom nieosłabionym. Powoduje to w efekcie pewne zakłócenie w przebiegu sił X w porównaniu z konstrukcją nieosłabioną.

Inaczej przedstawia się przebieg rozwiązania, jeśli pierwotna nieosłabiona konstrukcja 4-pasowa jest jednoobwodowa. Usunięcie w takiej konstrukcji jednego z pól pokrycia powoduje, że izolowany od reszty konstrukcji osłabiony segment (rys. 8.41) staje się mechanizmem. Dopiero połączenie tego segmentu z jednym z nieosłabionych sąsiadujących



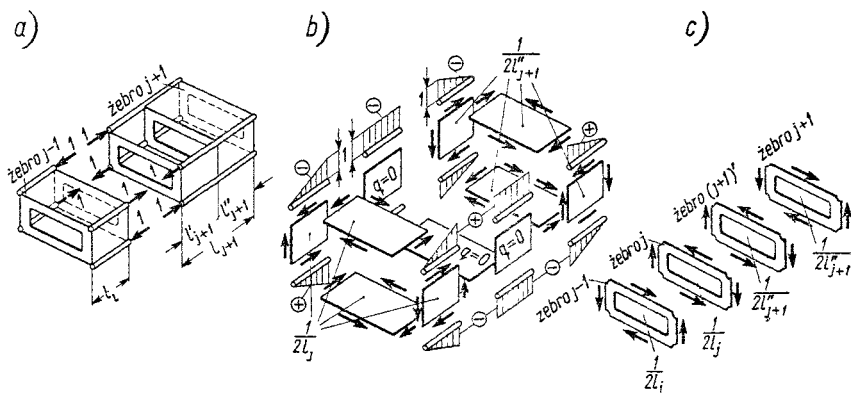
Rys. 8.41. Drugi wariant konstrukcji osłabionej wykrojem

a) szkie konstrukcji; b) układ oddziaływań stanu podstawowego na segment łączony; c) układ oddziaływań na sztywną samą w sobie część segmentu łącznego.

cych segmentów przywraca mu utraconą sztywność (patrz art. 7.13). Ten zespół obydwóch segmentów (rys. 8.41b) traktujemy jako jeden łączony segment. Podstawowy stan napięć wyznaczamy w nim według wskazówek art. 7.16. Uwzględniając mianowicie półskoru-

pową budowę ustroju, skład oddziaływań w przekrojach żebra 3 i 4 określamy tak, jak gdyby cała lewa część, tj. między żebrą 0 i 3, i prawa część, tj. między żebrą 4 i 5, była cienkościennym rurowym prętem (art. 6.5 i 6.10). Mając te oddziaływania (rys. 8.41b), obliczamy przebieg sił wewnętrznych w części osłabionej tak, jak to podaje art. 7.10, a następnie według wskazówek art. 7.5 lub 7.11 w części nieosłabionej (rys. 8.41c).

Grupy sił X mają identyczną postać jak w konstrukcji nieosłabionej. Wartości ich wyznaczamy z rozwiązania układu równań (8.46). Wpływ wykroju zaznacza się w odmiennym niż na rys. 8.29 układzie sił wewnętrznych wywołanych grupą X_j działającą w prze-



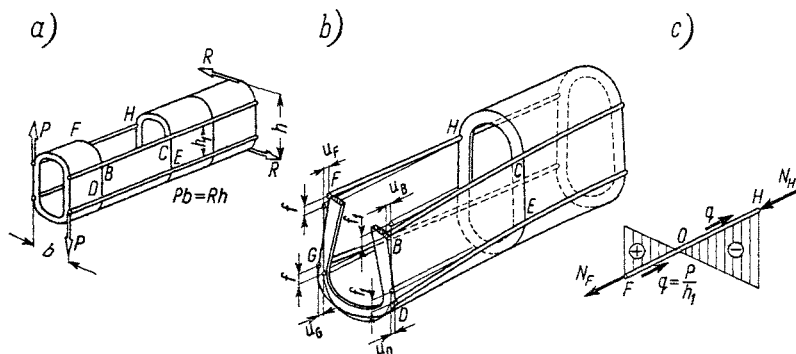
Rys. 8.42. Działanie układu $X_j = 1 \text{ kG}$ na segment łączony
a) grupa sił; $X_j = 1 \text{ kG}$; b) statyka elementów w segmentach j i $j+1$; c) statyka żeber.

kroju żebra 3. Jeśli konstrukcja jest skrzynkowa, to obciążenie $X_j = 1 \text{ kG}$ wywołuje w łączonym segmencie układ sił wewnętrznych podany na rys. 8.42. Ta odmienność sił wewnętrznych pociąga za sobą zmianę niektórych współczynników układu równań (8.46), a mianowicie

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j-1,j+1} &= 0, & \alpha_{j,j-2} &= \frac{B_{j-1}}{l_{j-1}l_j}, \\
 \alpha_{j,j-1} &= -\frac{B_{j-1}}{l_{j-1}l_j} \left(1 + \frac{l_{j-1}}{l_j}\right) - \frac{B_j}{l_j^2} - \frac{p_j}{4Gl_j} + \frac{l_j}{3EA_j^*}, \\
 \alpha_{j,j} &= \frac{B_{j-1} + B_j}{l_j^2} + \frac{B'_{j+1} + B_{j+1}}{(l'_{j+1})^2} + \frac{1}{4G} \left(\frac{p_j}{l_j} + \frac{p'_{j+1}}{l_{j+1}} \right) + \\
 &\quad + \frac{2}{3E} \left[\frac{l_j}{A_j^*} + \frac{l'_{j+1}}{(A'_{j+1})''} \right] + \frac{2l'_{j-1}}{E(A'_{j+1})'}, \\
 \alpha_{j,j+1} &= -\frac{B'_{j+1}}{(l'_{j+1})^2} - \frac{B_{j+1}}{(l'_{j+1})^2} \left(1 + \frac{l'_{j+1}}{l_{j+2}}\right) - \frac{p'_{j+1}}{4Gl'_{j+1}} + \frac{l'_{j-1}}{3E(A'_{j-1})''}, \\
 \alpha_{j,j+2} &= \frac{B_{j-1}}{l'_{j+1}l_{j+2}}.
 \end{aligned} \tag{8.57}$$

wyznaczalnych grup sił X , natomiast n_p i $\bar{q}_p$ mogą być siłami i wydatkami odpowiadającymi podstawowemu stanowi napięcie przy obciążeniu jednostkowym*. W przypadku konstrukcji z żebrami ramowymi dochodzą podobnie jak we wzorze (8.52) odpowiednie człony uwzględniające zginanie tych żeber.

Niezależnie od ilościowego ujęcia wpływu wykroju ważna jest jakościowa analiza tego wpływu. Biorąc na przykład przyrzątkowy kadłub (rys. 8.44), zauważmy, że siła wzdłużna w każdym z pasów, np. FH , zmienia znak (rys. 8.44c). Traktując bowiem, że segment osłabiony połączony jest z sąsiadującym



Rys. 8.44. Jakościowa analiza wpływu wykroju

segmentem ze strony prawej (rys. 8.44b), zauważamy, że pod działaniem momentu $M_s = Pb$ przekrój $BDGF$ ulega spaceniu. Przy dołączeniu lewej części konstrukcji w punktach B, D, G powstanie w punkcie F szpara. Do zlikwidowania tej szpary w punkcie tym musi powstać siła rozciągająca pas FH . Nakłada się ona na zmienną liniowo siłę ścisającą odpowiadającą stanowi podstawowemu. Położenie punktu O , w którym wypadkowa siła wzdłużna jest równa zero, zależy od stosunku sztywności obu części łączących się z segmentem osłabionym. Gdyby bowiem część lewa była nadzwyczaj podatna w porównaniu do części prawej, to dopasowanie jej w płaszczyźnie $BDGF$ do odkształconego segmentu byłoby załatwione przez bardzo niewielką siłę w punkcie F . W takim przypadku punkt O leży bardzo blisko punktu F . Sytuacja będzie odwrotna, tj. punkt O będzie zbliżał się do punktu H , jeśli podatność prawej części będzie duża w porównaniu do lewej części konstrukcji. Jeśli podatności obu części będą jednakowe, to punkt O będzie w połowie odcinka FH .

Ta jakościowa analiza umożliwia przybliżoną ocenę wpływu wykroju w obliczeniach wstępnych. Zakładając mianowicie położenie punktu O w zależności od oszacowanej na oko podatności sąsiadujących segmentów, rozcinamy w tym przekroju konstrukcję na dwie części. Rozcięte części segmentu osłabionego traktujemy jako nabudowane odpowiednio na lewej i prawej części konstrukcji. Ponieważ obliczenie sił w każdej części osłabionego segmentu jest zadaniem statycznie wyznaczalnym, możemy po określeniu sił dobrać w racjonalny sposób przekroje elementów.

Ten klasyczny obraz wpływu wykroju odpowiada przypadkowi konstrukcji o sztywnych żebrach. W przypadku żeber ramowych (wreg), utwierdzenia któregoś z przekrojów lub wprowadzenia obciążeń skupionych, obraz ten doznaje modyfikacji, które przy wstępnych obliczeniach możemy jakościowo oszacować analizując podane w art. 8.10 przykłady.

Niezależnie od uproszczonej analizy, w konstrukcjach z wykrojem pojedynczym lub szeregiem wykrojów konieczne jest zawsze uzupełnienie tej analizy przez rozwiązanie układu równań (8.46).

* Obliczone według tych wskazówek kąty skrócenia na swobodnym końcu rozważanej konstrukcji z żebrami w postaci ścian wynoszą dla konstrukcji bez wykroju $\Phi = 0,85^\circ$, dla konstrukcji z wykrojem $\Phi = 1,22^\circ$. Jak widać zatem, sztywność konstrukcji osłabionej wykrojem jest $\sim 40\%$ mniejsza niż konstrukcji nieosłabionej. Różnica ta jest jeszcze większa w przypadku zastosowania żeber ramowych.

8.12. Zasady obliczania konstrukcji wielopasowych

Rozwiązane w artykułach 8.2÷8.11 zagadnienia wystarczają w zasadzie do analizy korygujących stanów napięć konstrukcji o przekroju prostokątnym lub zbliżonym do prostokątnego (rys. 8.3). W konstrukcjach kadłubów (rys. 8.2), jeśli nie dadzą się one sprowadzić do schematu konstrukcji 4-pasowej (rys. 8.32, 8.40, 8.44), zagadnienie wyznaczania korygujących stanów napięć jest znacznie bardziej złożone. Wynika to stąd, że dla oddania możliwie wiernie rozkładu naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym musimy wprowadzić w schemacie zastępczym większą liczbę wzdłużnych pasów niż 4. Aby jednak zadania zbyt nie komplikować, liczbę tych zastępczych pasów redukujemy do niezbędnego minimum, albowiem rozwiązanie konstrukcji z liczbą pasów równą liczbie rzeczywistych podłużniczek jest na ogół niewykonalne*.

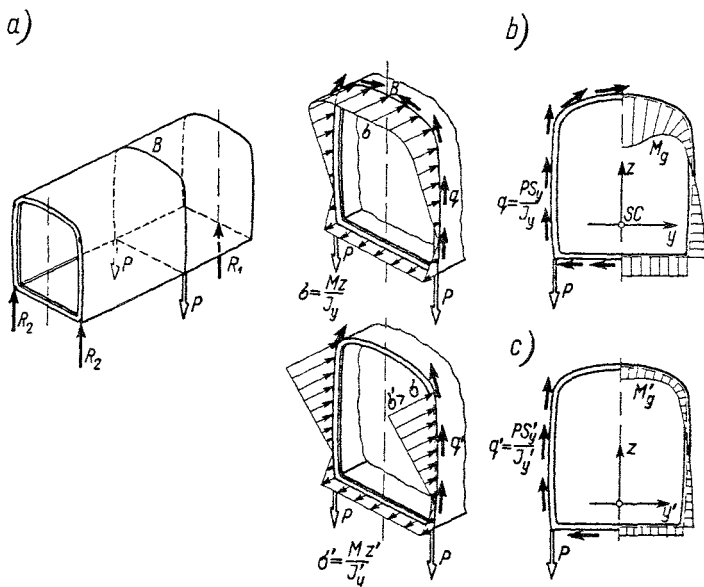
Wprowadzenie konstrukcji zastępczych o zredukowanej liczbie pasów pociąga jednak za sobą tę niedogodność, że model zastępczy zależy nie tylko od ustawienia podłużnic, lecz i od ukształtowania innych elementów konstrukcji. W konstrukcjach kadłubów tymi dodatkowymi elementami decydującymi o zachowaniu się konstrukcji są wręgi (żebra). Rozróżnia się mianowicie dwie grupy konstrukcji. Pierwszą z nich stanowią konstrukcje o cienkościennych tarczowych żebdach**, drugą stanowią konstrukcje o wręgach ramowych.

W pierwszej grupie konstrukcji obliczenie korygujących stanów napięć prowadzimy przy założeniu, że wręgi (żebra) są w swej płaszczyźnie nieskończenie sztywne. Okazuje się ponadto, że w przypadku obciążenia konstrukcji siłami poprzecznymi, wartości układu korygującego są bardzo małe w porównaniu do wartości podstawowego stanu napięć. *W tych więc przypadkach z dostateczną dokładnością przyjmujemy wartości stanu podstawowego jako odpowiedź ostateczną.* Również w przypadku wprowadzenia sił wzdłużnych (art. 7.15) wystarczającą dokładność otrzymujemy zakładając, że zamiana układu sił skupionych na rozkład elementarny odbywa się na długości jednego segmentu.

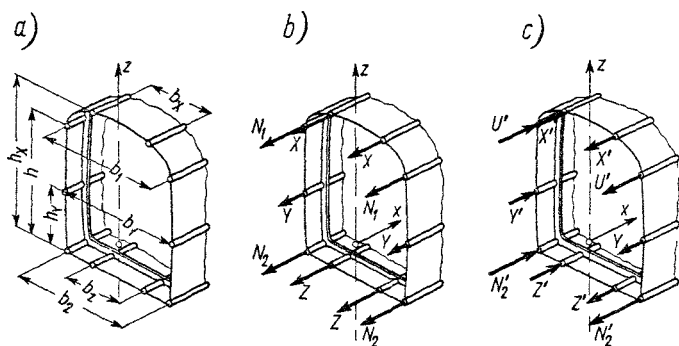
Zupełnie odmiennie przedstawia się sytuacja w drugiej grupie konstrukcji, gdzie na skutek dużej podatności wręg siły układu korygującego mogą osiągnąć wartości tego samego rzędu co i podstawowego układu napięć. Biorąc na przykład kadłub (rys. 8.45) zauważmy, że wydatki styczne podstawowego stanu napięć wywołują duże momenty zginające wręgi tak, że ilość energii odkształcenia zgromadzona we wręgach znacznie przewyższa ilość energii odkształcenia w pasach i pokryciu. Jeślibyśmy w zamian tego podstawowego stanu napięć rozważyli stan (rys. 8.45c), przy którym momenty gnące wręgi są bardzo małe, to w bilansie energii odkształcenia następuje spadek wartości tej energii, gdyż ubytek pierwszego składnika (energii we wręgach) jest znacznie większy niż przyrost drugiego składnika (energii pasów i pokrycia). Ponieważ rzeczywisty rozkład

* Tak na przykład w konstrukcji 28-podłużnicowej (rys. 8.2) w każdej płaszczyźnie wręgi pośredniej istnieje 25 niewiadomych sił X statycznie niewyznaczalnych. Jeśli zatem konstrukcja jest 10-segmentowa, to konstrukcja jest 225-krotnie statycznie niewyznaczalna.

** Takimi są np. wagony kolejowe z indywidualnymi przedziałami kilkuosobowymi. Przepierzenia bowiem wewnętrzne powiązane ze szkieletem, nawet jeśli są wykonane z innego bardziej podatnego materiału niż szkielet, stanowią dostateczny równowaznik cienkościennej tarczy metalowej.



Rys. 8.45. Wpływ obioru podstawowego układu napięć na siły wewnętrzne we wrędze
a) szkic konstrukcji; b) podstawowy stan napięć według art. 6.5 i wykres M_g we wrędze; c) podstawowy stan napięć przy założeniu, że dach nie pracuje na naprężenia normalne i wykres M'_g we wrędze.



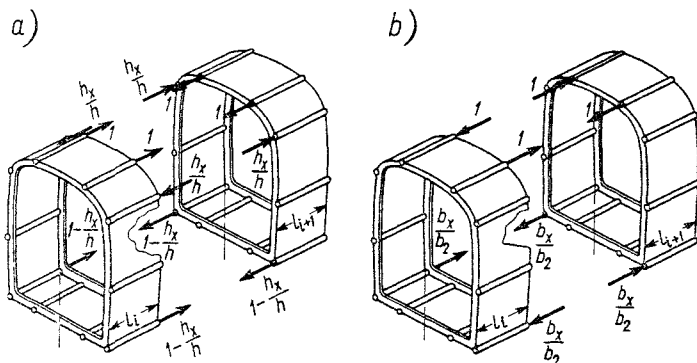
Rys. 8.46. Model zastępczy konstrukcji kadłubowej

a) schemat konstrukcji dobranej tak, aby możliwie wiernie, a jednocześnie prosto oddawał najbardziej istotne cechy rzeczywistego rozkładu σ ; b) układ sił statycznie niewyznaczalnych przy obciążeniu symetrycznym, c) układ sił statycznie niewyznaczalnych przy obciążeniu antysymetrycznym.

napieć musi spełniać warunek minimum energii, to jest jasne, iż zbliżać się on będzie do rozkładu według rys. 8.45c, a nie według rozkładu elementarnego (art. 6.5 i 6.10).

Ilościowe ujęcie opisanych zagadnień drugiej grupy konstrukcji przeprowadzamy formułując równania Maxwella—Mohra. Wprowadzając model zastępczy konstrukcji

i wykorzystując istniejącą zazwyczaj symetrię konstrukcji widzimy, iż przy tych symetrycznych układach sił wzdłużnych jest w płaszczyźnie każdej wręgi a przy obciążeniach antysymetrycznych 4-krotnie statycznie niewyznaczalny*. W tych układach rozważmy oddzielnie. Zauważając, że zarówno symetryczne, jak i antysymetryczne układy sił jednostkowych zamykają się w obrębie dwóch sąsiadujących pasów (rys. 8.47), dochodzimy do wniosku, że każde z równań Maxwella—Mohra



Rys. 8.47. Jednostkowe stany obciążeń $X_i = 1 \text{ kG}$ i $X'_i = 1 \text{ kG}$
 Powyższe stany wybrane przykładowo z układów statycznie niewyznaczalnych (rys. 8.46).

będzie pięć kolejnych niewiadomych każdej grupy. Tak więc równanie wyrażające przemieszczenia w płaszczyźnie wręgi i -tej w przekroju pasa górnego ma przy układach symetrycznych postać

$$\begin{aligned} & a_{i,i-2}X_{i-2} + a_{i,i-1}X_{i-1} + a_{i,i}X_i + a_{i,i+1}X_{i+1} + a_{i,i+2}X_{i+2} + a'_{i,i-2}Y_{i-2} + \\ & + a'_{i,i-1}Y_{i-1} + a'_{i,i}Y_i + a'_{i,i+1}Y_{i+1} + a'_{i,i+2}Y_{i+2} + a''_{i,i-2}Z_{i-2} + \\ & + a''_{i,i-1}Z_{i-1} + a''_{i,i}Z_i + a''_{i,i+1}Z_{i+1} + a''_{i,i+2}Z_{i+2} + a_{i,0} = 0, \end{aligned} \quad (8.58a)$$

oznaczając zbliżenie się przekrojów pasa górnego w płaszczyźnie wręgi i -tej działaniem układu $X_j = 1 \text{ kG}$, $a'_{i,j}$ lub $a''_{i,j}$ — także zbliżenie wywołane działaniem układu $Y_j = 1 \text{ kG}$ i $Z_j = 1 \text{ kG}$.

W pozostałych pasach wręgi te równania wyrażające ciągłość przemieszczeń w pozostałych pasach wręgi mają postać

$$\begin{aligned} & \beta_{i,i-2}Y_{i-2} + \dots + \beta_{i,i+2}Y_{i+2} + \beta'_{i,i-2}Z_{i-2} + \dots + \beta'_{i,i+2}Z_{i+2} + \\ & + \beta''_{i,i-2}X_{i-2} + \dots + \beta''_{i,i+2}X_{i+2} + \beta_{i,0} = 0, \end{aligned} \quad (8.58b)$$

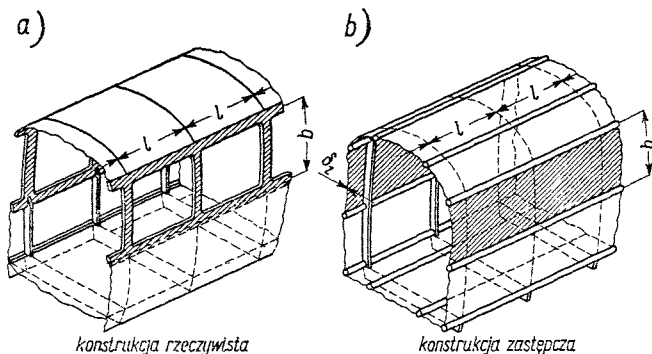
$$\begin{aligned} & \gamma_{i,i-2}Z_{i-2} + \dots + \gamma_{i,i+2}Z_{i+2} + \gamma'_{i,i-2}X_{i-2} + \dots + \gamma'_{i,i+2}X_{i+2} + \\ & + \gamma''_{i,i-2}Y_{i-2} + \dots + \gamma''_{i,i+2}Y_{i+2} + \gamma_{i,0} = 0, \end{aligned} \quad (8.58c)$$

W układach symetrycznych spełnia dwa warunki równowagi, a mianowicie: warunek rzutów na oś pozioma i warunek momentów względem osi poziomej, układ antysymetryczny tylko jeden warunek względem osi pionowej.

gdzie współczynniki β i γ mają podobne znaczenie jak poprzednio, z tym tylko, że odnoszą się do przekrojów tych pasów, w których działają odpowiednio siły grup Y i Z . Należy tu podkreślić, że współczynniki wyrażające sprzężenie niewiadomych X z Y lub Z , tj. $a'_{i,j}$ i $a''_{i,j}$, są na ogół różne od współczynników wyrażających sprzężenie siły Y z Z lub X , tj. $\beta'_{i,j}$ i $\beta''_{i,j}$. Samo obliczenie współczynników jak i wyrazów wolnych przeprowadzamy według reguł art. 1.2.

Rozwiązanie układu równań (8.58) lub analogicznego układu dla obciążeń antysymetrycznych jest przy użyciu normalnych metod kłopotliwe. Pewną możliwość daje w tym względzie użycie maszyn liczących. W praktyce konstruktorskiej układy takie rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń, a mianowicie zakładamy z początku, że w równaniach ciągu (8.58a) wszystkie Y i Z są równe zeru, tak że ciąg ten przekształca się w normalny układ 5-członowych równań. Rozwiązanie takiego uproszczonego układu jest względnie proste i z dostateczną dokładnością może być przeprowadzone przy użyciu suwaka logarytmicznego. Tak otrzymane wartości X stanowiące pierwsze przybliżenie wstawiamy w równaniach ciągu (8.58b) zakładając w nich, że tylko siły Z są równe zeru. Po kolejnym rozwiązaniu ciągu równań (8.58b) przechodzimy do równań (8.58c), w których wstawiamy wartości X i Y pierwszego przybliżenia. Znalezione stąd wartości Z oraz określone poprzednio Y wstawiamy z kolei do ciągu równań (8.58a) otrzymując po rozwiązaniu drugie przybliżenie wartości X itd. Zazwyczaj proces takiego iteracyjnego rozwiązywania równań jest szybko zbieżny i wystarczają z reguły 2÷3 iteracji, aby rezultat otrzymać z dostateczną dokładnością. Zbieżność ta będzie tym szybsza, im współczynniki a' , a'' , β' , β'' , γ' i γ'' wyrażające sprzężenie układów będą mniejsze w porównaniu do a , β , γ . Taki na przykład przypadek zachodzi, gdy ściany boczne i podłoga są płaskie lub mniej więcej płaskie. Wtedy bowiem jedynymi współczynnikami, na które wpływa giętą podatność wręg, są współczynniki a . W takim przypadku ciąg równań (8.58a) staje się praktycznie niezależny od dwóch pozostałych, gdyż $a' \ll a$ i $a'' \ll a$.

Na przebieg rozwiązania ma również wpływ odpowiedni dobór podstawowego układu napięć. Tak na przykład w konstrukcji (rys. 8.45) celowe jest założyć, że w podstawowym stanie napięć górne pasy na dachu konstrukcji w ogóle nie pracują. Dzięki temu wyrazy wolne $a_{i,0}$ w równaniach ciągu (8.58a) mają małe wartości, co przyspiesza zbieżność procesu iteracji.



Rys. 8.48. Wprowadzenie ściany zastępczej

W zastosowaniach technicznych często spotykamy przypadek, gdy ściany boczne konstrukcji kadłubowej mają szereg regularnych wykrojów (okien). Aby zagadnień takich nie komplikować, wprowadzamy zamiast rzeczywistej konstrukcji na ogół ramowej (rys. 8.48) ściankę zastępczą o tej samej sztywności na ścinanie. Grubość δ_2 tej zastępczej ścianki obliczamy według rozważań art. 10.4 (patrz rys. 10.16).

Charakter rozkładu naprężeń normalnych przy zginaniu kadłubów drugiej grupy był już omówiony. Przy skręcaniu podatność wręg sprawia to, że przekazywanie momentów skręcających odbywa się nie tylko przez wręgi obciążone, lecz również przez wręgi następne*.

8.13. Wpływ odkształcalności wręg w konstrukcji cylindrycznej

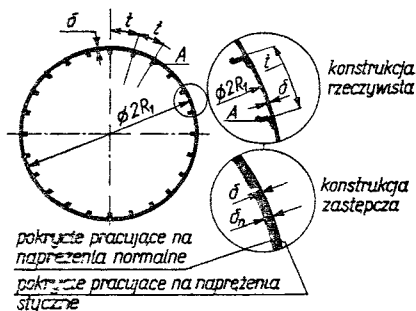
Z wszystkich zagadnień statyki wielopasowych konstrukcji z odkształcalnymi wręgami szczególnie prosto rozwiązuje się przypadek kadłuba o przekroju kołowym. Wprowadzając konstrukcję zastępczą o pasach wzdłużnych rozłożonych w sposób ciągły na obwodzie (rys. 8.49) otrzymujemy zastępczą grubość δ_n na działanie naprężeń normalnych według wzoru (6.2a)

$$\delta_n = \delta + (A/t),$$

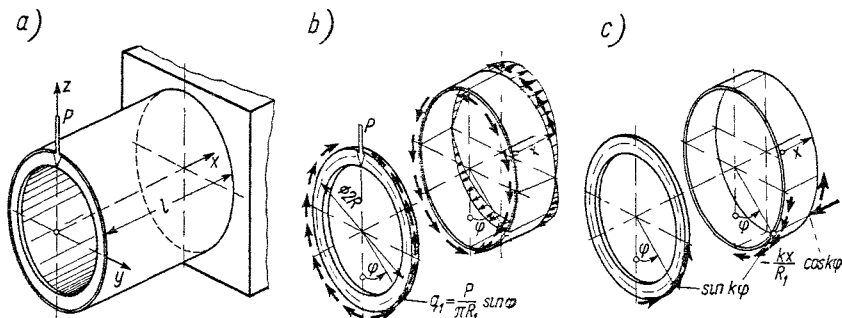
podczas gdy na ścinanie powłoka ma grubość pierwotnego pokrycia δ .

Zakładając dla prostoty, że rozstaw profili jest stały i stała jest grubość δ , rozważmy na początek konstrukcję jednosegmentową (rys. 8.50) z jedną wręgą wzmacniającą segment w przekroju swobodnym. Gdyby założenia rozdz. 6 odnośnie rozkładu wydatków normalnych były słuszne (art. 6.10), to układ oddziaływań stycznych q_1 między wręgą a powłoką (podstawowy stan naprężeń) byłby taki, jak na rysunku 8.50b, podczas gdy rozkład wydatków normalnych w przekroju x wyrażony byłby zależnością

$$n_1 = \frac{M_g z \delta_n}{J_y} = - \frac{Px}{\pi R_1^2} \cos \varphi.$$



Rys. 8.49. Wprowadzenie konstrukcji zastępczej



Rys. 8.50. Statyka jednosegmentowej konstrukcji cylindrycznej

a) schemat konstrukcji; b) stan „0”; c) stan „E”, gdy układ oddziaływań stycznych jest $1 \sin k\varphi$.

* Bardziej szczegółową analizę tego rodzaju zagadnień czytelnik może znaleźć w Archiwum Budowy Maszyn 1955 r. zeszyt 4 i 1956 r. zeszyt 1.

W rzeczywistości na skutek odkształcalności wręgi układ oddziaływań między wręgą a powłoką jest odmienny od podstawowego i wyraża się wzorem

$$q(\varphi) = q_1(\varphi) + q'(\varphi),$$

gdzie $q'(\varphi)$ — dodatkowy układ napięć stycznych o wypadkowej sile i momencie równych zeru*. Ponieważ $q'(\varphi)$ jest okresową funkcją kąta φ , to można przedstawić ten wydatek w postaci szeregu Fouriera**

$$q'(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k \sin k\varphi,$$

gdzie q_k — nieokreślona na razie amplituda k -tej harmonicznej.

Aby wyznaczyć wielkości amplitud q_k , zastosujemy równania M—M. W tym celu określimy siły wewnętrzne wywołane działaniem k -tej harmonicznej, gdy amplituda $q_k = 1$ kG/cm. Zgodnie ze wzorami (6.2) wydatki styczne $1 \cdot \sin k\varphi$ są stałe na całej długości l , wydatki zaś normalne wyrażają się

$$n_k = -k \frac{x}{R_1} \cos k\varphi. \quad (8.59a)$$

Ponadto we wrędze (patrz zad. 18 rozdz. 5) powstaną siły wewnętrzne: wzdłużna $n^{(k)}$, tnąca $t^{(k)}$ i moment gnący $m^{(k)}$ określone wzorami

$$n^{(k)} = \frac{kR_1}{k^2-1} \cos k\varphi, \quad t^{(k)} = -\frac{R_1}{k^2-1} \sin k\varphi, \quad m^{(k)} = \frac{R_1 R}{k} \left(\frac{1}{k^2-1} - \eta \right) \cos k\varphi, \quad (8.59b)$$

w których $\eta = e/R = (R_1 - R)/R$ bezwymiarowy mimośród (rys. 5.48).

Traktując wielkości q_k jako uogólnione siły możemy sformułować równania M—M. Zauważając, że $a_{i,k} = 0$, gdy $i \neq k$, otrzymujemy dla k -tej harmonicznej równanie

$$a_{k,k} q_k + a_{k,0} = 0,$$

gdzie według*** art. 1.2

$$a_{k,k} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{[m^{(k)}]^2 R d\varphi}{EJ} + \int_0^l \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(n_k)^2 R_1 d\varphi dx}{E\delta_n} + \int_0^l \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(\sin k\varphi)^2 R_1 d\varphi dx}{G\delta}.$$

Po podstawieniu wyrażeń na $m^{(k)}$ i n_k oraz wykonaniu całkowań otrzymujemy

$$a_{k,k} = \frac{\pi R^3 R_1^2}{k^2 EJ} \left(e - \frac{1}{k^2-1} \right)^2 + \frac{\pi k^2 l^3}{3E R_1 \delta_n} + \frac{\pi R_1 l}{G\delta}.$$

Aby obliczyć wyraz wolny $a_{k,0}$, zauważmy, iż w ogólnym wyrażeniu****

$$a_{k,0} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{M m^{(k)} R d\varphi}{EJ} + \int_0^l \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{n_1 n_k R_1 d\varphi dx}{E\delta_n} + \int_0^l \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{q_1 \sin k\varphi R_1 d\varphi dx}{G\delta}$$

* Wydatek q_1 zapewnia równowagę wręgi.

** Z uwagi na symetrię względem osi z mogą pojawić się tylko składniki z sinusami, z uwagi zaś na warunek samorównowazenia $q'(\varphi)$ musi być $k \geq 2$.

*** W wyrażeniu tym pominięto udział sił wzdłużnych i tnących we wrędze jako mały w porównaniu z członem wynikającym ze zginania wręgi.

**** Podobnie jak przy wyznaczaniu $a_{k,k}$ tak i tu pominięto we wrędze wpływ siły wzdłużnej i tnącej od stanu „0”.

dwie ostatnie całki są równe zero, gdyż dla $k \neq 1$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\varphi \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\varphi \sin \varphi d\varphi = 0,$$

tak że zostaje tylko pierwszy składnik, w którym M oznacza moment gnący stanu „0”. Ponieważ według rys. 5.18

$$M = \frac{PR}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right),$$

to po podstawieniu i wykonaniu rachunków mamy

$$\alpha_{k,0} = (-1)^{k-1} \frac{PR^3 R_1}{k(k^2-1)EJ} \left(e - \frac{1}{k^2-1} \right).$$

W wyniku ostatecznym dla $k \geq 2$

$$q_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2-1)} \frac{P}{\pi R_1} \frac{B}{\frac{B^2}{k^2} + \frac{\pi}{3} \left(\frac{J}{J_c} \right) \left(\frac{l}{R} \right) \left[k^2 \left(\frac{l}{R} \right)^2 + 3 \frac{E}{G} \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \right]}, \quad (8.60)$$

gdzie

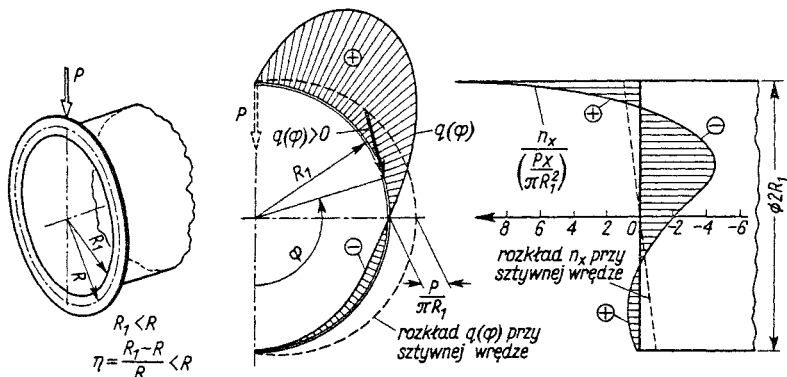
$$B = \frac{1}{k^2-1} - \eta, \quad J_c = \pi R_1^3 \delta_n.$$

Znaczenie fizyczne J_c jest proste, a mianowicie jest to moment bezwładności przekroju poprzecznego powłoki kołowej o grubości δ_n . Jak widać amplituda k -tej harmonicznej zależy od stosunku sztywności wręgi EJ do sztywności powłoki, „wydłużenia”, tj. (l/R) i w mniejszym stopniu od stosunku (R_1/R) oraz sztywności pasów, tj. δ_n/δ . W przypadku gdy $R_1/R = 1$ oraz gdy powłoka nie ma usztywnień ($\delta_n = \delta$), wzór (8.60) przyjmuje postać

$$q_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2-1)^2} \frac{P}{\pi R} \frac{1}{\frac{1}{k^2(k^2-1)^2} + \frac{\pi}{3} \left(\frac{J}{J_c} \right) \left[k^2 \left(\frac{l}{R} \right)^2 + 3 \frac{E}{G} \right] \left(\frac{l}{R} \right)}. \quad (8.61)$$

Mając wartości q_k można już wyznaczyć ze wzorów (8.59) wydatki normalne w powłoce n_k i siły wewnętrzne we wrędze. Składając wyniki dla szeregu harmonicznych wyznaczamy całkowite siły wewnętrzne w konstrukcji. Opierając się na tych wskazówkach rozwiązano jako przykład konstrukcję jednosegmentową (rys. 8.51). Jak widać przy tych proporcjach rozkład wydatków stycznych, a w szczególności rozkład wydatków normalnych wykazuje bardzo duże odchylenia od podstawowego stanu napięć.

Opisaną metodę można rozszerzyć na konstrukcję wielosegmentową. Jako niewiadome statycznie niewyznaczalne występują tu harmoniczne q_k oddziaływań stycznych między poszczególnymi wręgami. Dla każdej harmonicznej mamy przeto tyle niewiadomych, ile jest wręg. Przez odpowiednie zgrupowanie możemy działanie każdej niewiadomej ograniczyć do obszaru dwóch kolejnych segmentów. Dzięki temu wyznaczenie sił wewnętrznych sprowadza się do rozwiązywania ciągów 5-członowych równań dla każdej harmonicznej wydatku stycznego.



Rys. 8.51. Przykład liczbowy

Dane liczbowe: $R_1/R = 0,940$, $1/R = 1,00$, $\delta_n = \delta$, $J/J_c = 1,71 \cdot 10^{-4}$, $E/G = 2,60$.

8.14. Zadania

1. W tarczy (rys. 8.7a) o szerokości $B = 90$ cm blacha pokrycia ma grubość $\delta = 1,2$ mm, pola przekrojów krawężników i każdego z wewnętrznych usztywnień są odpowiednio $3,0$ cm² i $1,0$ cm². Zakładając pełną współpracę blachy w przenoszeniu naprężeń normalnych określić budowę zastępczej 4-pasowej tarczy, jeśli rozstaw krawężników i usztywnień jest równomierny.
2. Tarcza z zadania 1 przenosi siłę wzdłużną 25 t, a naprężenia w krawężnikach są $\sigma_{\max} = 1600$ kG²/cm². Określić przybliżony rozkład σ wzdłuż szerokości B .
3. Obciążona pośrodku swej szerokości tarcza (rys. 8.8c) ma pokrycie o grubości $\delta = 1,5$ mm, szerokość $B = 150$ cm i usztywniona jest sześcioma jednakowymi profilami ($A_{\text{netto}} = 2,0$ cm²) oraz pasem centralnym ($A_{\text{netto}} = 8$ cm²). Zakładając pełną współpracę pokrycia w przenoszeniu naprężeń normalnych, określić budowę zastępczej 3-pasowej tarczy. Rozstaw profili na szerokości jest równomierny.
4. Skrzynkowa 5-segmentowa konstrukcja (rys. 8.4a) obciążona układem sił $P_1 = P_2 = \dots = P_5 = 400$ kG ma szerokość $B = 80$ cm, wysokość ścianek $h = 25$ cm i całkowitą długość $L = 5 \times 40$ cm = 2 m. Określić układ sił działających na wyizolowaną tarczę górną.
5. Konstrukcja (rys. 8.5b) złożona z pięciu jednakowych segmentów obciążona jest dwoma siłami $P = 4$ t. Wyznaczyć układ sił działających na tarczę poziomą, jeśli długość każdego segmentu jest $l = 80$ cm, wysokość pionowych ścianek $h = 70$ cm.
6. Na podstawie otrzymanego rozwiązania tarczy (rys. 8.11) określić siły wewnętrzne w najbardziej obciążonym żebrze.
7. Określić przebieg sił w pasach i wydatki styczne w ściankach tarczy (rys. 8.11a), jeśli siły $P = 10$ t zrównoważone są wydatkami $q = 100$ kG/cm przyłożonymi na pasach zewnętrznych segmentów 4 i 5.
8. W tarczy (rys. 8.11a), nie zmieniając punktu przyczepienia siły $2P$, przesunęto siły P do miejsca połączenia pasów zewnętrznych z żebrze 3. Wyznaczyć przebieg sił w pasach tarczy.
9. Zakładając, że w tarczy (rys. 8.11a) $E = 7,2 \cdot 10^6$ kG/cm² ($E/G = 2,6$), wyznaczyć przemieszczenie punktu przyłożenia siły $2P$ względem prostej łączącej końce żebra 4.
10. Jak zmieni się przebieg sił w pasach tarczy (rys. 8.12), jeśli siły P przesunąć do przekroju żebra oddzielającego segmenty 2 i 3?

11. Rozwiązać analitycznie tarczę (rys. 8.15) przy założeniu, że $A' = 5 \text{ cm}^2$, $A'' = 10 \text{ cm}^2$, $\delta = 1,5 \text{ mm}$, $b = 35 \text{ cm}$, $l = 70 \text{ cm}$, $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $E/G = 2,7$, $P = 8 \text{ t}$.
12. Rozwiązać zadania 10 przy założeniu, że tarcza ta ma nieskończenie wiele nieskończenie sztywnych żeber. Punkty przyłożenia sił P są jak w zad. 10, tj. przesunięte o 60 cm na prawo od swobodnego końca.
13. Rozwiązać tarczę (rys. 8.17) przy następujących danych $l = 1 \text{ m}$, $b = 40 \text{ cm}$, $\delta = 1,5 \text{ mm}$, $A' = A'' = 6 \text{ cm}^2$, $q = 60 \text{ kg/cm}$, $E/G = 2,6$.
14. Rozwiązać tarczę (rys. 8.17) o wymiarach z zad. 13, jeśli $q_z(x) = 120[1 - (x/l)] \text{ kg/cm}$.
15. Według jakiego prawa należy ukształtować przekroje pasów zewnętrznych tarczy z zad. 13, aby przy niezmiennych pozostałych danych naprężenia w tych pasach były $k_r = 1000 \text{ kg/cm}^2 = \text{const}$.
16. Utwierdzoną w jednym przekroju tarczę (rys. 8.21c) o wymiarach jak w przykładzie (rys. 8.21b) obciążono na swobodnym końcu siłą $P = 10 \text{ t}$ przyłożoną do pasa środkowego. Obliczyć przebieg sił w pasach i wydatki styczne w ściankach.
17. W tarczy z wykrojem (rys. 8.25) zmieniono przekroje pięciu pasów wewnętrznych (przeciętych przez dokonanie wykroju) z $A = 1,5 \text{ cm}^2$ na $A' = 2 \text{ cm}^2$, zostawiając resztę tarczy i całkowitą przenoszoną siłę, tj. 19,5 t bez zmian. Określić przebieg sił w pasach.
18. Zakładając, że dwa segmenty skrzynkowej konstrukcji (rys. 8.29a) mają wymiary $A_p = 2A_t = 6 \text{ cm}^2$, $\delta_p = 1,5$, $\delta_t = 2\delta = 2 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ cm}$, $h = 22 \text{ cm}$, $l_t = 1,5$, $l_{t+1} = 60 \text{ cm}$, $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $E/G = 2,7$, obliczyć współczynniki równań Maxwella—Mohra, jeśli żebra są pełnościenne i wykonane z blachy o grubości $\delta_z = 1 \text{ mm}$.
19. Jak zmieniają się wartości współczynników równań $M—M$ z zadania poprzedniego, jeśli żebra wykonano jako jednoobwodowe ramy, tak że $b' = 55 \text{ cm}$, $h' = 19 \text{ cm}$, $J_1 = 6 \text{ cm}^4$.
20. Obliczyć wartości współczynników równań Maxwella—Mohra dla konstrukcji (rys. 8.32), jeśli oba segmenty są jednakowe, a wymiary są następujące $A' = 1,5A'' = 4,5 \text{ cm}^2$, $\delta' = \delta'' = \delta = 1 \text{ mm}$, $R = 1,05 r = 45 \text{ cm}$, $l = 50 \text{ cm}$, $J = 20 \text{ cm}^4$, $\beta_1 = 90^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$, $E = 2,7 G = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.
21. Jak zmieniają się wartości współczynników równań $M—M$ z zadania poprzedniego, jeśli moment bezwładności wręg zmieni się z $J = 20 \text{ cm}^4$ na $J = 10 \text{ cm}^4$?
22. Sformułować ogólne wzory określające współczynniki równań $M—M$ dla 4-pasowej półskorupowej konstrukcji (rys. 8.36), zakładając nieodkształcalność żeber.
- 23*. W konstrukcji (rys. 8.37) usunięto jedną z sił P , a mianowicie skierowaną do góry, pozostawiając resztę bez zmian. Posługując się podanymi wynikami określić układ napięć w przekroju utwierdzonym.
- 24*. W konstrukcji (rys. 8.37) zamiast sił P przyłożono w przekroju żebra 0 poziomą poprzeczną siłę $H = 5 \text{ t}$ w płaszczyźnie górnego pokrycia. Obliczyć siły w pasach i układ oddziaływań między kolejnymi żebrami a ściankami.
- 25*. W przekroju oporowym konstrukcji (rys. 8.39) zmieniono zamocowanie w ten sposób, że nie ruszając punktów przyłożenia reakcji $R_2, \dots, R_6$, punkt przyłączenia reakcji R_1 przeniesiono do dolnego węzła dźwigara o wysokości h_t . Zakładając nieodkształcalność żeber, obliczyć wpływ, jaki spowoduje ta zmiana zamocowania.
- 26*. W konstrukcji (rys. 8.37) dokonano wykroju przez usunięcie górnej poziomej ścianki segmentu 3. Obliczyć przebieg sił w pasach i wydatków w ściankach przy założeniu, że poprzeczne żebra są pełnościnnymi ściankami o grubości $\delta_z' = 0,3 \text{ mm}$.
- 27*. W konstrukcji (rys. 8.37) dokonano wykroju przez usunięcie pionowej ścianki ($\delta_t = 1 \text{ mm}$) segmentu 4. Zakładając, iż żebra są pełnościenne ($\delta_z = 0,8$), obliczyć przebieg sił w konstrukcji.
- 28*. W konstrukcji (rys. 8.37) dokonano trzech wykrojów usuwając górne poziome ścianki segmentów 2, 4 i 6. Obliczyć przebieg sił w konstrukcji zakładając, iż żebra są ramowe jak na rys. 8.37a.

29. Wspornikowa konstrukcja złożona z czterech jednakowych segmentów o parametrach takich, jak w zad. 20, obciążona jest na swobodnym końcu poziomą poprzeczną siłą $H = 5$ t przyłożoną w odległości R powyżej środka przekroju. Wyznaczyć przebieg sił w konstrukcji.

30*. Jak zmieniają się siły wewnętrzne w konstrukcji z poprzedniego zadania, jeśli w drugim i czwartym segmencie licząc od swobodnego końca usunąć górną ściankę?

31. Jak zmieni się przebieg n_x i q w przykładzie (rys. 8.51), jeśli zamiast wręgi zewnętrznej ($R_1 = 0,94R$) wstawić wręgę wewnętrzną ($R = 0,94R_1$) przy niezmienionych innych parametrach?

32. Obliczyć rozkład n_x i q w konstrukcji (rys. 8.50) o parametrach takich, jak podano na rys. 8.51, przy obciążeniu dwiema pionowymi siłami P przyłożonymi na końcach średnicy pionowej.

9. STATYKA PŁYT

Podawana zazwyczaj w podręcznikach Wytrzymałości Materiałów przybliżona analiza działania obciążeń prostopadłych działających bezpośrednio na ścianki* jest w większości zagadnień wystarczająca do tego stopnia, że potrzeba dokładniejszej analizy jest raczej przypadkiem wyjątkowym**. Inaczej jednak przedstawia się kwestia w zagadnieniach stateczności, w których rola pomijalnej dotychczas sztywności na zginanie cienkościennego pokrycia jest dominująca. Z tego powodu celowe jest poznanie praw opisujących zachowanie się cienkiej ścianki poddanej działaniu obciążeń do niej prostopadłych i podpartej na brzegach. Z uwagi jednak na konieczność możliwie prostego przedstawienia tych zagadnień ograniczymy się tylko do statyki płyt, to jest takich ścianek, w których środkowa powierzchnia połowiąca grubość ścianki δ jest w nieodkształconym stanie płaszczyzną. W praktycznych zastosowaniach ta grubość δ jest mała w porównaniu do pozostałych wymiarów płyty (szerokości i długości). Daje to możliwość ograniczenia naszej analizy do tzw. teorii płyt cienkich, dzięki czemu otrzymuje się duże uproszczenia.

9.1. Podstawowe założenia teorii płyt cienkich. Siły wewnętrzne

Obciążona prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyta (rys. 9.1) odkształca się w ten sposób, iż płaszczyzna środkowa zamienia się w lekko zakrzywioną powierzchnię środkową. Dowolny punkt tej płaszczyzny (współrzędne x, y) doznaje przy tym przemieszczenia o składowych u, v, w , równoległych odpowiednio do osi x, y, z . Jeśli jednak założymy (*I założenie podstawowe*), iż ugięcie płyty, tj. składowa w , jest mała w porównaniu z wszystkimi wymiarami płyty, a więc i w porównaniu z grubością δ , to przemieszczenia u i v są małymi wyższego rzędu w porównaniu z ugięciem w i można je pominąć. Tak więc przyjmujemy, że punkty A, B, C płaszczyzny środkowej przemieszczają się jedynie równolegle** do osi z , tj. prostopadłe do płaszczyzny x, y , zajmując położenie A', B', C' . Z dokładnością do małych wyższego rzędu możemy również przyjąć, że $A'B' = AB$, $A'C' = AC$, jak również, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Wobec tego w pierwszym przybliżeniu elementy płaszczyzny środkowej zamieniają się w elementy powierzchni środkowej bez zmiany ich długości i bez zmiany kąta między tymi elementami. W takim ujęciu płaszczyzna

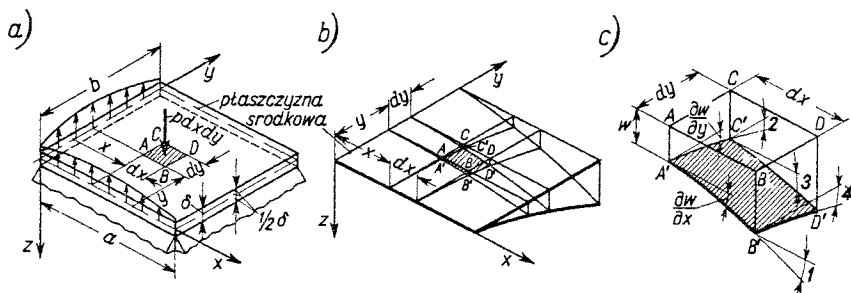
* Patrz na przykład Kurowski i Niezgodziński, *Wytrzymałość Materiałów*, Warszawa 1959, PWN, str. 412.

** Stwierdzenie to jest słuszne dla urządzeń mechanicznych bądź komunikacyjnych (samochody, samoloty, okręty). W ustrojach inżynierskich zagadnienie lokalnych obciążeń ma pierwszorzędne znaczenie (np. stropy) i jest szeroko omawiane.

*** Uproszczeń tych nie będziemy robić w analizie stateczności płyt (rozdz. 11).

środkowa spełnia w teorii płyt rolę taką samą, jaką w teorii zgięcia belek spełnia warstwa obojętna, między innymi jest ona bazą, od której określamy położenie warstw płyty równoległych do płaszczyzny środkowej.

Następnym etapem analizy jest określenie sił wewnętrznych i naprężeń w funkcji ugięcia w . W tym celu wprowadzamy dwa następne założenia*, a mianowicie przyjmujemy, że



Rys. 9.1. Geometria płyty i geometria przemieszczeń elementu

a) oznaczenia wymiarów i układ osi; b) płaszczyzna środkowa przed i po odkształceniu; c) przemieszczenia elementu płaszczyzny środkowej, kąty 1, 2, 3 i 4 są: $\angle 1 \approx (\partial w / \partial x) + (\partial^2 w / \partial x^2) dx$, $\angle 2 \approx (\partial w / \partial y) + (\partial^2 w / \partial y^2) dy$, $\angle 3 \approx (\partial w / \partial x) + (\partial^2 w / \partial x \partial y) dy$, $\angle 4 \approx (\partial w / \partial y) + (\partial^2 w / \partial y \partial x) dx$.

II. *Proste, prostopadłe do płaszczyzny środkowej przed odkształceniem, pozostają po odkształceniu prostopadłe do powierzchni środkowej, w jaką zamienia się pierwotna płaszczyzna środkowa.*

III. *Wpływ naprężeń normalnych do powierzchni środkowej na odkształcenia zachodzące w płaszczyznach równoległych do tej powierzchni jest pomijalny.*

Wykorzystując teraz założenie II wyrażamy odkształcenia warstwy płyty biegnącej równoległe do płaszczyzny w odległości ζ ($-0,5\delta \leq \zeta \leq 0,5\delta$). Z rozważań geometrycznych otrzymujemy, że warstwa ta doznaje odkształceń względnych ε_x i ε_y w kierunku osi x i y oraz odkształcenia postaciowego β o wartościach**:

$$\varepsilon_x = -\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \beta = -2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (9.1)$$

które, jak widać, są wszystkie proporcjonalne do odległości ζ .

* Założenia II i III są analogiczne do założeń w teorii zgięcia belek, a mianowicie do hipotezy płaskich przekrojów i pominięciu wzajemnych nacisków wzdłużnych włókien belki.

** A oto dowód: Rozważając odkształcony element płaszczyzny środkowej (rys. 9.1c) zauważmy, iż to jego odkształcenie da się zrealizować przez superpozycję następujących odkształceń prostych:

a) dwóch obrotów względem osi x i y o kąty $\partial w / \partial y$ i $\partial w / \partial x$, przy czym równoległe odcinki AB i CD oraz AC i BD zostają równoległe;

b) cylindrycznego zakrzywienia promieniem ρ_x , określonego zależnością $1/\rho_x \approx \partial^2 w / \partial x^2$, przy czym odcinki AC i BD zostają proste;

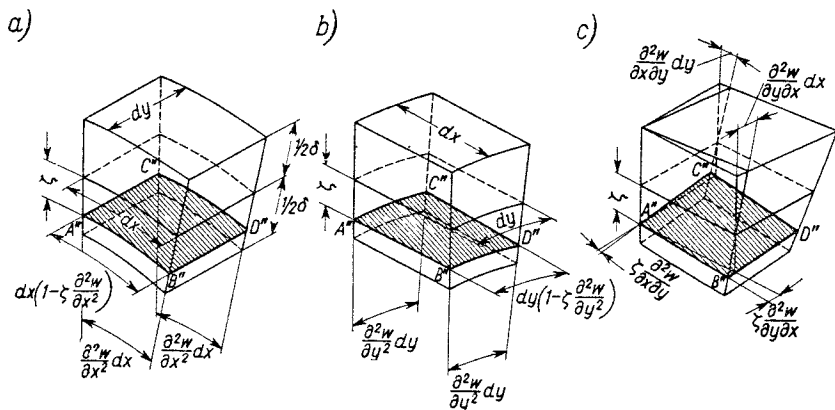
c) cylindrycznego zakrzywienia promieniem ρ_y ($1/\rho_y \approx \partial^2 w / \partial y^2$), przy czym odcinki AB i CD zostają proste;

Ponieważ według III założenia pomijamy wpływ naprężeń σ_z na ε_x , ε_y , więc warstwa rozpatrywana znajduje się w dwuwymiarowym stanie naprężeń. Stosując ogólnie znane wzory z Wyróżniałości:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau &= G\beta = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(-2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{E\zeta(1-\nu)}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

d) skrócenia odcinka CD względem AB o kąt $(\partial^2 w / \partial x \partial y) dy$ i jednoczesnego skrócenia odcinka BD względem AC o kąt $(\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$, przy czym odcinki te zostają proste.

Przechodząc teraz do określenia odkształceń w warstwie odległej od warstwy środkowej o ζ zauważamy, że zmiana wymiarów liniowych oraz kątów między odcinkami tej warstwy zachodzi tylko na skutek odkształceń b), c), d), natomiast odkształcenie a), przedstawiające obrót elementu jako ciała sztywnego żadnych odkształceń względnych nie spowoduje. Biorąc pod uwagę zasadnicze założenie II i przed-



Rys. 9.2. Określenie odkształceń względnych elementu płyty

a) zgięcie w płaszczyźnie xz ; b) zgięcie w płaszczyźnie yz ; c) odkształcenie postaciowe wywołane istnieniem $(\partial^2 w / \partial x \partial y) \neq 0$.

stawiając każde z odkształceń prostych (rys. 9.2), otrzymujemy odpowiednio odkształcenia względne ε_x , ε_y oraz kąt odkształcenia postaciowego β :

przy cylindrycznym zakrzywieniu promieniem ρ_x (rys. 9.2a)

$$\varepsilon'_x = -\zeta(\partial^2 w / \partial x^2), \quad \varepsilon'_y = 0, \quad \beta' = 0;$$

przy cylindrycznym zakrzywieniu promieniem ρ_y (rys. 9.2b):

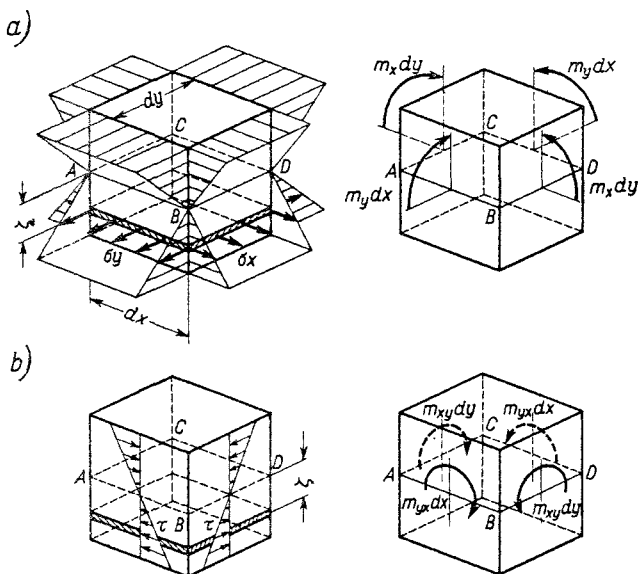
$$\varepsilon''_x = 0, \quad \varepsilon''_y = -\zeta(\partial^2 w / \partial y^2), \quad \beta'' = 0;$$

przy skręceniu (rys. 9.2c):

$$\varepsilon'''_x = 0, \quad \varepsilon'''_y = 0, \quad \beta''' = -2\zeta(\partial^2 w / \partial x \partial y).$$

Superponując wszystkie te odkształcenia składowe otrzymujemy wzory (9.1)

otrzymujemy w wyniku wartości naprężeń wyrażone przez ugięcie w płaszczyznę środkowej i odległość ζ rozpatrywanej warstwy. Gdyby zatem ugięcie $w(x, y)$ było dane, a zadanie nasze polegałoby na wyznaczeniu naprężeń, to przy poczynionych założeniach wzory (9.2) dawałyby odpowiedź. Tak jednak na ogół nie jest, gdyż w typowych zagadnieniach znane są tylko obciążenia płyty i sposób jej podparcia. W takich przypadkach wygodniej jest zamiast naprężeń wprowadzić siły wewnętrzne określone jako *wydatki*



Rys. 9.3. Określenie wydatków momentów gnących m_x i m_y oraz wydatków momentów skręcających m_{xy} i m_{yx}

momentów gnących m_x , m_y i momentów skręcających m_{xy} , m_{yx} kGcm/cm, odniesione do jednostki długości mierzonej na płaszczyźnie środkowej (rys. 9.3). Wydatki te definiujemy następująco

$$m_x dy = \int_{-0,5\delta}^{0,5\delta} (\sigma_x dy d\zeta) \zeta = \int_{-0,5\delta}^{0,5\delta} -\frac{E\zeta^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy d\zeta.$$

Zauważając, że w danym punkcie x , y wielkości $\partial^2 w / \partial x^2$ i $\partial^2 w / \partial y^2$ są stałe, mamy ostatecznie

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \text{ kGcm/cm}, \quad (9.3a)$$

gdzie D jest tak zwaną sztywnością zginania płyty równą

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \text{ kGcm}^2/\text{cm}. \quad (9.4a)$$

Analogicznie obliczymy wydatki m_y , m_{xy} i m_{yx} , a mianowicie: otrzymując w rezultacie:

$$m_y = \int_{-0,5\delta}^{0,5\delta} (\sigma_y d\zeta) \zeta = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (9.3b)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-0,5\delta}^{0,5\delta} (\tau d\zeta) \zeta = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.3c)$$

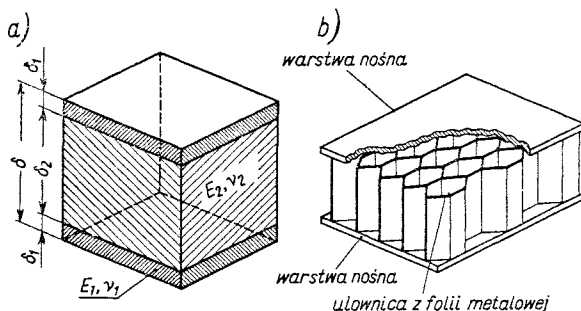
Otrzymane wzory (9.3) pozwalają wyznaczyć wielkość naprężeń, o ile tylko z rozwiązania płyty znane są wielkości m_x , m_y i m_{xy} . Dzieliąc mianowicie odpowiednio stronami wzory (9.2) i (9.3), mamy:

$$\sigma_x = \frac{12m_x}{\delta^3} \zeta, \quad \sigma_y = \frac{12m_y}{\delta^3} \zeta, \quad \tau = \frac{12m_{xy}}{\delta^3} \zeta, \quad (9.5a)$$

a ekstremalne wartości znajdziemy podstawiając $\zeta = \pm 0,5\delta$, skąd

$$(\sigma_x)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_x}{\delta^2}, \quad (\sigma_y)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_y}{\delta^2}, \quad (\tau)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_{xy}}{\delta^2}. \quad (9.5b)$$

Na zakończenie przeanalizujemy jeszcze przypadek płyt warstwowych, stosowanych obecnie w szeregu konstrukcji cienkościennych. W płytach takich dwie cienkie warstwy materiału nośnego (np. cienkie blachy) stanowią okładziny warstwy środkowej o znacznie mniejszym module sprężystości (rys. 9.4). Dzięki przyklejeniu obydwu okładzin do warstwy środkowej, zespół tych trzech warstw stanowi



Rys. 9.4. Typowe rozwiązania płyt warstwowych

a) płyta z nośnymi warstwami zewnętrznymi połączonymi lekkim wypełniaczem; b) wypełniacz w postaci cienkościennej ulownicy klejonej do warstw zewnętrznych.

jedną całość i przy zginaniu odkształca się on tak jak płyta jednorodna. Wzory (9.1) wyprowadzone z założeń czysto geometrycznych zachowują więc swą ważność także i w tym przypadku. Zmianie natomiast ulegają wzory (9.2), gdyż dla warstw okładzin ($-0,5\delta \leq \zeta < -0,5\delta_2$ oraz $0,5\delta_2 < \zeta \leq 0,5\delta$) należy w tych wzorach wstawić $E = E_1$, a dla warstwy środkowej $E = E_2$.

Przeprowadzając analogicznie jak poprzednio rachunki dla wydatków momentów, otrzymujemy wzory (9.3), w niezminionej postaci, z tym tylko, że obecnie sztywność D płyty na zginanie wyraża się wzorem

$$D = \frac{E_1(\delta^3 - \delta_2^3)}{12(1-\nu_1^2)} + \frac{E_2\delta_2^3}{12(1-\nu_2^2)}. \quad (9.4b)$$

Sformułowanie odpowiedników wzorów (9.5a, b) zostawia się czytelnikowi.

W praktyce warstwę środkową wykonuje się z materiału bardzo lekkiego (pianka ze sztucznej żywicy) bądź z cienkiej folii metalowej, ukształtowanej jako plaster pszczełli (rys. 9.4b) i przyklejonej na sztorcach do warstw nośnych. W obydwu tych przypadkach* moduł $E_2 \ll E_1$, tak że można założyć $E_2 = 0$ i biorąc pod uwagę, że $\delta_2 \gg \delta_1$ mamy przy oznaczeniu $\delta_{sr} = \delta_1 + \delta_2$

$$D \approx \frac{E_1 \delta_1 \delta_{sr}^2}{2(1-\nu_1^2)}. \quad (9.4c)$$

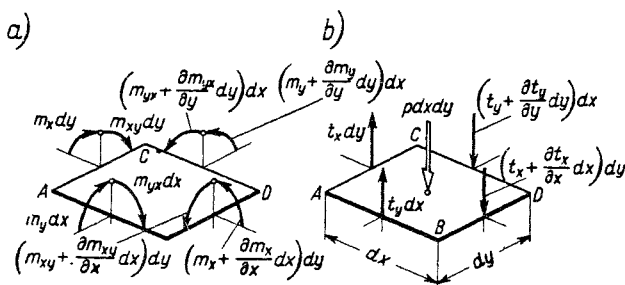
Omawiany przypadek można uogólnić dla płyty z okładzinami niejednakowej grubości δ_1 i δ_3 , module $E_1 = E_3$, rozdzielonych warstwą o grubości δ_2 . Po przekształceniach otrzymujemy wzór

$$D \approx \frac{E_1 \delta_1 \delta_3 \delta_{sr}^2}{(\delta_1 + \delta_3) \cdot (1 - \nu_1^2)}, \quad (9.4d)$$

w którym $\delta_{sr} = \delta_2 + 0,5(\delta_1 + \delta_3)$, a ν_1 — liczba Poissona dla okładzin.

9.2. Równanie różniczkowe płyt cienkich

Dotychczasowa analiza uzależniła wydatki momentów gnących i skręcających od ugięcia w , a właściwie od pochodnych tego ugięcia. Przechodząc do sformułowania zasadniczego równania, uzależniającego to ugięcie od obciążenia zewnętrznego p kG/cm², napiszmy warunki równowagi elementu płyty. Zauważmy, że wydatki momentów m_x , m_y i $m_{xy} = m_{yx}$ będąc zależne od $w(x, y)$ są funkcjami x, y . Fakt ten uwzględniamy, zwiększając w przekrojach BD i CD wydatki momentów o nieskończenie małe przyrosty w porównaniu z wydatkami działającymi w przekrojach AB i AC (rys. 9.3, 9.5a).



Rys. 9.5. Statyka elementu płyty. Dla jasności rysunku podano jedynie element płaszczyzny środkowej

Równowagę obciążenia zewnętrznego $p dx dy$ zapewniają wydatki sił tnących t_x i t_y , kG/cm, które podobnie jak wydatki momentów są funkcjami x i y . Powoduje to, że wielkość t_x i t_y w przekrojach BD i CD różnią się o nieskończenie małe przyrosty od sił

* W przypadku drugim (rys. 9.4b) moduł E_2 nie jest modulem materiału folii, lecz zastąpimy modulem, gdy, traktując warstwę środkową makroskopowo, zamieniamy ją przez materiał wypełniający objętość w sposób ciągły.

działających w przekrojach AB i AC (rys. 9.5b). Warunki równowagi sprowadzają się do trzech równań*:

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + p = 0, \quad t_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}, \quad t_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}. \quad (9.6)$$

W celu wyrugowania wielkości t_x i t_y różniczkujemy dwa ostatnie równania (9.6) odpowiednio względem x lub y . Po podstawieniu do pierwszego mamy ostatecznie

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p. \quad (9.7)$$

Równanie (9.7), jako równanie równowagi, jest słuszne niezależnie od tego, czy sztywność D płyty jest stała czy zmienna, czy materiał podlega prawu Hooke'a czy nie. W rozważanym przypadku, gdy wydatki momentów są związane z ugięciem w zależnościami (9.3), podstawienie do równania (9.7) daje dla płyty o stałej sztywności

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}, \quad (9.8)$$

gdzie zapis lewej strony równania w postaci $\nabla^2 \nabla^2 w$ oznacza podwójne zastosowanie do zmiennej w operatora Laplace'a

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

W przypadku płyty o zmiennej sztywności $D(x, y)$ zasadnicze równanie otrzymujemy jak poprzednio z tym tylko, że obecnie przy różniczkowaniu, np. $\partial^2 m_x / \partial x^2$, należy traktować D jako funkcję x i y . Wynik ostateczny

$$\nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = p \quad (9.9)$$

ma w porównaniu do wzoru (9.8) postać bardziej złożoną. Ta komplikacja postaci jest główną przyczyną, że zagadnienia płyt o zmiennej sztywności są w literaturze słabo opracowane, aczkolwiek są one z punktu zastosowań technicznych równie ważne jak płyty o $D = \text{const}$.

Dla otrzymania pełnego obrazu wszystkich sił wewnętrznych określmy jeszcze, wprowadzone ostatnio, wydatki sił tnących t_x , t_y przez ugięcie w . Podstawiając do dwóch

* W postaci rozwiniętej równanie równowagi rzutów na oś z brzmi

$$\left(t_x + \frac{\partial t_x}{\partial x} dx \right) dy - t_x dy + \left(t_y + \frac{\partial t_y}{\partial y} dy \right) dx - t_y dx + p dx dy = 0;$$

a równania równowagi momentów względem osi BD i CD są odpowiednio

$$t_x dy dx + m_x dy - \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy + m_{yx} dx - \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

$$t_y dx dy + m_y dx - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx + m_{xy} dy - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy = 0$$

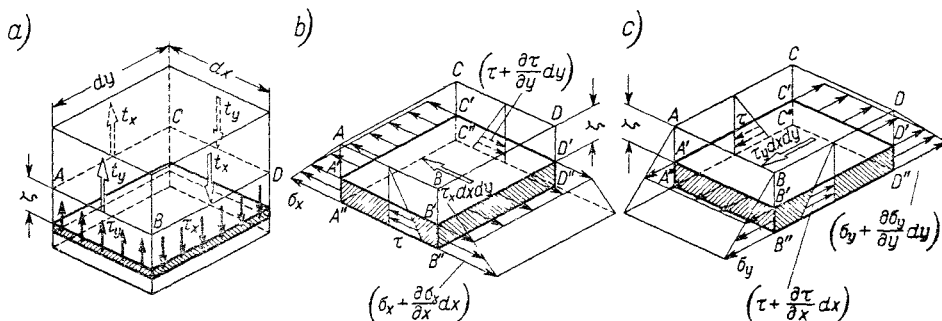
po przekształceniu których otrzymujemy równania (9.6).

ostatnich równań (9.6) wyrażenia (9.3) mamy po przekształceniach dla płyty o stałej sztywności*

$$t_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \quad (9.10a)$$

$$t_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \quad (9.10b)$$

Napężenia styczne pochodzące od tych wydatków działają równolegle do osi z (rys. 9.6a). Wielkość ich obliczamy podobnie jak w przypadku belek** rozpatrując równowagę rzutów na oś x



Rys. 9.6. Określenie naprężeń stycznych τ_x i τ_y działających równolegle do osi z . Na rysunkach b) i c) narysowano tylko te naprężenia, które wchodziły do odpowiedniego równania rzutów.

i y części elementu o wymiarach dx i dy , odciętego ponadto płaszczyzną równoległą do płaszczyzny środkowej odległą od niej o wielkość ζ . Tak na przykład równanie rzutów na oś x jest następujące:

$$\tau_x dx dy + \int_{A'C'C''A''} \sigma_x dA - \int_{B'D'D''B''} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dA + \\ + \int_{A'B'B''A''} \tau dA - \int_{C'D'D''C''} \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dA = 0,$$

gdzie:

$\int_{A'C'C''A''} \sigma_x dA$ oznacza wypadkową z wszystkich naprężeń normalnych σ_x działających na pole przekroju $A'C'C''A''$ itd. Uwzględniając zależności (9.5a) mamy po podstawieniu***

$$\tau_x dx dy - \frac{12}{\delta^3} \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \left(dy \int_{\zeta}^{\frac{0,5\delta}{2}} \zeta d\zeta \right) - \frac{12}{\delta^3} \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \left(dx \int_{\zeta}^{\frac{0,5\delta}{2}} \zeta d\zeta \right) = 0,$$

* Dla płyt o zmiennej sztywności metoda postępowania zostaje bez zmian, z tym tylko, że przy różniczkowaniu należy traktować D jako funkcję x i y .

** Patrz na przykład Kurowski i Niezgódziński, *Wytrzymałość Materiałów*, PWN 1955, str. 176.

*** W równaniu równowagi współrzędna ζ ma podwójne znaczenie. Pod znakiem całki występuje ona jako odległość pewnej dowolnej warstwy od powierzchni środkowej, a ponadto występuje ona jako dolna granica całkowania dla oznaczenia odległości wybranej warstwy $A'B'C'D'$.

a po skróceniu przez dz dy i uwzględnieniu drugiego z równań (9.6)

$$\tau_x = 3t_x(\delta^2 - 4\zeta^2)/2\delta^3. \quad (9.11a)$$

Analogicznie oblicza się wartości naprężeń stycznych (rys. 9.6c) τ_y otrzymując

$$\tau_y = 3t_y(\delta^2 - 4\zeta^2)/2\delta^3. \quad (9.11b)$$

Jak widać ze wzorów (9.11), rozkład naprężeń stycznych wzdłuż wysokości ζ jest paraboliczny. Maksymalne wartości pojawiają się na płaszczyźnie środkowej ($\zeta = 0$) i wynoszą:

$$(\tau_x)_{\max} = 3t_x/2\delta, \quad (\tau_y)_{\max} = 3t_y/2\delta. \quad (9.11c)$$

Naprężenia τ_x i τ_y są zazwyczaj niewielkie i na ogół biorąc obliczenie ich pomija się. Istnieją jednak przypadki, gdy wartość ich może decydować o wytrzymałości płyty, a mianowicie dla płyt warstwowych (rys. 9.4). Biorąc szczególny przypadek płyty o cienkich okładzinach, gdy moduł E_2 warstwy środkowej jest bardzo mały w porównaniu do modułu E_1 okładzin, otrzymujemy po przeprowadzeniu identycznych rozważań, iż naprężenia τ_x i τ_y są stałe wzdłuż grubości warstwy środkowej, a ich wielkość określa się wzorami

$$\tau_x \approx t_x/\delta_2, \quad \tau_y \approx t_y/\delta_2.$$

Otrzymane wartości naprężeń należy porównać z wytrzymałością warstwy środkowej na ścinanie. Wytrzymałość ta jest niewielka zwłaszcza w przypadku sztucznych żywic porowatych. Ponieważ te same naprężenia działają w warstwie kleju łączącego okładziny z warstwą środkową, należy sprawdzić, czy to połączenie ma dostateczny współczynnik bezpieczeństwa na działanie wypadkowego naprężenia τ_w o wartości

$$\tau_w = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

9.3. Podstawowe właściwości równań (9.8) i (9.9). Warunki brzegowe

Podstawową właściwością równania (9.8), tzw. równania biharmonicznego oraz równania (9.9) jest to, że są to równania liniowe. Jak wiadomo z matematyki, każde równanie liniowe o stałych lub zmiennych współczynnikach ma z kolei tę właściwość, że *suma dwóch lub więcej rozwiązań tego równania przy takich samych warunkach brzegowych, lecz różnych wyrazach wolnych (obciążeniach) jest też rozwiązaniem tego równania.*

Powyższe stwierdzenie jest niczym innym, jak tylko sformułowaniem zasady superpozycji. Jeśli więc przy obciążeniach $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, ..., $p_n(x, y)$ powstają w tej samej płycie ugięcia $w_1(x, y)$, ..., $w_n(x, y)$ spełniające równania (9.8)

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = p_1/D, \quad \nabla^2 \nabla^2 w_2 = p_2/D, \quad \dots, \quad \nabla^2 \nabla^2 w_n = p_n/D$$

lub odpowiednie równania (9.9), to przy działaniu obciążenia $p(x, y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ powstanie ugięcie w

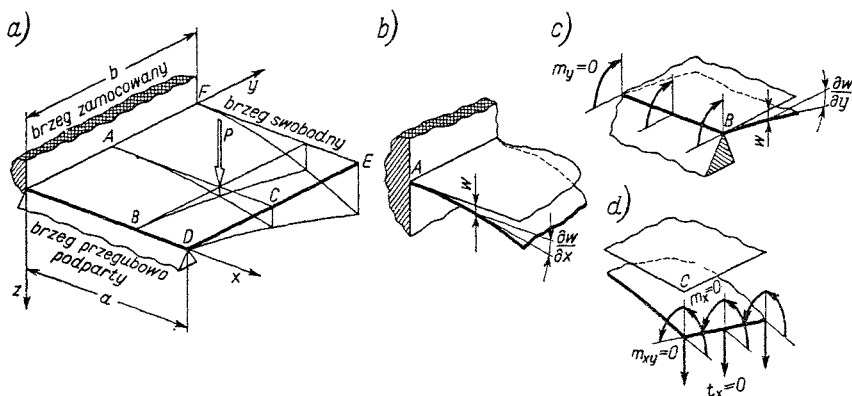
$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

równe sumie określonych poprzednio rozwiązań. Ta metoda superpozycji jest punktem wyjścia do bardzo wielu rozwiązań (art. 9.4).

Samo rozwiązanie równania (9.8) lub (9.9) jest zagadnieniem matematycznym i polega na znalezieniu takiej powierzchni $w(x, y)$, która spełniając równanie (9.8) lub (9.9) przybiera na brzegach płyty zadane z góry wartości brzegowe. Należy bowiem przypo-

mniej, że samo równanie (9.8) lub (9.9) przy danym obciążeniu, lecz bez sprecyzowanych warunków brzegowych, ma nieskończenie wiele rozwiązań*, z których musimy wybrać tylko jedno spełniające zadane warunki brzegowe. Na tym tle staje się jasne, że czynnością wstępną, a jednocześnie podstawową, jest określenie liczby i postaci warunków brzegowych, jakie ma spełniać ugięcie w , aby ten wybór właściwego rozwiązania był jednoznaczny.

Z teorii równań różniczkowych wynika, że do jednoznacznego rozwiązania równań (9.8) lub (9.9) trzeba, aby na całym brzegu były zadane z góry dwa warunki brzegowe, np. wartość w i wartość pochodnej cząstkowej w kierunku prostopadłym do brzegu, tj. $\partial w / \partial n$. Zamiast takich warunków mogą być zadane inne: np. wartość w i $\partial^2 w / \partial n^2$, można wreszcie na części brzegu mieć zadane w i $\partial w / \partial n$, na drugiej części $\partial^2 w / \partial n^2$ i w itd. Ograniczając



Rys. 9.7. Warunki podparcia brzegów płyty prostokątnej
b) brzeg idealnie utwardzony; c) brzeg przegubowo podparty; d) brzeg swobodny.

nasze rozważania do przypadku najczęściej spotykanego płyt prostokątnych, prześledzimy formułowanie tych warunków brzegowych dla najbardziej typowych warunków podparcia płyty (rys. 9.7a).

Brzeg idealnie utwardzony (rys. 9.7b) jest takim podparciem, przy którym punkty brzegu nie mogą mieć ugięcia, jak również nie może zachodzić obrót względem osi pokrywającej się z brzegiem. Przyjmując, iż brzegiem takim jest np. $x = 0$, mamy, iż dla wszystkich punktów tego brzegu

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \text{ i } \quad (\partial w / \partial x)_{x=0} = 0. \quad (9.12a)$$

* Celowe jest tu posłużyć się analogią. Mając równanie $y'' = 2$ odpowiedź otrzymujemy w postaci

$$y = x^2 + C_1 x + C_2,$$

zawierającej stałe całkowania C_1 i C_2 . Tak więc mamy nieskończoną liczbę rozwiązań, z których wybieramy tylko jedno spełniające zadane dwa warunki brzegowe. W przypadku równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych różnica polega na tym, że rolę stałych C_1 i C_2 spełnia funkcja, którą należy dobrać z warunków brzegowych.

Gdyby brzegiem idealnie utwierdzonym był brzeg równoległy, do osi x , np. $y = b$, to odpowiednie warunki brzegowe miałyby postać:

$$(w)_{y=b} = 0, \quad (\partial w / \partial y)_{y=b} = 0. \quad (9.12b)$$

Brzeg podparty przegubowo (rys. 9.7c) uniemożliwia ugięcie punktów tego brzegu, tj. $w = 0$. Drugi warunek brzegowy wynika z faktu, iż podparcie tego rodzaju pozwala na swobodny obrót względem osi pokrywającej się z brzegiem, a więc moment podporowy jest równy zeru. Jeśli na przykład brzegiem takim jest krawędź $x = 0$, to według (9.3a)

$$(m_x)_{x=0} = \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]_{x=0} = 0.$$

Ponieważ na tymże brzegu $w \equiv 0$, to w konsekwencji $(\partial w / \partial y)_{x=0} \equiv 0$ oraz $(\partial^2 w / \partial y^2)_{x=0} \equiv 0$ i w wyniku warunki poprzednie uproszczą się do postaci:

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (\partial^2 w / \partial x^2)_{x=0} = 0. \quad (9.13a)$$

Podobnie, gdy brzegiem przegubowo podpartym jest brzeg równoległy do osi x , np. $y = b$, to warunki brzegowe są

$$(w)_{y=b} = 0, \quad (\partial^2 w / \partial y^2)_{y=b} = 0. \quad (9.13b)$$

Brzeg swobodny charakteryzuje się tym, iż nie łączy się z żadną podporą, na skutek czego wszystkie oddziaływania na tym brzegu są równe zeru. Jeśli taki brzeg jest równoległy do osi y (rys. 9.7d), to w każdym punkcie tego brzegu (np. C) muszą być spełnione warunki:

$$(m_x)_{x=a} = 0, \quad (m_{xy})_{x=a} = 0, \quad (t_x)_{x=a} = 0.$$

W odróżnieniu zatem od poprzednich przypadków mogłoby się wydawać, że liczba warunków brzegowych przekracza, potrzebną do otrzymania jednoznacznego rozwiązania, liczbę dwóch warunków. Tę pozorną sprzeczność łatwo usuniemy zauważając, że działanie momentu skręcającego m_{xy} jest równoznaczne z obciążeniem tegoż brzegu pewnymi wydatkami sił tnących. Biorąc bowiem element brzegu dy obciążony momentem $m_{xy} dy$, realizujemy to obciążenie przez parę sił* (rys. 9.8a) o wartości $(m_{xy} dy)/dy = m_{xy}$. Podobna para sił w odcinku sąsiednim ma wartość

$$m_{xy} + (\partial m_{xy} / \partial y) dy,$$

wobec czego wypadkowa siła w punkcie C jest

$$(\partial m_{xy} / \partial y) dy.$$

W wyniku więc otrzymujemy, że obciążenie brzegu $x = \text{const}$ momentami m_{xy} da się zrealizować przez przyłożenie na tym brzegu obciążenia ciągłego (wydatku) o wartości $(\partial m_{xy} / \partial y)$ oraz dwóch sił skupionych na końcach rozpatrywanego brzegu o wartości $(m_{xy})_D$ i $(m_{xy})_E$. Wydatek ten w połączeniu z t_x daje zastępczy wydatek v_x sił tnących

$$v_x = t_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}. \quad (9.14a)$$

* Takie zastąpienie obciążenia modyfikuje przebieg sił wewnętrznych (naprężeń) w okolicy brzegu, jednakże według zasady de Saint Venanta odgrywa to rolę tylko na brzegowym pasie płyty o szerokości rzędu grubości płyty.

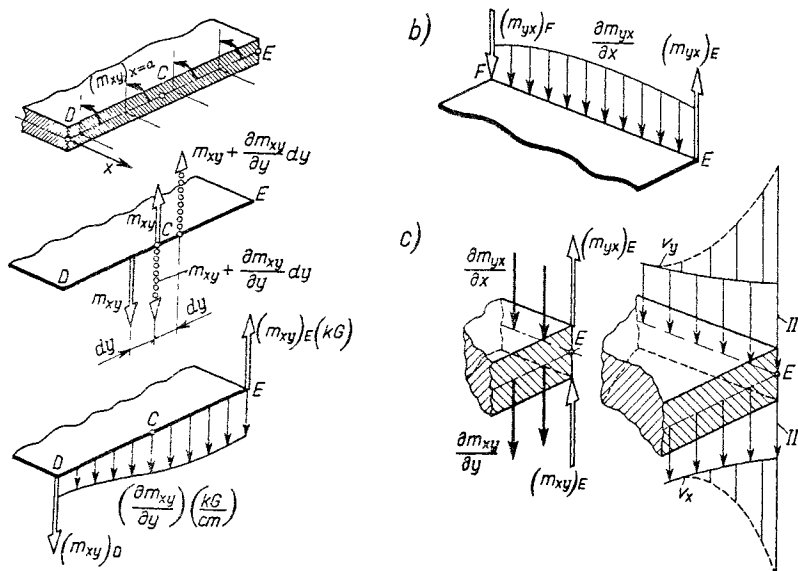
i podobnie dla brzegu $y = \text{const}$ zastępczy wydatek v_y jest

$$v_y = t_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}. \quad (9.14b)$$

Wydatki powyższe można wyrazić przez w , a mianowicie uwzględniając (9.10) i (9.3) mamy w przypadku płyty o $D = \text{const}$.

$$v_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (9.15a)$$

$$v_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \quad (9.15b)$$



Rys. 9.8. Zastąpienie brzegowych momentów skręcających przez wydatki tnące
 a) brzeg $x = a = \text{const}$ (rys. 9.7a) z pokazanymi kolejnymi etapami zastępowania obciążeń; b) zastępcze obciążenie brzegu EF (rys. 9.7a); c) statyka naroża E , lewy rysunek — rozkład teoretyczny, rozkład rzeczywisty (linie przerywane) z siłą skupioną $2(m_{xy})_E$ zastąpioną lokalnym wzrostem wydatków v_x , v_y .

Podobnie jak poprzednio tak i dla brzegu $y = \text{const}$ na końcach brzegu pojawiają się dwie siły skupione o wartościach $(m_{yx})_E$ i $(m_{yx})_F$ (rys. 9.8b), przy czym w E siła ta $(m_{yx})_E$ jest skierowana do góry. W rezultacie w miejscu załomu brzegu pod kątem prostym działa siła skupiona (rys. 9.8c)

$$(m_{xy})_E + (m_{yx})_E = 2(m_{xy})_E.$$

Wskazuje to, że w przypadku prostokątnej płyty podpartej na całym obwodzie w narożach powstają skupione siły, co z kolei powoduje teoretycznie biorąc nieskończenie wielkie spiętrzenie naprężeń stycznych τ_x i τ_y (wzór 9.11). W rzeczywistości spiętrzenie

to nie jest groźne z uwagi na podatność podpór jak i z tego względu, że w otoczeniu naroży przebieg ugięcia w odbiega od określonego według przedstawionej przybliżonej teorii, a rzeczywisty przebieg wydatków v_x i v_y ma charakter według rys. 9.8c.

Wracając obecnie do warunków brzegowych odpowiadających brzegowi swobodnemu widzimy, że po wprowadzeniu wydatków v_x i v_y warunki te redukują się znowu do dwóch i dla płyty (rys. 9.7) mają postać:

dla brzegu $x = \text{const} = a$

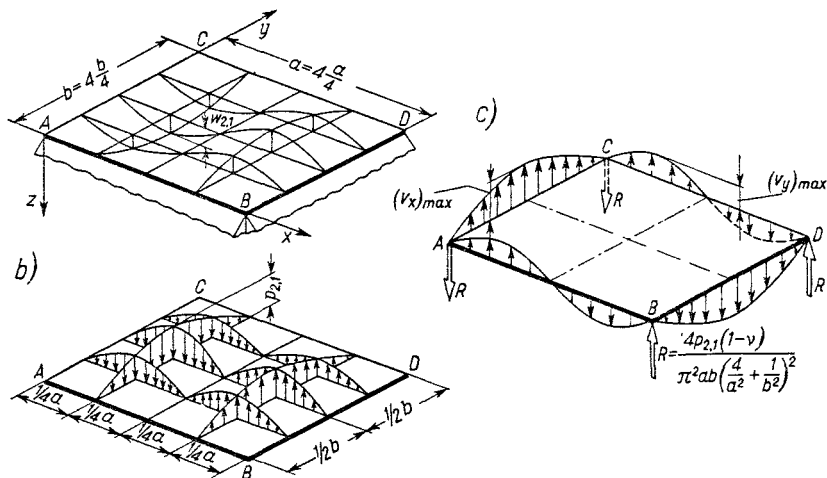
$$(m_x)_{x=a} = 0, \quad (v_x)_{x=a} = 0; \quad (9.16a)$$

dla brzegu $y = \text{const} = b$

$$(m_y)_{y=b} = 0, \quad (v_y)_{y=b} = 0. \quad (9.16b)$$

9.4. Rozwiązanie płyt metodą rozkładu obciążeń

Z wielu istniejących metod rozwiązywania płyt* najbardziej tradycyjna jest metoda przedstawienia danego obciążenia jako sumy takich obciążeń, dla których znane są pełne rozwiązania równania (9.8) przy danych warunkach brzegowych.



Rys. 9.9. Przykład działania prostego obciążenia na płytę podpartą przegubowo
 a) powierzchnia ugięcia płyty ($m = 2, n = 1$); b) układ obciążeń na powierzchni płyty; c) układ reakcji na brzegach płyty.

Zastosowanie tej ogólnej idei objaśnimy na przykładzie prostokątnej płyty o wymiarach a, b i $D = \text{const}$, opartej przegubowo na czterech brzegach (rys. 9.9). Założmy, że powierzchnia ugięcia tej płyty określona jest wzorem

$$w = w_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.17a)$$

* Z uwagi na wyraźnie skierunkowany cel naszych rozważań (patrz wstęp do rozdz. 9) ograniczamy się tutaj do płyt o $D = \text{const}$.

gdzie $w_{m,n}$ jest współczynnikiem stałym, a m i n liczbami naturalnymi. Łatwo sprawdzić, iż taka funkcja spełnia dla wszystkich czterech brzegów $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ i $y = b$ wszystkie warunki (9.12). Wstawiając do równania (9.8) mamy po wykonaniu różniczkowania i przekształceniach

$$p = Dw_{m,n}\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.17b)$$

jako wartość obciążenia, które wywoła ugięcie (9.17a). Jak widać, obciążenie to wyraża się z dokładnością do stałego współczynnika taką samą funkcją x i y jak i ugięcie w . Jeśli zatem na odwrót mamy dane obciążenie pod postacią wyrażenia

$$p = p_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.17c)$$

gdzie $p_{m,n}$ jest daną amplitudą obciążenia, to porównując (9.17b) i (9.17c) możemy wyznaczyć amplitudę ugięcia $w_{m,n}$, a mianowicie:

$$w_{m,n} = \frac{p_{m,n}a^4}{DB_{m,n}^3} \text{ cm}, \quad (9.18a)$$

gdzie bezwymiarowa wielkość $B_{m,n}$

$$B_{m,n} = \pi^2 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (9.18b)$$

jest funkcją naturalnych liczb m i n oraz stosunku a/b .

Podstawiając teraz w ze wzoru (9.17a) do wzorów (9.3), mamy po uwzględnieniu (9.18a) wartości m_x , m_y , m_{xy} :

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{\pi^2 p_{m,n} a^2}{B_{m,n}^2} \left(m^2 + \nu \frac{n^2 a^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ m_y &= \frac{\pi^2 p_{m,n} a^2}{B_{m,n}^2} \left(\frac{a^2 n^2}{b^2} + \nu m^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ m_{xy} &= m_{yx} = -\frac{\pi^2 p_{m,n} a^2}{B_{m,n}^2} \frac{mna}{b} (1-\nu) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

wyrażone jako funkcje znanego obciążenia p (9.17c). Podobnie ze wzorów (9.10) i (9.15) wyznaczamy:

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \frac{\pi p_{m,n} a}{B_{m,n}} m \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ t_y &= \frac{\pi p_{m,n} a}{B_{m,n}} n \frac{a}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\pi^3 p_{m,n} a}{B_{m,n}^2} m \left[m^2 + (2-\nu) n^2 \frac{a^2}{b^2} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_y &= \frac{\pi^3 p_{m,n} a}{B_{m,n}^2} n \frac{a}{b} \left[\frac{n^2 a^2}{b^2} + (2-\nu) m^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Jak widać, we wszystkich tych wzorach nie występuje sztywność płyty D . Jeśli więc mamy dwie płyty o identycznych gabarytowych wymiarach a i b i jednakowym ν , lecz różnej sztywności, to wydatki zarówno momentów jak i sił są w odpowiadających sobie punktach obu płyt jednakowe. Nie dotyczy to oczywiście naprężeń i ugięć, które będą mniejsze w płycie o większej sztywności.

Wzory (9.21) pozwalają obliczyć oddziaływania podpór na brzegach płyty. Jeśli na przykład $m = 2$, $n = 1$, to układ oddziaływań v_x i v_y przedstawia się tak jak na rys. 9.9c. Ponadto w narożach działają siły skupione o jednakowej wartości $R = 2(m_{xy})_{x=0, y=0}$ podanej na rysunku. Łatwo sprawdzić, że taki układ oddziaływań zapewnia równowagę płyty jako całości, gdyż warunek rzutów na oś z jest automatycznie spełniony podobnie jak i warunek momentów względem osi $y = 1/2b$. Co się dotyczy warunku równowagi momentów względem osi $x = 0$, to sprawdzenie zostawia się Czytelnikowi.

Obliczenie naprężeń polega na bezpośrednim wykorzystaniu wzorów* (9.5) i (9.11) przy uwzględnieniu wartości m_x, m_y, m_{xy} ze wzorów (9.19). Co się dotyczy wyteżenia materiału, to odpowiednie σ_{red} wyznaczamy z reguły dla skrajnych warstw płyty ($\zeta = \pm 0,5\delta$). Stosując na przykład hipotezę Hubera otrzymujemy dla płyty jednorodnej**

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{6}{\delta^2} \sqrt{m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2}.$$

Ponieważ liczby naturalne m i n można obierać dowolnie, to otrzymane wyniki (9.17 ÷ 9.21) nie są pojedynczym rozwiązaniem, lecz przedstawiają całą grupę prostych rozwiązań prostokątnej płyty o danych wymiarach a i b podpartej przegubowo na wszystkich czterech brzegach. Każdemu przy tym z rozwiązań odpowiada proste obciążenie (9.17c). Jeśli więc teraz mamy tę samą płytę obciążoną pewnym z góry zadany obciążeniem $p = f(x, y)$, to zadanie nasze sprowadza się do rozłożenia tego obciążenia na sumę obciążeń typu (9.17c). Ten rozkład można dokonać w różny sposób. Najlepiej będzie jednak zażądać, aby w każdym punkcie x, y to dane obciążenie było równe obciążeniu wynikającemu z sumowania obciążeń typu (9.17c), to jest, aby

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

W równości tej nieznane są na razie amplitudy $p_{m,n}$, natomiast znana jest lewa strona równania, to znaczy $f(x, y)$. Wyznaczenie jednak tych amplitud jest proste*** i daje w wyniku

$$p_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (9.22)$$

Przeprowadzając całkowanie według (9.22), obliczamy dla danej funkcji $f(x, y)$ wartości $p_{m,n}$, a następnie po podstawieniu do (9.18) określamy amplitudę $w_{m,n}$. Podstawiając

* W przypadku płyty warstwowej wzory te ulegają modyfikacji, o której była mowa w art. 9.1.

** Patrz Kurowski, Niezgodziński, *Wytrzymałość Materiałów*, PWN 1955, str. 168.

*** Przebieg przekształceń jest następujący. Mnożąc obydwie strony poprzedniej równości przez $\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$, całkujemy ją następnie po całej powierzchni płyty. Zauważając, że dla prostokąta

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{\bar{m}\pi x}{a} \sin \frac{\bar{n}\pi y}{b} dx dy \begin{cases} = 0, & \text{gdy } \bar{m} \neq m \text{ oraz } \bar{n} \neq n; \\ = \frac{ab}{4}, & \text{gdy } \bar{m} = m \text{ oraz } \bar{n} = n; \end{cases}$$

otrzymujemy z całej prawej strony równości tylko jeden wyraz, a mianowicie $p_{m,n}ab/4$, skąd w wyniku mamy równość (9.22).

następnie do (9.17a) i sumując wyniki, odpowiadające poszczególnym prostym obciążeniom sinusoidalnym, mamy wypadkowe ugięcie pod postacią podwójnego szeregu Fouriera

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{m,n} a^4}{DB_{m,n}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.23)$$

Podstawiając to wyrażenie do wzorów (9.3) wyznaczamy m_x , m_y , m_{xy} również jako podwójne szeregi Fouriera, na przykład

$$m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 p_{m,n} a^2}{B_{m,n}^2} \left(m^2 + v n^2 \frac{a^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

gdzie $B_{m,n}$ określone jest nadal wzorem (9.18b).

Przykład. Wyznaczyć postać powierzchni ugięcia dla prostokątnej płyty, opartej przegubowo na 4 brzegach, przy działaniu obciążenia $p = p_0$ równomiernie rozłożonego na całej powierzchni płyty.

Rozwiązanie. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia amplitud $p_{m,n}$ według wzoru (9.22). Wstawiając mianowicie $f(x, y) = p_0 = \text{const}$, mamy

$$p_{m,n} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16p_0}{\pi^2 mn},$$

przy czym m i n są nieparzyste*. Podstawiając do (9.23) mamy

$$w = \frac{16p_0 a^4}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn B_{m,n}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Maksymalne ugięcie występuje w środku płyty ($x = a/2$, $y = b/2$) i jest równe

$$w_{\max} = \frac{16p_0 a^4}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn B_{m,n}^2}. \quad (c)$$

Szereg ten jest bardzo szybko zbieżny. Podstawiając np. $a = b$ i wprowadzając parametr $K = 16p_0 a^4 / \pi^4 D$ mamy pierwsze cztery amplitudy $w_{m,n}$:

$$w_{1,1} = 0,2500 K, \quad w_{1,3} = w_{3,1} = 0,0033 K, \quad w_{3,3} = 0,0003 K.$$

Jak widać, wystarczającą dokładność ($\sim 2,5\%$) otrzymamy uwzględniając tylko pierwszy wyraz szeregu (c). Inaczej nieco przedstawia się sprawa, jeśli idzie o wydatki momentów. Podstawiając mianowicie $p_{m,n} = 16p_0 / \pi^2 mn$ do wzoru (a) i zakładając nadal $a = b$ (płyta kwadratowa) otrzymujemy maksymalną wartość $m_x = m_y$ w środku płyty. Wyraża się ona wzorem

$$(m_x)_{\max} = (m_y)_{\max} = \frac{16p_0 a^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\left[(-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \right] (m^2 + v n^2)}{mn (m^2 + n^2)^2} \approx 0,0479 p_0 a^2. \quad (d)$$

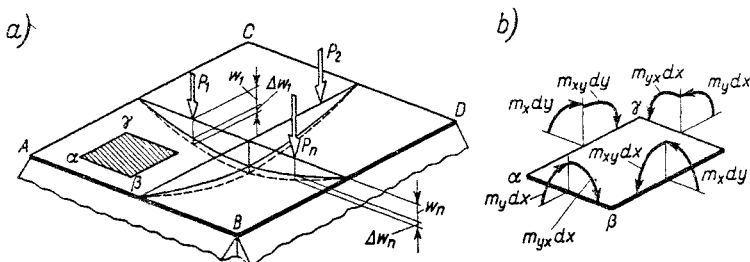
Zarówno ze wzoru (a) jak i przerobionego przykładu wynika, że szereg określający wydatki momentów jest znacznie wolniej zbieżny aniżeli szereg (9.23). Powoduje to konieczność obliczania większej liczby wyrazów szeregu (a) dla uzyskania zadowalającej dokładności. Jeszcze bardziej powolna zbieżność występuje we wzorach określających wydatki tnące t lub v . Jest to jasne, jeśli zauważyć, iż wyrażenia

* Gdy m lub n są parzyste, podwójna całka w równaniu (9.22) ma wartość zero.

dla $m_x, \dots, t_x, \dots, v_y$ otrzymuje się przez dwu lub trzykrotne różniczkowanie wyrażenia (9.23), na skutek czego pojawiają się czynniki $m^2\pi^2/a^2, \dots, n^2\pi^2/b^2$ rosnące wraz z rzędem harmonicznych. Zbieżność szeregów zapewniona jest tylko dzięki występowaniu czynników $B_{m,n}$ oraz maleniu samych amplitud $p_{m,n}$. Istnieją jednak przypadki takie jak działanie sił skupionych, gdy ta zbieżność jest bardzo słaba lub jej w ogóle nie ma. W takich przypadkach stosujemy inne metody analityczne opisane szczegółowo w specjalnych monografiach, bądź metody przybliżone (art. 9.5).

9.5. Energetyczna metoda rozwiązania płyt

Punktem wyjścia przybliżonych rozwiązań zagadnień statyki płyt są rozważania oparte na zasadzie prac przygotowanych (art. 1.1). Jeśli mianowicie płyta obciążona



Rys. 9.10. Obraz odkształceń i sił wewnętrznych przy pracy wirtualnej

a) obraz odkształceń w stanie równowagi (linia ciągła) i przy wychyleniu wirtualnym (linia przerywana); b) wewnętrzne siły w nieskończenie małym elemencie.

siłami $P_1, \dots, P_n$ (rys. 9.10a) znajduje się w równowadze, to udzielając płycie dodatkowego nieskończenie małego ugięcia $\Delta w = f(x, y)$, mamy przyrost pracy sił zewnętrznych*

$$\Delta L = P_1 \Delta w_1 + P_2 \Delta w_2 + \dots + P_n \Delta w_n$$

równy przyrostowi ΔV energii potencjalnej odkształcenia płyty, pojawiającemu się na skutek zmiany $w(x, y)$ na $w + \Delta w$, tj.

$$\sum_1^n P_n \Delta w_n = \Delta V. \quad (a)$$

Z drugiej strony energię dV , zgromadzoną w elemencie płyty o wymiarach $dx dy$, można wyrazić przez pracę momentów $m_x dy$, $m_y dx$, $m_{xy} dy$ oraz $m_{yx} dx$. Jeśli siły obciążające $P_1, \dots, P_n$ narastają równomiernie w sposób quasistatyczny, to momenty $m_x dy, \dots, m_{yx} dx$, działające na bokach elementu (rys. 9.10b), wykonają przy tym pracę**

$$dV = -\frac{1}{2} \left(m_x dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + m_y dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + m_{xy} dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + m_{yx} dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right),$$

* Zakładamy, iż Δw spełnia te same warunki brzegowe co i pierwotne ugięcie w . Na skutek tego w wyrażeniu ΔL nie pojawia się praca reakcji na brzegach płyty.

** Przy obrocie ścian AC i BD o kąt $(\partial^2 w / \partial x^2) dx$ (rys. 9.2a) moment $m_x dy$ (rys. 9.3b) wykonuje pracę $-\frac{1}{2} m_x dy (\partial w / \partial x^2) dx$ natomiast wszystkie pozostałe momenty nie wykonują przy tym pracy. Podobnie określamy pracę pozostałych momentów, np. $m_{xy} dy$ (rys. 9.3b) na kącie $(\partial w / \partial x \partial y) dx$ (rys. 9.2c) daje pracę $-\frac{1}{2} m_{xy} dy (\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$ itd.

gdzie współczynnik $1/2$ uwzględnia, podobnie jak we wszystkich rozważaniach Wytrzymałości, stopniowe narastanie momentów $m_x dy, \dots, m_{yx} dx$, a znak minus wynika z umowy co do znaków tych momentów (rys. 9.3).

Podstawiając z kolei do powyższego wyrażenia wartości m_x, m_y, m_{xy} oraz m_{yx} , według wzorów (9.3), mamy po przekształceniach

$$dV = \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

a całkowitą energię V płyty wyznaczamy sumując powyższe wyrażenie dla wszystkich elementów płyty, tj.

$$V = \iint \frac{D}{2} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (9.24a)$$

Wracając obecnie do wzoru (a) i zauważając, iż przy dodatkowym ugięciu Δw siły P są stałe, mamy wzór

$$\Delta \left(\sum_1^n P_i w_i - V \right) = \Delta \Pi = 0, \quad (9.25)$$

gdzie $\Pi = \sum P_i w_i - V$ jest tzw. *pełną energią potencjalną układu (płyty)*. Wzór (9.25) wyraża zatem, iż *w położeniu równowagi przyrost Π przy jakimkolwiek wirtualnym wychyleniu Δw jest równy zeru* lub, co jest równoznaczne, *w położeniu równowagi Π osiąga ekstremum*. Ponieważ przynajmniej jeden ze składników Π jest wyrażeniem całkowym (tj. V), a liczba wariantów wirtualnych wychyleń jest nieskończenie wielka, to zagadnienie poszukiwania ekstremum Π w tych warunkach wchodzi w zakres rachunku wariacyjnego. Ścisłe rozwiązanie takiego zagadnienia sprowadziłoby nas z powrotem do równania (9.8) lub (9.9). Zamiast tego zadawaliśmy się przybliżeniem, a mianowicie ograniczamy liczbę i charakter wirtualnych przemieszczeń Δw zakładając, iż powierzchnię ugięcia płyty można przedstawić w postaci

$$w(x, y) = a_1 w_1(x, y) + a_2 w_2(x, y) + \dots + a_k w_k(x, y), \quad (9.26)$$

gdzie $w_p(x, y)$ ($p = 1, 2, \dots, k$) — *znane funkcje, wybrane tak, aby każda z nich spełniała zadane warunki brzegowe i aby zbliżały się one w swym przebiegu do przewidzianej postaci ugięcia*. Wielkości $a_1, a_2, \dots, a_k$ są zmiennymi i nieznanymi na razie parametrami, od wartości których zależy wobec tego postać powierzchni ugięcia. Przybliżenie więc polega na tym, że jako powierzchnię ugięcia wybieramy kombinację liniową pewnej skończonej liczby funkcji w_p , ograniczając przez to swobodę zmienności w . Jak się okazuje jednak, taka przybliżona metoda daje zdumiewająco dokładne rezultaty, zwłaszcza gdy w wyrażeniu (9.26) weźmiemy kilka członów.

Po wybraniu odpowiednich funkcji w_p dalsze etapy postępowania polegają na podstawieniu wyrażenia (9.26) do (9.24a), scałkowania tego wyrażenia i wreszcie określeniu wartości Π . W ten sposób pełna energia potencjalna zostaje wyrażona jako funkcja parametrów $a_1, a_2, \dots, a_k$, a poszukiwanie jej ekstremum zgodnie z (9.25) staje się zwykłym zadaniem rachunku różniczkowego. Po wyznaczeniu mianowicie pochodnych Π względem

każdego z parametrów a_p i przyrównaniu ich do zera, otrzymujemy w wyniku tyle równań, ile jest niewiadomych a_p . Równania te mają postać

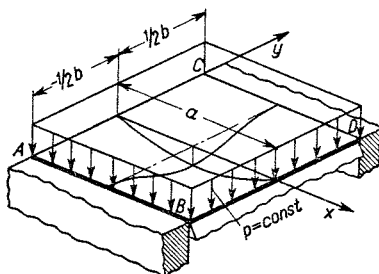
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_p} = \sum_1^n P_i \frac{\partial w_i}{\partial a_p} - \frac{\partial V}{\partial a_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, k). \quad (9.27)$$

Po wyznaczeniu parametrów a mamy tym samym postać powierzchni ugięcia (9.26) i wszystkie dalsze etapy, jak wyznaczanie wydatków m_x , m_y itd., polegają na podstawieniu do odpowiednich wzorów art. 9.1 lub 9.2.

Przy konkretnym przeprowadzeniu rachunków stosunkowo najbardziej żmudne jest obliczenie energii V . Okazuje się, iż w przypadku gdy $D = \text{const}$ i na całym obwodzie płyty $w \equiv 0$, to w wyrażeniu (9.24a) zostaje tylko pierwszy składnik, gdyż całka ze składnika zawartego w kwadratowych nawiasach jest równe zero. W rezultacie uproszczony wzór na V jest

$$V = \frac{D}{2} \iint (\nabla^2 w)^2 dx dy. \quad (9.24b)$$

Przykład. Rozwiązać metodą energetyczną płytę utwardzoną na brzegach AB i CD , przegubowo podpartą na AC i BD przy obciążeniu jej przez $p = \text{const}$ (rys. 9.11).



Rys. 9.11. Przykład płyty

Rozwiązanie. Obierając jako powierzchnię ugięcia funkcję dwuparametrową symetryczną względem prostej $y = 0$

$$w = a_{1,2} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + a_{3,2} \sin \frac{3\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

widzimy, iż spełnia ona wszystkie warunki brzegowe. Tak na przykład dla brzegów $y = \pm b/2$ winno być według (9.12b) $w \equiv 0$ i $\partial w / \partial y = 0$. Obliczając

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{2\pi a_{1,2}}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} - \frac{2\pi a_{3,2}}{b} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

po podstawieniu dla $y = \pm b/2$: $\sin(2\pi y/b) = 0$, $\cos(2\pi y/b) = -1$ w wyrażeniu dla w i $(\partial w / \partial y)$ stwierdzamy spełnienie wymagań, a tym samym właściwy dobór funkcji. Obliczając teraz energię V ze wzoru (9.24b) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \nabla^2 w = & -\frac{\pi^2}{a^2} a_{1,2} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - \frac{9\pi^2}{a^2} a_{3,2} \sin \frac{3\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - \\ & - \frac{4\pi^2}{b^2} a_{1,2} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{4\pi^2}{b^2} a_{3,2} \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b}, \end{aligned}$$

a po wstawieniu do (9.24b), scałkowaniu i podstawieniu $a = a/b$

$$V = D \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 w)^2 dx dy = \frac{\pi^4 D}{8a^4} ab [a_{1,2}^2 (3 + 8a^2 + 16a^4) + a_{3,2}^2 (243 + 72a^2 + 16a^4)] .$$

Przechodząc do obliczenia pracy sił zewnętrznych, zauważmy, że przy działaniu obciążenia ciągłego $p = \text{const}$ musimy zamiast $\sum P_i w_i$ wstawić

$$\int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} pw dx dy = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} p \left[a_{1,2} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + a_{3,2} \sin \frac{3\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \right] dx dy ,$$

co po scałkowaniu daje

$$\frac{2pab}{\pi} \left(a_{1,2} + \frac{1}{3} a_{3,2} \right) .$$

Wstawiając z kolei do (9.27) otrzymujemy dwa równania każde z jedną niewiadomą, których rozwiązanie daje

$$a_{1,2} = \frac{8pa^4}{\pi^5 D(3 + 8a^2 + 16a^4)} , \quad a_{3,2} = \frac{8pa^4}{3\pi^5 D(243 + 72a^2 + 16a^4)} .$$

Tak na przykład dla $a = 1,0$ mamy

$$a_{1,2} = 0,01058 \frac{pa^4}{E\delta^3} , \quad a_{3,2} = 0,00029 \frac{pa^4}{E\delta^3} ,$$

a maksymalne ugięcie w środku dla $x = a/2$, $y = 0$ wynosi

$$(w_{\max})_{\text{przybl}} = 0,0206 \frac{pa^4}{E\delta^3} ,$$

zamiast ścisłej wartości (tabl. 9.2)

$$w_{\max} = 0,0209 \frac{pa^4}{E\delta^3} .$$

Tak więc wartość przybliżona jest o $\sim 1,4\%$ za mała w porównaniu z wartością ścisłą. Znacznie gorszą dokładność (10 ÷ 15%) otrzymujemy dla momentów gnących, gdyż np. dla środka ($x = a/2$, $y = 0$):

$$(m_x)_{\text{przybl}} = 0,028pa^2 , \quad (m_y)_{\text{przybl}} = 0,036pa^2$$

zamiast dokładnych wartości (patrz tabl. 9.2):

$$m_x = 0,024pa^2 , \quad m_y = 0,033pa^2 .$$

Jak zaznaczono, właściwy dobór funkcji $w(x, y)$ jest jednym z istotnych punktów przy stosowaniu metody energetycznej. W przypadku płyt prostokątnych zazwyczaj każdą z funkcji $w_1(x, y)$, ..., $w_2(x, y)$ przedstawiamy jako iloczyn

$$w_p(x, y) = f_p(x) \varphi_p(y) , \quad (9.28)$$

przy czym funkcję $f_p(x)$ dobieramy tak, aby spełniała warunki brzegowe dla krawędzi $x = 0$ i $x = a$, podczas gdy $\varphi_p(y)$ ma spełniać odpowiednie warunki na pozostałych brzegach $y = 0$ i $y = b$. Taki dobór funkcji ułatwia znacznie obliczenie energii V .

Dla płyt prostokątnych szczególnie dogodnie są trygonometryczne funkcje argumentów $(\pi x/a)$, $(\pi y/b)$ lub ich wielokrotności tj.

$$\sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \sin^2 \frac{m\pi x}{a}, \quad \sin^2 \frac{n\pi y}{b}, \dots$$

Funkcje te bardzo łatwo dobierać, tak aby one same lub ich pochodne na odpowiednich brzegach przyjmowały żądane w zadaniu wartości. Tak więc chcąc, aby na brzegach $y = 0$ i $y = b$ było $w \equiv 0$ i $\partial w / \partial y \equiv 0$, możemy poza poznaną już w przykładzie funkcją $[1 - \cos(2\pi y/b)]$ zastosować funkcję

$$\left(\sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi y}{b} \right),$$

spełniającą, jak łatwo sprawdzić, również żądane warunki. Różnica między tymi dwoma funkcjami polega na tym, iż dla pierwszej z nich $(\partial^2 w / \partial y^2)_{y=0, y=b} \neq 0$, podczas gdy dla drugiej jest $(\partial^2 w / \partial y^2)_{y=0, y=b} = 0$.

Gdybyśmy zatem w przytoczonym przykładzie użyli funkcji:

$$a_1 \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + a_2 \sin \frac{\pi x}{a} \left(\sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi y}{b} \right)$$

zamiast funkcji*:

$$a_{1,2} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right),$$

to drugi składnik nowo obranej funkcji, nie wpływając na wartość momentu podporowego na brzegach, koryguje przebieg momentów w punktach oddalonych od brzegów płyty, pozwalając na lepsze zbliżenie się do wartości dokładnej.

Cenną dodatkową właściwością funkcji trygonometrycznych z punktu widzenia rachunków jest to, iż:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m_1\pi x}{a} dx &= \int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m_1\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & \text{gdy } m \neq m_1; \\ \frac{a}{2}, & \text{gdy } m = m_1; \end{cases} \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dy &= \int_0^b \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n_1\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \neq n_1; \\ \frac{b}{2}, & \text{gdy } n = n_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (b)$$

Dzięki temu przy obliczaniu energii V (9.24), gdy ugięcie w jest przedstawione pod postacią sumy iloczynów funkcji sinus lub cosinus, całkowanie ogromnie się upraszcza, gdyż odpadają wtedy wszystkie całki**, w których występują niejednakowe harmoniczne argumentów $(\pi x/a)$ lub $(\pi y/b)$.

Zamiast funkcji trygonometrycznych można stosować również funkcje potęgowe. Tak na przykład funkcja

$$w_1 = a_1 \left(\frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

spełnia warunek $w = 0$ na wszystkich czterech krawędziach płyty prostokątnej.

* Zmiana znaku w nawiasie w porównaniu z przykładem wynika tu z przesunięcia układu współrzędnych, tj. osi y .

** Stwierdzenie powyższe jest słuszne tylko dla przypadków określonych wzorem (b). Jeśli funkcja podcałkowa jest iloczynem funkcji $\sin$ przez $\cos$, to na ogół całka nie jest równa zeru, a mianowicie:

Podobnie funkcja

$$w_2 = a_2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left(\frac{y}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{b} \right)^2,$$

poza warunkiem poprzednim spełnia również warunek, że $(\partial w / \partial x)$ i $\partial w / \partial y$ na odpowiednich brzegach są równe zeru, co odpowiada utwierdzeniu doskonałemu. Funkcje te mogą być więc użyte na równi z funkcjami trygonometrycznymi, aczkolwiek są one mniej dogodne rachunkowo zwłaszcza w przypadku, gdy założona funkcja $w(x, y)$ składa się z kilku składników.

Na zakończenie tych rozważań warto podkreślić, iż metodę energetyczną można zastosować również dla płyty o zmiennej sztywności D . W takim przypadku jedyna różnica polegać będzie na tym, że w wyrażeniu (9.24a) D jest funkcją współrzędnych x i y , natomiast wzór (9.25) zostaje bez zmiany, jak również zostaje bez zmiany cała metoda postępowania. Należy przy tym zaznaczyć, że wzór (9.24b) nie może być stosowany, gdyż w przypadku zmiennej sztywności wyrażenie

$$\iint \frac{D(x, y)}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \neq 0.$$

9.6. Niektóre wyniki rozwiązania płyt. Analiza jakościowa

Omówione w art. 9.4÷9.5 metody dają możliwość rozwiązania płyt w tych przypadkach, gdy ich kształt lub warunki obciążeń odbiegają od typowych. Z drugiej jednak strony istnieje bardzo bogata literatura specjalna i tablice, w których podane są liczbowe wyniki rozwiązań* i z których bardzo często korzysta się w praktyce. Wyniki te podane są zazwyczaj w postaci tablic współczynników, które należy wstawić do prostych wzorów, aby otrzymać interesującą konstruktora wielkość. Powstanie tych wzorów stanie się jasne, jeśli przeanalizować otrzymane poprzednio wyniki. Biorąc mianowicie za podstawę metodę rozkładu obciążeń (art. 9.4) widzimy, że amplitudy $p_{m,n}$ (wzór 9.22) zależą wyłącznie od charakteru obciążenia i stosunku a/b , nie zależą natomiast od bezwzględnych wymiarów płyty. Innymi słowy w dwóch różnych płytach o tym samym stosunku a/b ,

$$\int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m_1\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & \text{gdy } m \pm m_1 \text{ jest parzyste;} \\ \frac{a}{\pi(m^2 - m_1^2)}, & \text{gdy } m \pm m_1 \text{ jest nieparzyste;} \end{cases} \quad (c)$$

i podobnie dla funkcji y :

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n_1\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \pm n_1 \text{ jest parzyste;} \\ \frac{b}{\pi(n^2 - n_1^2)}, & \text{gdy } n \pm n_1 \text{ jest nieparzyste.} \end{cases} \quad (d)$$

* Klasyczną monografią w tym zakresie jest książka Timoszenko i Wojnowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*, Arkady 1962, w której podana jest bardzo bogata bibliografia. Przykładem tablic mogą być „Таблицы для расчета прямоугольных плит”, АНУССР, Киев 1959.

jednakowe co do charakteru obciążenie (np. obciążenie równomierne) da te same wartości amplitud $p_{m,n}$. Jeśli zatem porównujemy ugięcia dwóch różnych płyt o jednakowej wartości a/b , poddanych działaniu identycznego obciążenia, to ze wzoru (9.23) wynika, że są one proporcjonalne do 4 potęgi umownego wymiaru liniowego, np. a , a odwrotnie proporcjonalne do sześcienu grubości. Ponieważ ponadto dla metali można przyjąć $\nu = \text{const} \approx 0,3$, to ugięcie da się przedstawić wzorem

$$w = \psi \frac{p_u a^4}{E \delta^3}, \quad (9.29)$$

w którym p_u — parametr charakteryzujący obciążenie ciągle,

ψ — bezwymiarowy współczynnik zależny od charakteru obciążenia i stosunku a/b . Wartość ψ zależy przy tym od punktu, w którym mierzymy ugięcie w , tj. od współrzędnych (x/a) oraz (y/b) .

Przechodząc do analizy wyrażenia na moment zginający widzimy, że w płytach o tym samym stosunku a/b wydatki momentów nie zależą od sztywności płyty i można je przedstawić jako:

$$m_x = \eta_x p_u a^2, \quad m_y = \eta_y p_u a^2, \quad m_{xy} = \eta_{xy} p_u a^2, \quad (9.30)$$

gdzie η_x , η_y , η_{xy} — bezwymiarowe współczynniki zależne, podobnie jak ψ , od charakteru obciążenia, wielkości a/b i bezwymiarowych współrzędnych (x/a) , (y/a) punktu, w którym obliczamy wartość tych wydatków.

Tak więc w dwóch podobnych płytach podobnie obciążonych wartości wydatków momentów mają się do siebie jak kwadraty odpowiednich wymiarów liniowych.

Podobną analizę można przeprowadzić dla wydatków sił tnących t_x , t_y , otrzymując w wyniku, iż wydatki te są

$$t_x = \xi_x p_u a, \quad t_y = \xi_y p_u a. \quad (9.31)$$

Otrzymane rezultaty stosują się do przypadków, gdy obciążenie płyty jest ciągle, natomiast w przypadku działania sił skupionych P należy wziąć pod uwagę, że amplitudy $p_{m,n}$ są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu umownego wymiaru liniowego, tj.

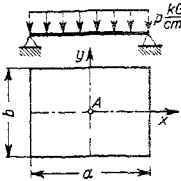
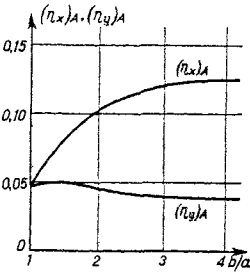
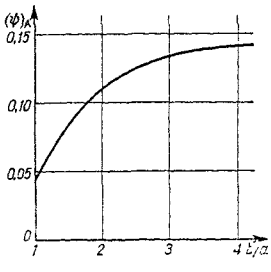
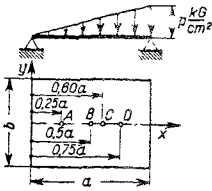
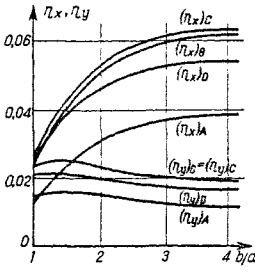
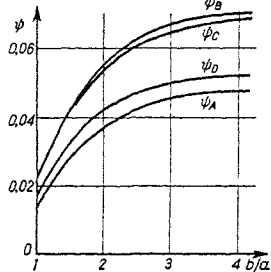
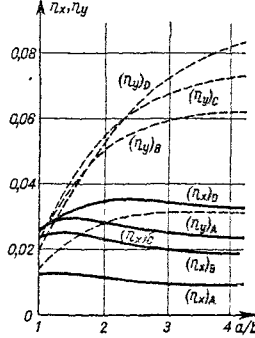
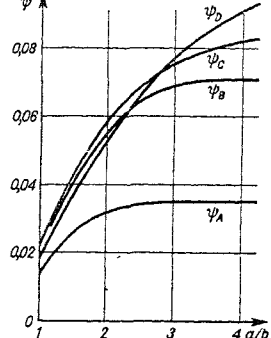
$$p_{m,n} = \chi_{m,n} P/a^2. \quad (9.32)$$

Podstawiając powyższą zależność do wzorów (9.19)÷(9.23), otrzymujemy odpowiednie wyniki. W szczególności wydatki momentów stają się proporcjonalne wyłącznie do wartości sił obciążających, nie zależą natomiast od wymiaru liniowego a . Tak więc dwie podobne płyty obciążone tymi samymi siłami skupionymi mają w odpowiadających sobie punktach jednakowe m_x , m_y , m_{xy} , niezależnie od tego, że jedna może być większa od drugiej.

Dla zastosowań praktycznych podano w tabl. 9.1 i 9.2 wartości liczbowe dla kilku spotykanych częściej przypadków obciążenia. Analizując te dane widzimy, że prawie wszystkie krzywe wykazują tendencję do osiągnięcia pewnych wartości stałych wraz ze wzrostem wartości b/a . Fakt ten stanie się jasny, jeśli zauważyć, że dla wydłużonych płyt ($b/a \geq 3$) w środkowej części płyty stan odkształceń i wewnętrznych sił niewiele

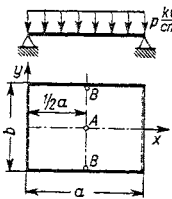
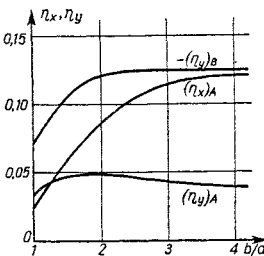
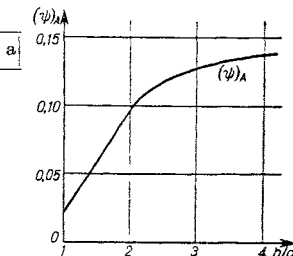
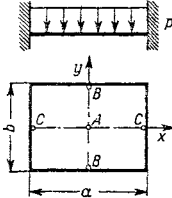
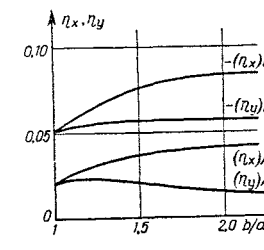
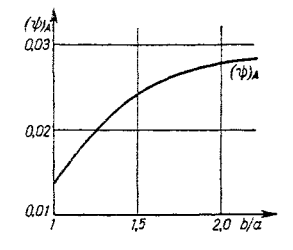
PROSTOKĄTNE PŁYTY, PODPARTE PRZEGUBOWO NA 4 BRZEGACH ($\nu = 0,3$)

Tablica 9.1

Geometria płyty i charakter obciążenia	Wydatki momentów gnących $m_x = pa^2\eta_x$; $m_y = pa^2\eta_y$	Maksymalne ugięcie $w_{\max} = \psi pa^4/E\delta^3$
 Dla przypadku $a > b$ należy zamienić oznaczenia, wstawiając b zamiast a i na odwrót		
	$b > a$ 	
W przypadku $b < a$ jako wymiar charakterystyczny przyjmuje się b, tj.: $m_x = \eta_x pb^2; \quad m_y = \eta_y pb^2$ $w = \psi pb^3/E\delta^3$	$b < a$ 	

PROSTOKĄTNE PŁYTY O RÓŻNYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH ($\nu = 0,3$)

Tablica 9.2

Geometria płyty i charakter obciążenia	Wydatki momentów gnących $m_x = pa^2\eta_x$; $m_y = pa^2\eta_y$	Maksymalne ugięcie $w = \psi pa^4/E\delta^3$
 Dla przypadku $a > b$ należy we wzorach dla ugięcia i wy- datków momentów wstawić b zamiast a $m_x = \eta_x pb^2$; $m_y = \eta_y pb^2$ $w = \psi pb^4/E\delta^3$	$b > a$ 	
	$b < a$ 	

— brzeg podparty przegubowo — brzeg idealnie utwardzony

odbiega od warunków przy cylindrycznym zgięciu płyty. Tak na przykład dla pierwszego z przypadków podanych w tabl. 9.2 mamy dla $b/a = 3$ następujące dane

$$(m_x)_A = 0,115pa^2, \quad (m_y)_A = 0,043pa^2, \quad w_{\max} = 0,126pa^4/E\delta^3,$$

podezas, gdy obliczone przy założeniu cylindrycznego zgięcia* odpowiednie wartości wynoszą $(m_x)_A = 0,125pa^2$, $(m_y)_A = 0,038pa^2$, $w_{\max} = 0,142pa^4/E\delta^3$ i jak widać są one tego samego rzędu. Uprawnia nas to do przybliżonego traktowania tych wszystkich zagadnień, w których $b/a > 3$ i w których natężenie oraz miejsce przyłożenia obciążeń

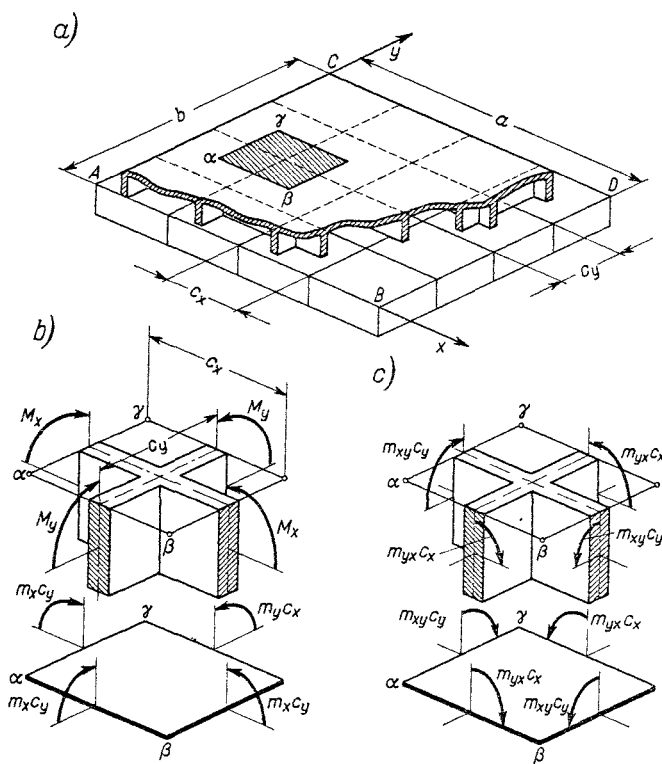
* Patrz Kurowski, Niezgodziński, Wytrzymałość materiałów, PWN 1955, str. 403.

nie zmienia się w kierunku równoległym do dłuższego boku, jako zgięcia cylindrycznego niezależnie od warunków brzegowych na krótszych bokach.

Pewne odstępstwo od powyższego stwierdzenia występuje w przypadku pokazanym jako ostatni na tabl. 9.1 (obciążenie trójkątne i $b < a$). Jest to jednak całkowicie uzasadnione, jeśli zważyć, że w tym przypadku obciążenie zmienia się wzdłuż dłuższego boku.

9.7. Płyty gęsto żebrowane

W zastosowaniach technicznych zrealizowanie większego zespołu w postaci płyty izotropowej jest, pomijając konstrukcje warstwowe, nieekonomiczne z uwagi na ciężar konstrukcji, gdyż materiał płyty znajdujący się w pobliżu warstwy obojętnej jest niewykorzystany. Z tego powodu często sto-



Rys. 9.12. Płyta żebrowana i jej zastępczy schemat statyczny

sujemy płyty żebrowane (rys. 9.12), w których żebra wzmacniające konstrukcję są najczęściej względem siebie prostopadłe i równoległe do odpowiednich boków płyty. Jeśli przy tym podziałki żebrowania c_x i c_y są małe w porównaniu do gabarytowych wymiarów płyty a i b , np. $c_x = 0,1a$, $c_y = 0,1b$, to traktując konstrukcję makroskopowo możemy ją zastąpić w przybliżeniu jednorodną płytą. W płycie takiej

sztywności na zginanie są w różnych kierunkach różne z uwagi na niejednakową na ogół sztywność żeber wzdłużnych i poprzecznych, jak również z uwagi na niejednakową na ogół podziałkę c_x , c_y .

Rozpatrzymy z początku uproszczoną konstrukcję rusztu zbudowanego z samych tylko żeberek bez pokrycia. Wprowadzając zastępczą jednorodną płytę (rys. 9.12b), przyrównujemy sumaryczny moment $m_x c_y$, działający w takiej zastępczej płycie na długość podziałki c_y , do rzeczywistego momentu zginającego belkę podłużną rusztu, tj. M_x . Ten ostatni związany jest z krzywizną podłużnej belki, tj. $(\partial^2 w / \partial x^2)$, równaniem

$$M_x = -EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

w którym EJ_x — sztywność podłużnej belki rusztu na zginanie.

W wyniku dla zastępczej jednorodnej płyty mamy:

$$m_x = -\frac{EJ_x}{c_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (9.33a)$$

jako odpowiednik zależności (9.3a) dla płyty izotropowej. Podobnie wyprowadzamy pozostałe wzory:

$$m_y = -\frac{EJ_y}{c_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad m_{xy} = -\frac{C_x}{c_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad m_{yx} = -\frac{C_y}{c_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (9.33b)$$

jako odpowiedniki zależności (9.3b, c). We wzorach tych C_x i C_y są sztywnościami na swobodne skręcanie (w kGcm²) podłużnych (C_x) i poprzecznych (C_y) belek rusztu (art. 6.3).

Aby teraz ułożyć zasadnicze równanie różniczkowe, zauważmy, iż w zastępczej płycie równanie (9.7) pozostaje bez zmian. Podstawiając do niego wzory (9.33), otrzymujemy po przekształceniach zamiast (9.8) zależność

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p, \quad (9.34)$$

w której D_x , D_y i H wyrażają się wzorami

$$D_x = \frac{EJ_x}{c_y}, \quad D_y = \frac{EJ_y}{c_x}, \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{C_x}{c_y} + \frac{C_y}{c_x} \right) \quad (9.35)$$

stanowiącymi odpowiedniki wzoru (9.4a) dla płyty izotropowej.

Podkreślając analogie między rusztem żebrowym a płytą, nie należy zapominać o różnicach. Pierwsza najbardziej istotna jest ta, iż na ogół $m_{xy} \neq m_{yx}$. Druga wynika z porównania wzorów (9.3) i (9.33a) i polega na braku w (9.33a) członu $\nu(\partial^2 w / \partial y^2)$. Wynika to z faktu, iż włókna belek wzdłużnych rusztu z wyjątkiem miejsca skrzyżowania belek mogą się swobodnie zwaćzać lub rozszerzać w kierunku poprzecznym. W miejscu skrzyżowania zachodzi co prawda pewien wpływ zwężenia poprzecznego włókien podłużnej belki, jest on jednak trudny do ilościowego ujęcia i dlatego z reguły pomijamy go.

W przypadku płyt żebrowanych jednostronnie krytych, wpływ pokrycia uwzględniamy obliczając moment bezwładności żeberek J_x lub J_y , tak jak gdyby pas pokrycia o szerokości c_y względnie c_x stanowił półkę odpowiedniego żebra.

Od rozpatrywanego przypadku płyt żebrowanych w dwóch kierunkach łatwo przejść do przypadku płyt żebrowanych jednokierunkowo, np. w kierunku osi y (rys. 9.13). Pomijając współdziałanie poprzeczne przy zginaniu, tj. zakładając słuszność wzorów (9.33), określamy w takim przypadku sztywność D_x , D_y i H ze wzorów

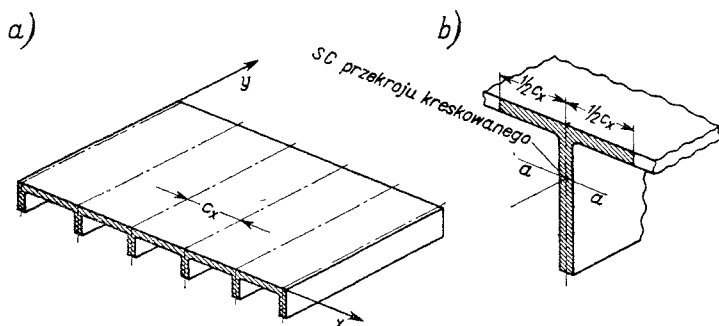
$$D_x = \frac{E\delta^3}{12}, \quad D_y = \frac{EJ_y}{c_x}, \quad H = \frac{G\delta^3}{6} + \frac{C_y}{2c_x}, \quad (9.36)$$

w których J_y jest momentem bezwładności żebra z przynależnym do niego pasem pokrycia o szerokości c_x , C_y jest sztywnością na swobodne skręcanie samego tylko żebra. To ostatnie stwierdzenie wynika stąd, że sztywność na skręcanie pokrycia została już uwzględniona w pierwszym składniku.

W przypadku blachy falistej można ją makroskopowo potraktować jako płytę żebrowaną jednokierunkowo. Jeśli fale biegną w kierunku osi y (rys. 9.14), to sztywności D_x , D_y i H , wchodzące do równania (9.34), określone są następująco:

$$D_x = \frac{E\delta^3}{12} \frac{c_x}{s}, \quad D_y = \frac{EJ_y}{c_x}, \quad H = \frac{G\delta^3}{12} \left(\frac{s}{c_x} + \frac{c_x}{s} \right), \quad (9.37)$$

gdzie J_y — moment bezwładności przekroju fali, a pozostałe oznaczenia są widoczne bezpośrednio z rysunku. Występujący w tych wzorach stosunek (s/c_x) wynika stąd, że w tym stosunku zwiększa się

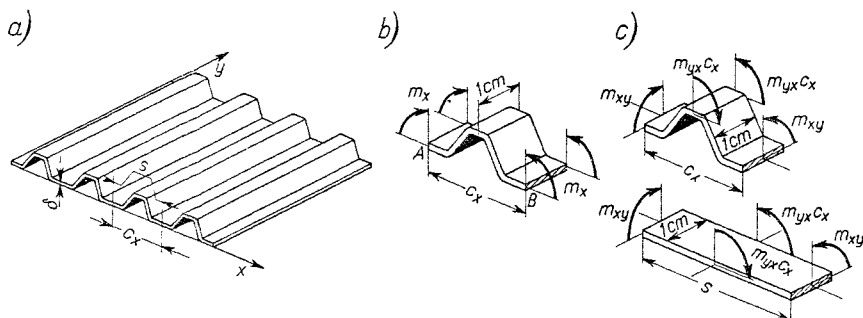


Rys. 9.13. Płyta żebrowana jednokierunkowo
 J_y — moment bezwładności przekroju kreskowanego względem osi $a-a$.

lub zmniejsza odpowiednią sztywność. Tak na przykład przy zginaniu jednostkowego paska (rys. 9.14b) momentami m_x , są one stałe w każdym przekroju równoległym do osi y , wobec czego kąt obrotu przekroju B względem A określa się jak dla belki o sztywności $(E\delta^3/12)$ i długości s , tj.

$$\vartheta = 12m_x s / E\delta^3,$$

a po uwzględnieniu wzoru (9.33a) i pierwszego ze wzorów (9.35) z których wynika $\vartheta = (\partial^2 w / \partial x^2) c_x = m_x c_x / D$, otrzymujemy z przyrównania pierwszy ze wzorów (9.37). Podobnie określamy sztywność H przy działaniu na jednostkowy pasek momentów m_{xy} i $m_{yx} c_x$ (rys. 9.14c).

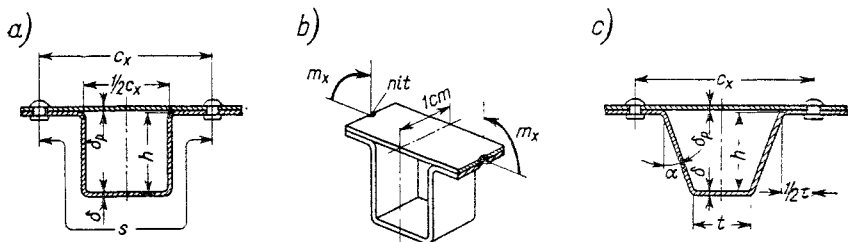


Rys. 9.14. Blacha falista jako płyta żebrowana
b) określenie sztywności D_x ; c) określenie sztywności przy działaniu m_{xy} i m_{yx} .

Wreszcie w przypadku blachy falistej, wzmocnionej jednostronnie pokryciem, odpowiednie znaczenia sztywności D_x , D_y , H otrzymamy, rozpatrując odkształcenia paska o jednostkowej szerokości

(rys. 9.15). Przy działaniu momentów m_x traktujemy rozpatrywany pasek jako jednoobwodową ramę (rys. 9.15b), której rozwiązanie* daje wynik

$$D_x = \frac{E\delta_p^3}{12} \left[1 + \frac{c_x}{s} \left(\frac{\delta}{\delta_p} \right)^3 \frac{2-\psi}{1-\psi} \right]. \quad (9.38a)$$



Rys. 9.15. Oznaczenia dla blachy falistej jednostronnie krytej

We wzorze tym $s = c_x + 2h$ jest całkowitą długością łuku fali odpowiadającą podziałce c_x , $\psi = 4b/3s$ — bezwymiarowym współczynnikiem. Analogicznie obliczone pozostałe sztywności są

$$D_y = \frac{EJ_y}{c_x}, \quad H = \frac{2GF^2}{c_x p}, \quad (9.38b)$$

w których $p = (c_x/\delta_p) + (s/\delta)$ jest bezwymiarowym obwodem rury utworzonej przez pokrycie i jedną falę. J_y jest momentem bezwładności przekroju tejże rury względem osi przechodzącej przez środek ciężkości tej rury, F — polem ograniczonym konturem tejże rury**.

Przeprowadzone dotychczas rozważania koncentrowały się na wyznaczeniu wartości wyjściowych w równaniu (9.34). Przechodząc z kolei do samego rozwiązania tego równania stwierdzimy na początku, że metody rozwiązania pozostają te same co i omówione w art. 9.4 i 9.5. Jeśli na przykład prostokątna żebrowana płyta obciążona ciśnieniem $p_0 = \text{const}$ ma cztery brzozy przegubowo podparte, to zakładając rozwiązanie jako sumę członów (9.17a) otrzymujemy, po rozłożeniu $p(x, y) = p_0 = \text{const}$ na szereg Fouriera według wzoru (9.22) (patrz również przykład art. 9.4), następujące wyrażenie dla amplitudy $w_{m,n}$

$$w_{m,n} = 16p_0 a^4 / \pi^2 m n D_x B_{m,n}^* \quad (m = 1, 3, \dots, n = 1, 3, \dots),$$

w którym bezwymiarowa wielkość $B_{m,n}^*$

$$B_{m,n}^* = \pi^4 [m^4 + 2m^2 n^2 (Ha^2/D_x b^2) + n^4 (D_y a^4/D_x b^4)].$$

Ostateczny wynik dla ugięcia w ma postać

$$w = \frac{16p_0 a^4}{\pi^2 D_x} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{m n B_{m,n}^*} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

która przechodzi we wzór (b) z art. 9.4, jeśli płyta jest izotropowa ($D_x = D_y = H = D$).

Zastosowanie metody energetycznej (art. 9.5) do płyt żebrowanych wymaga tylko odpowiedniej modyfikacji wzoru (9.24), przy zostawieniu bez zmian wszystkich innych wzorów jak (9.25) ÷ (9.27).

* Wzór (9.63a) słuszny jest tylko dla fali prostokątnej. Dla fali trapezowej (rys. 9.15c)

$$D_x = \frac{E\delta_p^3}{12} \left[1 + \frac{c_x}{s} \left(\frac{\delta}{\delta_p} \right)^3 \frac{2-\psi}{1-\psi} \right],$$

przy czym $s = 2l + (2h/\cos \alpha)$, $\psi = 4h/3s \cos \alpha$.

** Tak na przykład dla fali prostokątnej (rys. 9.16a) $F \approx 0,5hc_x$.

W tym celu podstawiając zależności (9.33) do podstawowego wzoru, określającego elementarną energię dV :

$$dV = -\frac{1}{2} \left(m_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + m_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + m_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) dx dy,$$

otrzymujemy elementarną energię wyrażoną przez sztywność D_x , D_y i H i ugięcie w . Po scałkowaniu tego wyrażenia na całej powierzchni płyty mamy ostatecznie

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (9.39)$$

jako wyrażenie dla płyt zebrowanych stanowiące odpowiednik wzorów (9.24) dla płyt izotropowych.

Wyznaczwszy jedną lub drugą metodą powierzchnię ugięcia $w(x, y)$ przechodzimy z kolei do określenia naprężeń. W tym celu obliczamy najpierw w poszczególnych punktach płyty według wzorów (9.33) momenty (w kGcm):

$$m_{xcy}, \quad m_{ycx}, \quad m_{xycy}, \quad m_{yxcx},$$

a następnie według zwykłych wzorów znanych z kursu Wytrzymałości Materiałów bądź z art. 6.3 wyznaczamy naprężenia, traktując odpowiednie odcinki płyty o szerokościach c_x lub c_y jako belki.

9.8. Zadania

1. Ugięcie duralowej prostokątnej płyty (rys. 9.1a) wyraża się wzorem $w(xy) = w_0(x/a)[1 - (x/a)] \times \times (y/b)^2[1 - (y/b)^2]$. Wyznaczyć $(\sigma_x)_{ekstr}$, $(\sigma_y)_{ekstr}$, τ_{ekstr} w punktach $(x = a/2, y = b/4)$, $(x = a/2, y = b/2)$, $(x = 0, y = b/2)$, jeśli $a = 20$ cm, $b = 40$ cm, $\delta = 4$ mm, $w_0 = 12,8$ cm, $E = 7,2 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu = 0,35$.

2. Warstwowa płyta (rys. 9.4a) zbudowana jest z jednakowych okładzin duralowych ($E_1 = 7,2 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu_1 = 0,35$, $\delta_1 = 0,8$ mm) i środkowej warstwy ($E_2 = 5 \cdot 10^3$ kG/cm², $\nu_2 = 0,25$, $\delta_2 = 12$ mm). W badanym punkcie płyty przyjętym za początek układu osi x, y ugięcie jest

$$w = \kappa_1 x^2 + \kappa_2 xy + \kappa_3 y^2.$$

Obliczyć naprężenia w okładzinach i warstwie środkowej, jeśli $\kappa_1 = 2\kappa_2 = 0,5\kappa_3 = 1 \cdot 10^{-3}$ cm⁻¹.

3. Element jednorodnej płyty (rys. 9.3) o grubości $\delta = 1$ cm obciążony jest wydatkami momentów $m_x = 160$ kGcm/cm, $m_y = -80$ kGcm/cm, $m_{xy} = 90$ kGcm/cm. Wyznaczyć $(\sigma_x)_{ekstr}$, $(\sigma_y)_{ekstr}$, τ_{ekstr} . Przyjmując jako kryterium wyężenia hipotezę Hubera wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa w tym elemencie, jeśli $Q_r = 2400$ kG/cm².

4. W elemencie z zadania poprzedniego przeprowadzono przekrój płaszczyzną równoległą do osi z a prostopadłą do płaszczyzny xy w ten sposób, że normalna zewnętrzna do tego przekroju tworzy z osią x kąt 30° , a z osią y kąt 60° . Wyznaczyć wydatek momentu gnącego i skręcającego w tym przekroju.

Wskazówka. Udowodnić, że wydatki momentów zmieniają się tak, jak podaje wykres koła Mohra.

5. Pomierzone na zewnętrznej powierzchni płyty naprężenia są $\sigma_x = -1000$ kG/cm², $\sigma_y = 600$ kG/cm², $\tau = 600$ kG/cm². Wyznaczyć promienie krzywizny ϱ_x i ϱ_y , jeśli $E = 2 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu = 0,25$, $\delta = 1$ cm.

6. Do duralowej blachy ($E_1 = 7,2 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu_1 = 0,35$, $\delta_1 = 1$ mm) przyklejono drugą warstwę ($E_2 = 4,2 \cdot 10^3$ kG/cm², $\nu_2 = 0,25$, $\delta_2 = 15$ mm). Określić sztywność D takiej dwuwarstwowej płyty i grubość, równoważnej jej pod względem sztywności, jednorodnej płyty duralowej. Zakładając ciężary właściwe $\gamma_1 = 2,7$, $\gamma_2 = 0,15$, porównać ciężary jednostkowe obu tych rozwiązań.

7. Jakie obciążenie $p(x, y)$ jest potrzebne do wywołania ugięcia płyty (zad. 1)? Jakie warunki brzegowe spełnia ta płyta na brzegach $x = 0$, $x = a$, a jakie na brzegach $y = 0$ i $y = b$.

8. Powierzchnia ugięcia prostokątnej jednorodnej płyty o sztywności $D = 4 \cdot 10^3$ kGcm²/cm = = const przedstawia się jako

$$w(x, y) = w_1 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) + w_2 \sin^2(\pi x/a) \sin^2(\pi y/b).$$

Wyznaczyć obciążenie $p(x, y)$, które wywołało to ugięcie, jeśli $a = 40$ cm, $b = 80$ cm, $w_1 = 0,2$ cm, $w_2 = 0,25$ cm.

9. W płycie (zad. 8) wyznaczyć wartości wydatków v_x i v_y na brzegach $x = 0$, $y = 0$. Wyznaczyć wartości siły skupionej w narożu ($x = 0$, $y = b$).

10. Na podpartym ($w = 0$) brzegu $x = \text{const}$ płyty sformułować drugi warunek brzegowy wyrażający takie utwierdzenie tego brzegu, żeby wydatek momentu gnącego oddziałującego na płytę był proporcjonalny do kąta obrotu w danym punkcie tego brzegu.

11. Prostokątna płyta (rys. 9.9a) obciążona jest na całej swej powierzchni ciśnieniem $p(x, y) = p_0(x/a)$. Przedstawić to obciążenie pod postacią szeregu prostych obciążeń (wzór 9.17c). Zakładając $a = b$, wyznaczyć ugięcie płyty w punkcie $x = 2a/3$, $y = a/2$.

12. Rozwiązać zad. 11 metodą energetyczną zakładając, że $w = w_{1,1} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) + w_{2,1} \sin(2\pi x/a) \sin(\pi y/b)$. W szczególności dla płyty kwadratowej $a = b$ obliczyć ugięcie w punkcie $x = 2a/3$, $y = a/2$ i porównać z wynikiem zad. 11.

13. Prostokątna płyta obciążona równomiernym ciśnieniem (rys. 9.11) została utwierdzona na wszystkich czterech brzegach. Zakładając powierzchnię ugięcia w postaci

$$w = w_1 \sin^2(\pi x/a) \cos^2(\pi y/b),$$

sprawdzić spełnienie warunków brzegowych, wyznaczyć ugięcie oraz wydatki momentów gnących w środku płyty. Zakładając $a = 2b$ porównać otrzymany wynik z podanym w tabl. 9.2.

14. Powtórzyć zad. 13 przy obciążeniu płyty siłą skupioną P przyłożoną w środku płyty.

15. Ruszt (rys. 9.13b) wykonano z krzyżujących się rur stalowych ($E = 2,1 \cdot 10^8$ kG/cm²) o prostokątnym przekroju. Wymiary poprzecznego przekroju rur są $b_1 = 4$ cm, $h_1 = 6$ cm, grubość ścianki rury $\delta = 1,5$ mm; przy czym rury ustawione są tak, iż wymiar h_1 jest prostopadły do płaszczyzny xy . Zakładając podziałki $c_x = 30$ cm, $c_y = 40$ cm, wyznaczyć zastępcze sztywności D_x , D_y , H tego rusztu.

16. Jak zmienia się sztywności rusztu (zad. 15), jeśli pokryto go dodatkowo blachą stalową o grubości $\delta = 2$ mm (rys. 9.13a).

17. Ruszt (zad. 16) ma gabarytowe wymiary $a = 1,5$ m, $b = 2$ m, podparty jest na czterech brzegach i obciążony równomiernie rozłożonym obciążeniem $p = 300$ kG/m². Metodą energetyczną wyznaczyć ugięcie pośrodku płyty stosując najprostsze podstawienie.

$$w = w_{1,1} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b).$$

18. Wyznaczyć naprężenia w środku płyty z zad. 17.

CZĘŚĆ TRZECIA

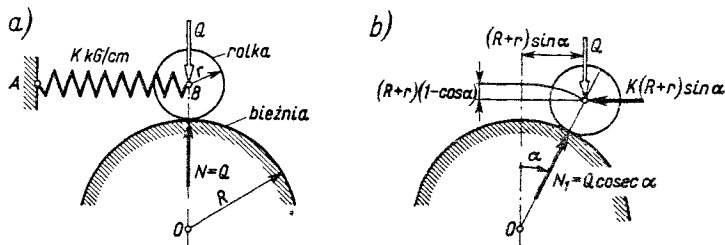
ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

10. STATECZNOŚĆ KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

10.1. Wstęp. Podstawowe reguły i metody

Wszystkie omawiane w części I i II zagadnienia statyki konstrukcji przeprowadzano przy milczącym założeniu, że postać równowagi każdego elementu jest przy danych, rzeczywistych obciążeniach taka sama jak i w przypadku, gdy te obciążenia są oliskie zera. Jak już jednak wiadomo z kursu Wytrzymałości Materiałów, ściskany pierwotnie prosty pręt przy pewnej wartości siły ściskającej tzw. *wartości krytycznej*, przechodzi z tej postaci równowagi, przy której oś pręta jest prosta, w drugą postać równowagi trwałej, przy której oś pręta staje się wygięta. To samo zjawisko przejścia z jednej postaci równowagi w drugą, tzw. *utrata stateczności*, pojawia się i w innych konstrukcjach, a zwłaszcza w tych, w których jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu do pozostałych. Ponieważ przy utracie stateczności powstają poza zasadniczymi naprężeniami, odpowiadającymi pierwotnej postaci równowagi, również naprężenia dodatkowe z reguły bardzo duże i prowadzące na ogół* do zniszczenia konstrukcji, umiejętność wyznaczania krytycznych wartości obciążeń jest sprawą zasadniczą.

W celu przypomnienia niektórych podstawowych pojęć z dziedziny stateczności rozpatrzmy układ (rys. 10.1), w którym rolka o ciężarze Q przytrzymana sprężyną o sztyw-



Rys. 10.1 Przykład analizy stateczności układu

ności K może toczyć się bez tarcia po cylindrycznej biegni o promieniu R . Zakładamy przy tym, iż w pierwotnym położeniu (rys. 10.1a) sprężyna jest nienapięta, a równowagę rolki zapewnia reakcja biegni $N = Q$. Punktem wyjścia wszystkich rozważań z dziedziny stateczności konstrukcji jest analiza zachowania się ustroju wychylonego z położenia równowagi, przy jednoczesnym uwzględnieniu towarzyszących temu wychyleniu zmian

* Przypadki odmiennego zachowania się ustrojów omówiono w rozdz. 12.

wartości, kierunku i charakteru* sił. Jeśli mianowicie wychylimy rolkę z położenia pierwotnej równowagi (rys. 10.1b), to przy rozpatrywaniu zagadnienia jej stateczności musimy uwzględnić zmianę wartości i kierunku siły pierwotnej N oraz pojawienie się siły w pierwotnie nienapiętej sprężynie. Rozpatrując na razie tylko małe wychylenia widzimy, że w kierunku poziomym powstaje skierowana na prawo siła

$$Q \operatorname{tg} \alpha - K(R+r) \sin \alpha \approx [Q - K(R+r)] \alpha, \quad (a)$$

której znak zależy od tego czy $K(R+r)$ jest większe, mniejsze czy równe Q . W przypadku pierwszym siła wypadkowa jest skierowana nie na prawo lecz na lewo i dąży do przywrócenia pierwotnego stanu. Mówimy wtedy, iż pierwotny stan równowagi jest stanem równowagi trwałej albo inaczej, iż układ jest stateczny. W przypadku drugim wypadkowa siła pozioma daje tendencję do powiększania się założonego wychylenia i mówimy wtedy, iż układ jest niestateczny. Wreszcie w przypadku trzecim, gdy $Q = K(R+r)$ istnieje równowaga układu w postaci wychylonej i mówimy wtedy, że pierwotny stan układu jest stanem równowagi obojętnej. Jak widać ten ostatni stan rozdziela grupę stanów równowagi trwałej, gdy $Q < K(R+r)$, od nietrwałej, gdy $Q > K(R+r)$, a odpowiadające mu obciążenie

$$Q_{kr} = K(R+r) \quad (b)$$

nazwane jest *obciążeniem krytycznym*.

Podsumowując te wyniki, formułujemy pierwszą podstawową regułę: *Określenie stateczności ustroju sprowadza się do wyznaczenia krytycznej wartości obciążeń, przy której wychylony z położenia pierwotnej równowagi układ zachowuje nadal równowagę, pomimo towarzyszących temu wychyleniu zmian w wartościach, kierunku działania i charakterze sił wewnętrznych i zewnętrznych.*

Na podstawie tej reguły, jak również rozpatrzonego przykładu, sprecyzujemy kolejne etapy rozwiązywania zagadnień stateczności. Etapy te są następujące:

a) określenie stanu równowagi pierwotnej (postać odkształceń, charakter i wartości wszystkich sił wewnętrznych i zewnętrznych);

b) określenie wychylenia ustroju z pierwotnej równowagi z jednoczesnym określeniem zmian jakie to wychylenie pociąga w wartościach, kierunku i charakterze wszystkich sił wewnętrznych i zewnętrznych;

c) sformułowanie i rozwiązanie warunku równowagi ustroju w stanie wychylonym oraz dyskusja wyników.

Opisana metoda badania stateczności nazywana w skrócie *metodą analizy równowagi* nie jest bynajmniej jedyna. Jako drugą metodę opiszemy tzw. *metodę energetyczną*. W tym celu wyznaczmy zmianę pełnej energii potencjalnej układu (rys. 10.1), odpowiadającą wychyleniu układu z pierwotnego położenia równowagi przy uwzględnieniu tych wszystkich zmian sił wewnętrznych i zewnętrznych, jakie to wychylenie za sobą pociąga. Zmiana energii potencjalnej ciężaru Q jest

$$-Q(R+r)(1 - \cos \alpha) \approx -Q(R+r) \alpha^2/2,$$

* Jest to najbardziej istotna różnica między zagadnieniami statyki i stateczności (patrz art. 1.1 i rys. 1.1).

podczas, gdy w sprężynie pojawia się energia $K(R+r)^2 \sin^2 \alpha/2 \approx K(R+r)a^2/2$. Zakładając dodatkowo nieodkształcalność rolki i podłoża, otrzymujemy zmianę pełnej energii potencjalnej ΔII ,

$$\Delta II \approx [-Q(R+r)a^2/2] + [K(R+r)^2 a^2/2] = [-Q + K(R+r)](R+r)(a^2/2), \quad (c)$$

której znak zależy od znaku wyrażenia

$$-Q + K(R+r). \quad (d)$$

Jeśli wyrażenie (d) jest dodatnie, to oznacza, iż wychyleniu rolki z położenia pierwotnej równowagi towarzyszy wzrost energii układu. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy jakieś obce siły zewnętrzne wykonają odpowiednią pracę $\Delta L = \Delta II$. Jeśli tych obcych sił nie ma, to układ sam z siebie nie ma tendencji do przejścia w stan wychylony. Innymi słowy warunek $\Delta II > 0$ jest równoznaczny ze stanem równowagi trwałej. Jeśli z kolei przypuścimy, że wyrażenie (d) jest ujemne, a więc $\Delta II < 0$, to każde najmniejsze wychylenie powoduje oddawanie energii na zewnątrz przejawiające się w ruchu układu i jego tendencji do przejścia w położenie inne niż pierwotne. Jeśli więc $\Delta II < 0$, to układ jest niestateczny. Wreszcie w przypadku

$$\Delta II = 0 \quad (10.1)$$

mamy stan równowagi obojętnej, w którym układ wychylony z położenia równowagi nie ma tendencji ani do zmniejszenia, ani do zwiększenia tego wychylenia. Odpowiadające warunkowi (10.1) obciążenie Q jest obciążeniem krytycznym Q_{kr} i jak widzimy, wartość jego jest identyczna z wartością (b) otrzymaną metodą analizy równowagi.

Podsumowując te wyniki formułujemy drugą podstawową regułę: *Określenie obciążeń krytycznych metodą energetyczną sprowadza się do wyznaczenia ich z warunku $\Delta II = 0$, w którym przyrost ΔII określony jest z uwzględnieniem zmian jakie w charakterze wartości i kierunku sił wewnętrznych i zewnętrznych wywołuje wychylenie układu z położenia pierwotnej równowagi.*

Etapy postępowania przy rozwiązywaniu zagadnień metodą energetyczną są identyczne z etapami przy metodzie analizy równowagi. Jedyna różnica pojawia się w etapie c), w którym zamiast formułować warunek równowagi określamy zmianę ΔII i przyrównujemy ją do zera.

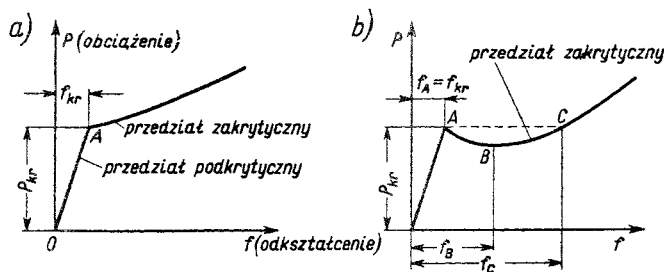
Omawiając stateczność konstrukcji (rys. 10.1), jako podstawowe założenie przyjęliśmy, że wychylenie układu jest małe (teoretycznie nieskończenie małe). Zasadniczym powodem tego jest chęć usunięcia komplikacji natury nie tylko rachunkowej, lecz i pojęciowej. Jeśliby bowiem rozpatrywać stateczność układu (rys. 10.1) przy skończonych wychyleniach, to należałoby uwzględnić, iż wydłużenie sprężyny nie jest $(R+r)a$ lecz wyraża się w sposób bardziej złożony z powodu skończonej długości samej sprężyny. Ponadto kierunek oddziaływania sprężyny ulega pewnej zmianie. Wreszcie przy skończonych odkształceniach sama sprężyna przestaje być ustrojem liniowym i siła w niej nie wzrasta proporcjonalnie do jej wydłużenia. Z tych trzech faktów dwa pierwsze wnoszą pewne komplikacje natury rachunkowej, ostatni natomiast komplikację natury pojęciowej (nie-liniowość elementu). Te wszystkie komplikacje odpadają, jeśli rozpatrujemy małe wychylenia, gdyż wszystkie te wymienione powyżej korekty są małymi wyższego rzędu w porównaniu z zasadniczym członem, który jest małą pierwszego rzędu.

Analizując dalej wyrażenie (a), widzimy, iż wchodzi doń dwa różne składniki. Pierwszy z nich $Q \operatorname{tg} \alpha \approx Q \alpha$ jest rzutem na oś poziomą siły $N_1 = Q \operatorname{cosec} \alpha$ i wynika ze zmiany jej kierunku towarzyszącej wychyleniu. Zauważmy przy tym, iż zmiana z siły $N = Q$ odpowiadającej stanowi równowagi pierwotnej na wartość N_1 jest małą wyższego rzędu. Tak więc przy ograniczeniu się do rozpatrywania małych wychyleń składnik pierwszy tj. $Q \alpha$, można traktować tak, jak gdyby siła N istniejąca już w stanie równowagi pierwotnej uległa tylko zmianie kierunku bez zmiany wartości. Drugi składnik, tj. siła $K(R+r) \sin \alpha \approx K(R+r) \alpha$ pojawia się w wyniku samego wychylenia, w stanie natomiast pierwotnej równowagi siła ta jest równa zeru. Ponadto siła ta z dokładnością do małych wyższego rzędu ma taki kierunek, jaki miałyby w stanie niewychylonym. Nazywając dla odróżnienia siły N i Q istniejące już w stanie pierwotnym *siłami podstawowymi*, a wszystkie pozostałe *siłami dodatkowymi* możemy poprzednie rozważania ująć w następującą trzecią podstawową regułę.

Przy ograniczeniu analizy stateczności do tzw. małych wychyleń, warunek równowagi ustroju w stanie wychylonym można formułować zakładając, że siły podstawowe (wewnętrzne i zewnętrzne) nie zmieniają swej wartości (lecz tylko kierunek), a siły dodatkowe (wewnętrzne i zewnętrzne) mają ten kierunek, któryby miały w stanie niewychylonym.

Wprowadzając w analizie stateczności ustrojów ograniczenie małych wychyleń, musimy zdać sobie sprawę z konsekwencji, jakie to ograniczenie pociąga za sobą. Z dokładniejszej analizy wynika, iż to ograniczenie nie ma wpływu w odniesieniu do wartości krytycznych obciążeń. Innymi słowy wartości obciążeń krytycznych określone przy tym ograniczeniu i bez tego ograniczenia są takie same. Istotna natomiast różnica pojawia się dopiero w analizie zachowania się konstrukcji po utracie stateczności, tj. przy obciążeniach większych od krytycznego.

Wprowadzone ograniczenie małych wychyleń nie pozwala dać jednoznacznej odpowiedzi, jak będzie zachowywać się układ w tych tzw. warunkach zakrytycznych i prawidłową odpowiedź daje analiza tzw. dużych odkształceń, odrzucająca to ograniczenie. Z praktycznego punktu widzenia to stwierdzenie jest bardzo ważne. Okazuje się bowiem, że utrata stateczności przedstawiona w postaci wykresu ob-



Rys. 10.2. Typowe charakterystyki ustrojów wykazujących utratę stateczności
 a) ustrój bez przeskoku; b) ustrój z przeskokiem.

ciążenie-odkształcenie (rys. 10.2) może mieć jedną z dwóch postaci. Pierwsza z nich (rys. 10.2a) odznacza się tym, iż po przekroczeniu obciążenia krytycznego $dP/df > 0$, druga natomiast charakteryzuje się tym, iż początkowa siła spada i dopiero po osiągnięciu punktu B zaczyna się wzrost siły ($dP/df > 0$). Ustroje o charakterystyce pierwszego typu (rys. 10.2a) przechodzą utratę stateczności w sposób łagodny. Inaczej przedstawia się zachowanie ustroju o charakterystyce drugiego typu (rys. 10.2b), w którym nieznaczne nawet przekroczenie P_{kr} powoduje przeskok odkształceń z f_A na f_C . Temu przeskokowi

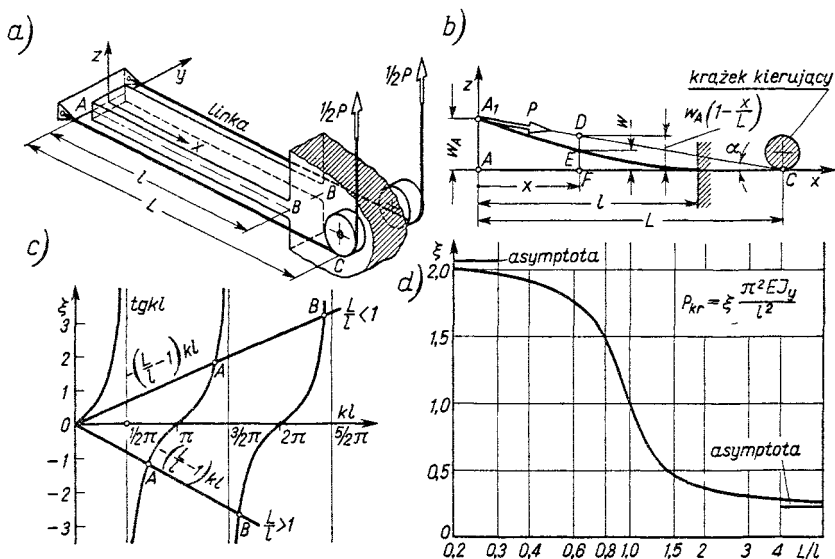
towarzyszają zjawiska dynamiczne prowadzące często do zniszczenia ustroju. Na tym tle jasne staje się, iż analizę stateczności należałoby prowadzić w oparciu o teorię dużych odkształceń. Jeśli jednak tego na ogół nie czynimy, to dlatego, iż analiza dużych odkształceń prowadzi do ogromnych komplikacji rachunkowych. Aby przy tym ostrzec konstruktora przed możliwością wystąpienia zjawisk przeskoku, w odpowiednich miejscach podane będą dodatkowo informacje.

Na zakończenie sformułujemy ostatnią (czwartą) podstawową regułę określającą rząd wielkości ΔII , a mianowicie: *Przy ograniczeniu analizy stateczności do małych wychyleń z położenia pierwotnej równowagi, zmiana pełnej energii potencjalnej jest kwadratową funkcją parametrów charakteryzujących to wychylenie, a więc jest małą drugiego rzędu.*

Przeprowadzenie odpowiedniego rozumowania na przykładzie rozpatrzonej konstrukcji (rys. 10.1) zostawia się czytelnikowi.

10.2. Przykłady rozwiązania zagadnień stateczności

Opisane w art. 10.1 podstawowe reguły i metody rozwiązań zagadnień stateczności objaśnimy na nieco bardziej złożonych przykładach niż rozpatrzony poprzednio (rys. 10.1). Jako pierwszy przykład zbadamy metodą analizy równowagi stateczność jednostronnie



Rys. 10.3. Analiza równowagi w stanie odkształconym

Linia A_1E — oś pręta AB w stanie odkształconym. Siła P na skutek przerzucenia linek przez krążki C przechodzi stale przez punkt C (rys. b).

utwierdzonego pręta obciążonego na ściskanie za pośrednictwem dwóch równoległych linek przechodzących przez stałe krążki i przyczepionych do pryzmatu na swobodnym końcu pręta (rys. 10.3a).

Rozwiązanie rozpoczynamy od stwierdzenia, że w stanie pierwotnej równowagi pręt jest prosty. Siłami stanu podstawowego jest obciążenie zewnętrzne P oraz wewnętrzna siła ściskająca $N = P$, stała na całej długości pręta. W ten sposób zostaje zakończony etap (a) (art. 10.1).

Opierając się na wynikach doświadczeń i codziennej praktyki mówiących, iż ściskane pręty mogą przy pewnej wartości obciążenia przejść z pierwotnej równowagi w postaci prostej w drugą postać wygiętą, zakładamy, iż naszym wychyleniem będzie małe ugięcie w w płaszczyźnie xz pręta (rys. 10.3b). Jedyna różnica w porównaniu do poprzedniego przykładu (rys. 10.1) polega na tym, iż obecnie wychylenie w jest funkcją x , a nie jedyną wielkością geometryczną, jaką był kąt α . Nie utrudnia to jednak wyznaczenia sił wewnętrznych i zewnętrznych w tym stanie wychylonym. Układ sił podstawowych stanowią nadal obciążenie siłą P i siły wewnętrzne $N = P$, z tym tylko, iż siła P na skutek przerzucenia linek przez krążki C zmienia swój kierunek (patrz reguła III art. 10.1). Siłami dodatkowymi wynikającymi z wychylenia w są siła tnąca T i moment gnący M_g . Ich wartości

$$T = EJ_y w''', \quad M_g = EJ_y w'' \quad (a)$$

wyrażone są w oparciu o zależności znane z kursu Wytrzymałości Materiałów, przy czym traktujemy wychylenie w jako dane. Na tym kończy się etap (b) rozwiązania.

Przystępując do ostatniego etapu (c) musimy dla każdego elementu pręta sformułować warunek równowagi w stanie wychylonym*. Jak wiadomo z Wytrzymałości Materiałów, równowaga ta będzie zapewniona, jeśli moment sił wewnętrznych M_g jest w każdym punkcie osi belki równy momentowi obciążeń zewnętrznych. Ten ostatni w naszym przypadku jest z dokładnością do małych wyższego rzędu równy (rys. 10.3b)

$$P\overline{DE} = P\{w_A[1-(x/L)]-w\}, \quad (b)$$

przy czym w_A , tj. ugięcie punktu A traktujemy jako wartość znaną i stałą. W rezultacie zatem mamy

$$EJ_y w'' = P\{w_A[1-(x/L)]-w\}, \quad (c)$$

jako poszukiwaną zależność. Rozwiązując równanie (c) przy oznaczeniu $k = \sqrt{P/EJ_y}$ [1/cm] mamy

$$w(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + w_A[1-(x/L)], \quad (d)$$

w którym B_1 i B_2 są nieznanymi na razie stałymi całkowania. Do ich wyznaczenia, jak również do wyznaczenia w_A mamy następujące warunki

$$(w)_{x=0} = w_A, \quad (w)_{x=l} = 0, \quad (w')_{x=l} = 0. \quad (e)$$

Pierwszy z warunków (e) daje $B_2 = 0$. Pozostałe dwa dają w wyniku układ równań jednorodnych względem B_1 i w_A , a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} B_1 \sin kl + w_A[1-(l/L)] &= 0, \\ B_1 k \cos kl - (w_A/L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

* W poprzednim przykładzie (rys. 10.1) był tylko jeden element (rolka), którego równowagę badaliśmy. W przykładzie rozważanym obecnie tych elementów jest nieskończenie wiele. Prowadzi to w wyniku do równania różniczkowego, zamiast jak poprzednio równania algebraicznego.

Jednym z rozwiązań układu (f) jest $B_1 = 0$ i $w_A = 0$, co po podstawieniu do (d) daje $w \equiv 0$ i odpowiada równowadze pręta w pierwotnej, tzn. prostej postaci. Ponadto jednak mogą istnieć rozwiązania niezerowe, a więc odpowiadające równowadze pręta w postaci wygiętej, jeśli wyznacznik charakterystyczny układu (f) jest równy zero, to znaczy

$$\sin kl + kl[(L/l) - 1] \cos kl = 0. \quad (10.2a)$$

Otrzymane równanie jest przestępnym względem wielkości k i dlatego rozwiązujemy je wykreślnie. Przedstawiając je w postaci

$$\operatorname{tg} kl = -[(L/l) - 1]kl, \quad (10.2b)$$

rysujemy wykres $\operatorname{tg}(kl)$ w funkcji argumentu (kl) oraz prostą $-[(L/l) - 1]kl$ (rys. 10.3c). Punkty przecięcia $A, B, \dots$ dają wartości odciętych (kl) spełniających równanie (10.2), przy czym dla zastosowań technicznych znaczenie ma jedynie najmniejsza wartość $(kl)_{\min}$ odpowiadająca A . Jak widać, wartość ta zależy od (L/l) a mianowicie: gdy $(L/l) > 1$, to $0,5\pi < (kl)_{\min} < \pi$, jeśli $(L/l) < 1$, to $\pi < (kl)_{\min} < 1,5\pi$, i wreszcie, gdy $L/l = 1$, to $(kl)_{\min} = \pi$. Mając teraz dla danego (L/l) wyznaczoną wartość $(kl)_{\min} = c$, możemy obliczyć z kolei odpowiadającą jej wartość siły P_{kr} , gdyż $(l\sqrt{P/EJ_y}) = (kl)_{\min} = c$, skąd $P_{kr} = c^2 EJ_y / l^2$. Wyrażeniu temu nadajemy nieco inną postać wprowadzając współczynnik $\xi = (c/\pi)^2$. Wtedy

$$P_{kr} = \xi \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} = \xi P_E, \quad (10.3)$$

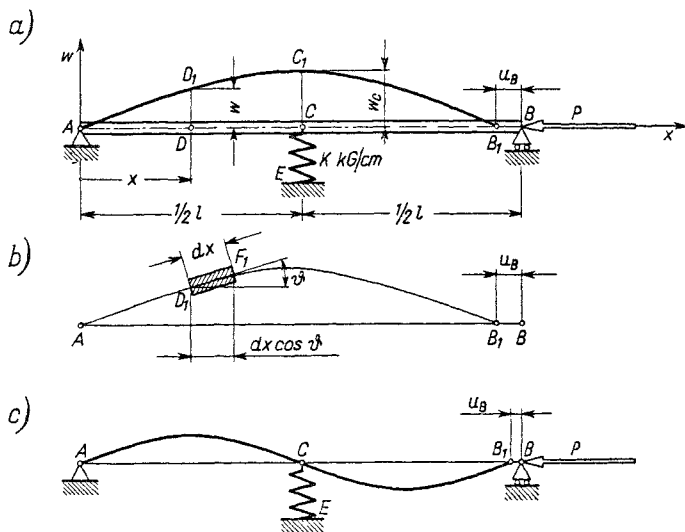
gdzie $P_E = \pi^2 EJ_y / l^2$ — krytyczna wartość siły odpowiadająca wyboczeniu pręta o długości l , podpartego przegubowo na obu końcach (tzw. *siła eulerowska*). Wartość współczynnika w funkcji L/l podaje rys. 10.3d.

W rezultacie przeprowadzonych rozważań otrzymaliśmy tę wartość siły ściskającej $P = P_{kr}$, przy której stan równowagi w postaci prostej jest stanem równowagi obojętnej. Siła ta według definicji z art. 10.1 jest zatem siłą krytyczną rozdzielającą grupę stanów równowagi trwałej ($P < P_{kr}$) od nietrwałej ($P > P_{kr}$).

Interesujące jest przedyskutowanie otrzymanych wyników. W tym celu rozpatrzmy najpierw przypadek $L/l = \infty$. Z wykresu (rys. 10.3d) mamy wtedy $\xi \approx 0,25$, to znaczy $P_{kr} = \pi^2 EJ_y / 4l^2$. Wynik ten staje się zrozumiały, jeśli zauważyć, iż odsunięcie krążka C do nieskończoności powoduje, że przy wychyleniu pręta linka obciążająca biegnie równolegle do osi x i do tej osi jest wobec tego równoległa siła P . Przypadek ten jest dobrze znany z Wytrzymałości Materiałów jako jeden z tzw. podstawowych przypadków wyboczenia pręta. Jako drugi rozważmy przypadek gdy $L/l = 1$. Z wykresu (rys. 10.3d) czytamy $\xi = 1$ to znaczy $P_{kr} = P_E$. Rezultat ten staje się oczywisty, jeśli zauważyć, iż momenty gnące na końcu A i w utwierdzonym przekroju B są równe zero, a więc są takie same jak w przypadku pręta podpartego przegubowo na obu końcach, dla którego $P_{kr} = P_E$. Wreszcie gdy $L/l = 0$, otrzymujemy z (10.2b) odpowiedź $(kl)_{\min} = 4,493$, a więc identyczna z przypadkiem, gdy w przekroju A istnieje przegubowa podpora. Wszystkie inne przypadki są pośrednie między trzema omówionymi i tym też tłumaczy się przebieg ξ w funkcji L/l .

Jako drugi przykład zbadajmy metodą energetyczną stateczność ściskanego pręta podpartego przegubowo na obu końcach i wzmocnionego pośrodku sprężystą podporą o sztywności K [kG/cm] (rys. 10.4a), przy czym zakładamy, iż w stanie początkowym siła na tej podporze jest równa zero.

Rozwiązanie rozpoczniemy jak poprzednio od przejścia przez etapy (a) i (b) (patrz art. 10.1). Nie powtarzając rozważań z poprzedniego przykładu (rys. 10.3) stwierdzamy, iż w pierwotnym stanie równowagi pręt jest ściskany stałą siłą N , reakcje podpór B i C są zerowe, a na podporze A istnieje pozioma reakcja $H_A = P$. Zakładając następnie wychylenie z położenia pierwotnej równowagi w postaci małego wygięcia $w(x)$, stwierdza-



Rys. 10.4. Wyboczenie pręta z podporą sprężystą
 a) przypadek $K < K_{gr}$; c) przypadek $K > K_{gr}$.

my pojawienie się dodatkowej siły w sprężynie o wartości Kw_c oraz momentów gnących M_g i sił tnących T w pręcie, określonych jak w przykładzie poprzednim zależnością (a). Ponadto na skutek wygięcia punkt B przesunie się do położenia B_1 , przy czym to przemieszczenie u_B aczkolwiek jest małą drugiego rzędu nie może być zaniedbane.

Przystępując teraz do sformułowania zasadniczego warunku (10.1), to znaczy $\Delta \Pi = 0$, zauważmy, iż w rozważanym przykładzie zmiana pełnej energii potencjalnej jest sumą trzech składników. Pierwszym z nich jest energia ΔV_g odpowiadająca zgięciu pręta. Uwzględniając zależność (a) określamy ją następująco

$$\Delta V_g = \int_0^l (M_g^2/2EJ) dx = \int_0^l (EJ/2)(w'')^2 dx. \quad (g)$$

Drugim składnikiem jest energia ΔV_s nienapiętej pierwotnie sprężyny, a mianowicie

$$\Delta V_s = 0,5Kw_c^2. \quad (h)$$

Wreszcie składnik trzeci przedstawia zmianę energii potencjalnej obciążenia zewnętrznego równą $\Delta V_P = -Pu_B$. Aby przy tym określić wielkość u_B , zauważmy, że na skutek wygięcia element pręta o długości $DF = dx$ zajmuje położenie D_1F_1 , a jego rzut na oś AB jest $dx \cos \vartheta$. Ponieważ ugięcie w jest z założenia małe, to z dokładnością do małych

wyższego rzędu mamy $\vartheta \approx w'$, $\cos \vartheta \approx 1 - (\vartheta^2/2) \approx 1 - [(w')^2/2]$. Sumując rzuty wszystkich elementarnych odcinków i odejmując od pierwotnej długości l mamy

$$u_B \approx l - \int_0^l \left(1 - \frac{(w')^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx. \quad (i)$$

W rezultacie warunek $\Delta \Pi = \Delta V_g + \Delta V_s + \Delta V_p = 0$ przyjmie postać

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ(w'')^2 dx + \frac{1}{2} Kw_c^2 - \frac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx = 0, \quad (10.4)$$

w której występuje przyjęta za znaną funkcja $w(x)$. Jeśli teraz podstawimy do (10.4) różne funkcje $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., z których każda spełnia warunki brzegowe (podporowe), to po wykonaniu przeliczeń otrzymamy z tego równania na ogół różne wartości obciążeń $P_1, P_2, \dots$. Z tych wszystkich możliwych wartości rzeczywistą siłą krytyczną będzie wartość najmniejsza*. Tak więc z punktu widzenia matematyki zadanie sprowadza się do określenia nie tylko siły P , ale i do takiego doboru $w(x)$, przy którym ta siła osiągnie minimum. Ponieważ z (10.4) siłę P otrzymujemy jako wyrażenie ułamkowe, którego licznik i mianownik zawierają poszukiwaną funkcję $w(x)$ pod znakiem całek, to ścisła odpowiedź na postawione zadanie wyznaczenia minimum P wchodzi w zakres rachunku wariacyjnego i przybiera postać równania różniczkowego. Jest to w wielu bardziej złożonych zagadnieniach niedogodne i dlatego zadowalamy się rozwiązaniem przybliżonym obierając $w(x)$ jako

$$w(x) = a_1 w_1(x) + a_2 w_2(x) + \dots + a_k w_k(x), \quad (10.5)$$

przy czym funkcje $w_p(x)$ ($p = 1, 2, \dots, k$) są znane i każda z nich spełnia warunki podporowe (brzegowe), a wielkości $a_1, \dots, a_k$ są nieznanymi na razie małymi parametrami.

Przebieg dalszego postępowania polega na podstawieniu wyrażenia (10.5) do (10.4) i wykonaniu odpowiednich rachunków (całkowań). W wyniku otrzymujemy poszukiwaną wartość P jako funkcję parametrów $a_1, \dots, a_k$. Żądając obecnie, aby to P było minimum, tj. aby były spełnione warunki

$$(\partial P / \partial a_p) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, k), \quad (10.6)$$

otrzymujemy tyle równań ile jest niewiadomych a_p . Wyznaczenie jednak stąd parametrów a_p jest bardzo żmudne i dlatego nasze postępowanie modyfikujemy. Po podstawieniu mianowicie (10.5) do (10.4) i wykonaniu całkowań, równanie (10.4) ma postać

$$\Psi(a_1, \dots, a_k) - P \psi(a_1, \dots, a_k) = 0, \quad (10.7)$$

* W praktyce istnieją zawsze zewnętrzne impulsy usiłujące wytrącić układ z położenia równowagi, siły zaś $P_1, P_2, \dots$ są takimi wartościami, przy przekroczeniu których następuje zmiana postaci równowagi z tej, która przestała być trwałą na inną trwałą. Przy wzrastaniu zatem obciążenia i istnieniu impulsów układ przejdzie z pierwotnej postaci w inną, gdy obciążenie osiągnie wartość najmniejszej z sił $P_1, P_2, \dots$

gdzie

$\Psi(a_1, \dots, a_k)$ — wynik całkowania lub obliczeń wszystkich członów wyrażenia (10.4) nie zawierających siły P ,

$\psi(a_1, \dots, a_k)$ — wynik całkowania wszystkich członów zawierających siłę P .

W naszym przykładzie (rys. 10.4) funkcje te mają postać

$$\Psi = \frac{1}{2} \int EJ (w'')^2 dx + \frac{1}{2} Kw_c^2, \quad \psi = \frac{1}{2} \int (w')^2 dx \quad (i)$$

i są kwadratowymi funkcjami parametrów $a_1, \dots, a_k$. Różniczkując teraz wyrażenie (10.6) względem jednego z parametrów, np. a_p mamy przy uwzględnieniu (10.7) następujące równanie liniowe względem niewiadomych a

$$(\partial \Psi / \partial a_p) - P(\partial \psi / \partial a_p) = 0. \quad (10.8)$$

Równań typu (10.8) otrzymujemy tyle, ile jest niewiadomych a , przy czym łatwo zauważyć, iż wszystkie one są równaniami liniowymi jednorodnymi. Aby taki układ miał rozwiązanie niezerowe, wyznacznik charakterystyczny utworzony ze współczynników przy niewiadomych a musi być równy zeru. Współczynniki te jednak zależą od siły P , wskutek czego od tej siły zależy też wartość wyznacznika. Spełnienie warunku aby wartość ta była równa zeru, określa te szczególne wartości siły P , przy których istnieje równowaga w stanie wychylonym, to znaczy $a_p \neq 0$. Krytyczną wartością P_{kr} siły P będzie najmniejsza z tych wartości szczególnych.

Przedstawione rozważania dotyczące określenia $\Delta \Pi$ i siły P_{kr} (wzory 10.4 ÷ 10.8) mają charakter podstawowy i stanowią uzupełnienie energetycznej metody opisanej w art. 10.1. Wracając teraz do przykładu (rys. 10.4) obierzmy na początek $w(x)$ jako jednoparametrową funkcję

$$w(x) = a_1 \sin(\pi x/l), \quad (k)$$

spełniającą warunki brzegowe ($w_{x=0} = w_{x=L} = 0$, $EJw''_{x=0} = EJw''_{x=L} = 0$), przy czym parametr a_1 jest z założenia mały. Podstawiając tak określone $w(x)$ do (10.4) mamy po wykonaniu całkowań

$$\frac{EJ}{2} \frac{\pi^4 a_1^2}{2l^3} + \frac{Ka_1^2}{2} - \frac{P}{2} \frac{\pi^2 a_1^2}{2l} = 0,$$

skąd biorąc pod uwagę, że a_1 aczkolwiek bardzo małe, to jednak nie jest równe zeru, mamy:

$$P_{kr} = P_E \left(1 + \frac{2Kl}{\pi^2 P_E} \right), \quad (10.9)$$

gdzie $P_E = \pi^2 EJ/l^2$ — siła eulerowska. Jak widać, istnienie podatnej sprężystości podpory środkowej podnosi siłę krytyczną w porównaniu z konstrukcją nie mającą takiej podpory. Zwiększenie to jest proporcjonalne do sztywności K , nie może jednak wzrastać nieograniczenie. Jeśli bowiem podpora środkowa jest bardzo mało podatna (K — duże), to utrata stateczności nastąpi w postaci dwóch półfal sinusoidalnych (rys. 10.4c), a odpowiadająca temu siła krytyczna jest

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = 4P_E. \quad (l)$$

Porównując wartość (I) z (10.9) znajdziemy tę graniczną wartość sztywności K_{gr} , powyżej której podatna podpora będzie działać, z uwagi na wyboczenie, jak podpora sztywna. Przeliczenia dają

$$K_{gr} = \frac{3\pi^2 P_E}{2l} \approx 15 \frac{P_E}{l} \text{ kG/cm.} \quad (10.10)$$

Chcąc otrzymać dokładniejszą wartość siły krytycznej założymy, przewidując symetryczną postać wygięcia, że $w(x)$ ma postać

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l}. \quad (m)$$

Jak łatwo przekonać się, spełnia ona wszystkie warunki podporowe. Podstawiając do (10.4) po wykonaniu rachunków mamy

$$-P \left(\frac{\pi^2 a^2}{4l} + \frac{3^2 \pi^2 a_3^2}{4l} \right) + EJ \left(\frac{\pi^4 a_1^2}{4l^3} + \frac{3^4 \pi^4 a_3^2}{4l^3} \right) + \frac{K}{2} (a_1 - a_3)^2 = 0,$$

przy czym w ostatnim składniku występuje $(a_1 - a_3)$, gdyż dla $x = l/2$ $w_{x=l/2} = w_c = a_1 - a_3$. Jak widać, siła P jest funkcją dwóch parametrów a_1 i a_3 . Stosując zatem postępowanie, które doprowadziło do równań (10.8), otrzymujemy po uporządkowaniu te równania w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{2l} \left(P - P_E - \frac{2Kl}{\pi^2} \right) a_1 + K a_3 &= 0, \\ K a_1 + \frac{3^2 \pi^2}{2l} \left(P - 9P_E - \frac{2Kl}{9\pi^2} \right) a_3 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $P_E = \pi^2 EJ/l^2$. Obliczając teraz wyznacznik z współczynników przy niewiadomych a_1 i a_3 , otrzymujemy warunek, który musi spełniać siła P , aby istniała równowaga w postaci lekko wygiętej, tj. $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$. Warunek ten brzmi

$$P^2 - B_1 P + B_2 = 0, \quad (n)$$

gdzie pomocnicze wielkości B_1 i B_2 są

$$B_1 = 10[P_E + (2Kl/9\pi^2)], \quad B_2 = 9P_E[P_E + (164Kl/81\pi^2)].$$

Rozwiązując równanie (n) otrzymujemy dwie wartości siły P , z których jako wartość krytyczną P_{kr} należy przyjąć mniejszą. Jeśli na przykład $K = 0,5K_{gr} = 3\pi^2 P_E/4l$ (wzór 10.10), to w wyniku

$$P_1 = 2,461 P_E, \quad P_2 = 9,21 P_E$$

i wartością krytyczną będzie $P_{kr} = 2,461 P_E$. Wartość ta jest mniejsza od wartości pierwszego przybliżenia (10.9) tylko o $\sim 1,6\%$, natomiast większa o $\sim 2\%$ od wartości ścisłej (metoda analizy równowagi).

Ten drugi fakt, że obciążenie krytyczne, obliczone metodą przybliżoną, jest zawsze większe niż wartość ścisła, wynika dlatego, że zakładając przybliżoną postać funkcji ugięcia zamieniamy układ o nieskończonej liczbie stopni swobody na układ o liczbie skończonej, wykluczając tym samym możliwość innej postaci ugięcia niż podana wzorem (10.5). Jest to równoważne nałożeniu na pręt (belkę) pewnych sprężystych podpór (wieżów), powodujących zwiększenie siły krytycznej w porównaniu z przypadkiem, gdy tych podpór nie ma. Tylko w szczególnym przypadku, gdy założona postać ugięcia *w* pokrywa się z postacią wynikającą z rozwiązania ścisłego, metoda energetyczna daje ten sam wynik co i metoda ścisła.

10.3. Podział zagadnień stateczności konstrukcji prętowych

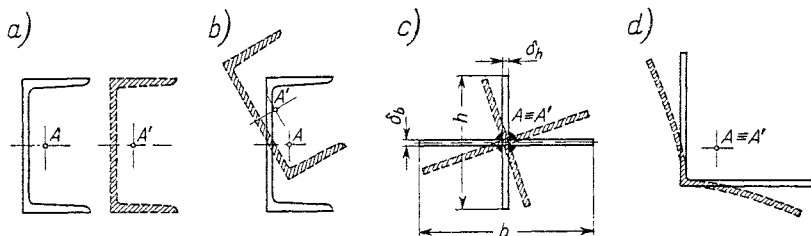
Opisane w art. 10.1 i 10.2 reguły i metody postępowania, aczkolwiek objaśnione na przykładach konstrukcji prętowych, mają jednak znaczenie przy rozpatrywaniu statecz-

ności wszystkich układów. Przechodząc teraz do omawiania zastosowań tych reguł i metod musimy zdać sobie sprawę z jakimi zagadnieniami będziemy się spotykać.

Zagadnienia wyznaczenia obciążeń krytycznych dla konstrukcji prętowych dzielą się na dwie grupy. Pierwsza z nich dotyczy określenia obciążeń krytycznych dla pojedynczego pręta, druga poświęcona jest wyznaczeniu tychże obciążeń dla ustroju (ramy, kratownicy) jako całości.

Jak uczy doświadczenie, utrata stateczności pierwotnie prostego ściskanego pręta może mieć jedną z trzech następujących postaci: wyboczenie giętne, wyboczenie giętno-skrętne lub skrętne i wreszcie wyboczenie lokalne.

Pierwsze dwie postacie wyboczenia charakteryzują się tym, że pierwotnie prosta oś pręta ulega wygięciu (zakrzywieniu), przy czym poprzeczny przekrój pręta nie zmienia swego kształtu*, a przemieszcza się jako całość, ulegając bądź prostemu przesunięciu (wyboczenie giętne) (rys. 10.5a), bądź przesunięciu i obrotowi (wyboczenie giętno-skrętne) (rys. 10.5b). Wyboczenie skrętne stanowi modyfikację tego ostatniego przypadku, przy



Rys. 10.5. Przemieszczenie poprzecznego przekroju pręta przy różnych postaciach utraty stateczności. Pierwotne położenie przekroju narysowano linią ciągłą

czym oś pręta zostaje prosta, a przekrój jako całość ulega jedynie obrotowi (rys. 10.5c). W odróżnieniu od tych przypadków przy wyboczeniu lokalnym przekrój poprzeczny ulega odkształceniu w ten sposób, że naroża tego przekroju nie mają przemieszczeń (rys. 10.5d). Ta ostatnia postać wyboczenia rozpatrzona jest w art. 11.4 łącznie ze statecznością płyt.

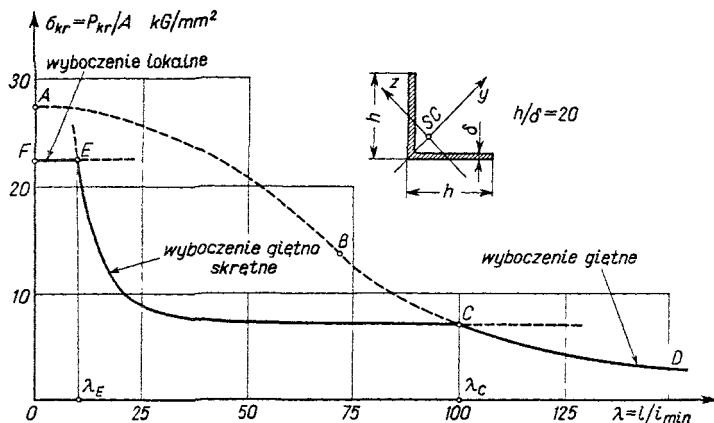
W Wytrzymałości Materiałów analizuje się zazwyczaj tylko podstawowe przypadki wyboczenia giętnego, gdyż jak pokazuje analiza rachunkowa i doświadczenie, pozostałe przypadki b i c dają dla przekrojów zwartych znacznie większe obciążenie krytyczne. Inaczej jednak przedstawia się sytuacja dla cienkościennych przekrojów otwartych, dla których w zależności od smukłości λ pręta mogą w grę wchodzić wszystkie trzy warianty. Tak na przykład dla kątownika (rys. 10.6), gdy $\lambda > \lambda_c$ utrata stateczności następuje w postaci wyboczenia giętnego, gdy $\lambda_E < \lambda < \lambda_c$ najniższe naprężenia krytyczne zachodzą przy wyboczeniu giętno-skrętnym, wreszcie dla bardzo małych smukłości $\lambda < \lambda_E$ decyduje wyboczenie lokalne. W rezultacie zależność σ_{kr} od λ przedstawia się linią $FEC D$ zamiast $ABCD$, jakby można było sądzić, rozpatrując jedynie przypadek wyboczenia giętnego.

Szczegółowa analiza tych przypadków podana jest w art. 10.4÷10.9. Jako regułę można przy tym podać, że dla prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym (rurowym)

* Przy tym przemieszczeniu przekrój może doznawać jednak spłaszczenia (patrz art. 6.1 i rys. 6.1).

najniższe naprężenia krytyczne określone są przez wyboczenie giętne bądź lokalne, natomiast nie wchodzi w rachubę wyboczenie giętno-skrętne, dające wyższe wartości naprężeń krytycznych.

Poza opisanymi jakościowo przypadkami wyboczenia ściskanego pręta istnieją przypadki utraty stateczności przy innych obciążeniach. Jeden z tych przypadków mający duże znaczenie techniczne, a mianowicie utrata stateczności zginanej belki w postaci



Rys. 10.6. Typowy wykres σ_{kr} dla cienkościennego pręta o przekroju otwartym

AB – parabola Jonsona, BCD – hiperbola Eulera, $i_{\min}$ – minimalny promień bezwładności przekroju. Dane liczbowe $E = 7 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$, $G = 2,8 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$, $Q_r = \sigma_p = 28 \text{ kg/mm}^2$.

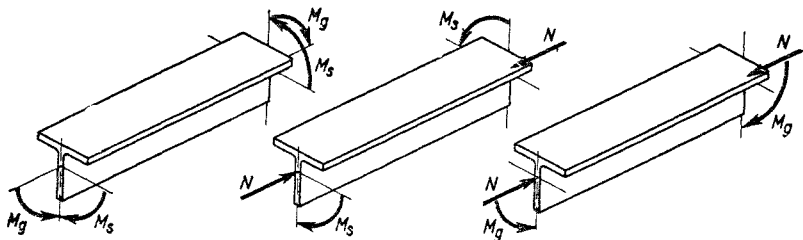
tw. zwichrzenia, omówiony jest w art. 10.8. Pominięto natomiast przypadki utraty stateczności przy skręcaniu prętów, gdyż nie mają one na ogół praktycznego znaczenia*.

Omówienie drugiej grupy zagadnień, tzn. określenia obciążeń krytycznych w ustrojach prętowych (art. 10.10 i 10.11) uzasadnione jest tym, iż zagadnienia te mają duże znaczenie techniczne. Gdyby bowiem było rzeczą pewną, iż obciążenie krytyczne danego pręta wmontowanego w ustrój jest zawsze większe niż krytyczne obciążenie tegoż pręta rozpatrywanego w izolacji od reszty ustroju, to, godząc się z pewnym zwiększeniem stopnia bezpieczeństwa, można by było pominąć analizę stateczności ustrojów. Okazuje się jednak, że tak nie jest, gdyż są przypadki, gdy reszta ustroju wpływa na dany element (pręt) destabilizująco. Z tych powodów poznanie stateczności ustrojów jest konieczne.

Poza wymienionymi dwoma grupami zagadnień istnieje całkowicie odrębna trzecia grupa zagadnień dotycząca zachowania się ustrojów (lub pojedynczego pręta) przy zespole obciążeń, z których co najmniej jedno, działając oddzielnie od pozostałych, może wywołać utratę stateczności. Klasycznym przykładem tego rodzaju zagadnień jest jednoczesne zginanie i ściskanie pręta (art. 10.12); inne przykłady tego rodzaju podaje rys. 10.7. Jak wynika z rozważań teoretycznych i z doświadczeń, takie działanie zespołu obciążeń może doprowadzić do przedwczesnego zniszczenia konstrukcji. Z drugiej strony istnieją

* Skręcając cienki drut obserwujemy, iż przy dużym kącie skręcania (z reguły większym niż 360°) drut przyjmuje postać linii śrubowej. Zagadnienie to ma praktyczne znaczenie w wiertnictwie.

przypadki, gdy w konstrukcji częściowa utrata stateczności niektórych elementów (prętów) nie jest niebezpieczna i może być tolerowana. Niektóre przypadki tych zagadnień podano we wstępie do rozdz. 12.



Rys. 10.7. Przykłady zespołów obciążeń mogących przedwczesnie zniszczyć konstrukcję

10.4. Niektóre przypadki giętnego wyboczenia pojedynczego pręta*

Jako przykłady zastosowania metod podanych w art. 10.2 rozwiążemy kilka przypadków wyznaczenia obciążeń krytycznych.

a. *Wpływ zamocowania sprężystego końców pręta* (rys. 10.8). Pisząc równanie równowagi w stanie odkształconym (rys. 10.8d) mamy

$$EJw'' = -Pw + M_A + R_A x.$$

Uwzględniając następnie, że

$$R_A = -(M_A + M_B)/l = -(K_A \vartheta_A + K_B \vartheta_B)/l,$$

otrzymujemy po uporządkowaniu

$$EJw'' + Pw = K_A \vartheta_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) - K_B \vartheta_B \frac{x}{l}.$$

Rozwiązanie powyższego równania ma postać:

$$w = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + \frac{K_A \vartheta_A}{P} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{K_B \vartheta_B}{P} \frac{x}{l},$$

gdzie jak zwykle $k = \sqrt{P/EJ}$ [1/cm]. Dla określenia stałych B_1, B_2 oraz kątów ϑ_A, ϑ_B mamy przy tym następujące zależności:

$$w_{x=0} = 0, \quad w_{x=l} = 0, \quad (w')_{x=0} = \vartheta_A, \quad (w')_{x=l} = \vartheta_B.$$

Podstawiając do dwóch pierwszych warunków znalezione wyrażenie dla w , otrzymujemy

$$B_1 = \frac{1}{P} (K_A \vartheta_A \operatorname{ctg} kl + K_B \vartheta_B \cos kl), \quad B_2 = -\frac{K_A \vartheta_A}{P},$$

co w rezultacie pozwala przedstawić w jako funkcję samych tylko ϑ_A, ϑ_B

$$w = -\frac{K_A \vartheta_A}{P} \left[\frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{k(l-x)}{kl} \right] + \frac{K_B \vartheta_B}{P} \left(\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{kx}{kl} \right).$$

* W rozważaniach pominięto, znaną z Wytrzymałości, analizę wyboczenia giętnego pojedynczego pręta z końcami podpartymi przegubowo bądź zamocowanymi.

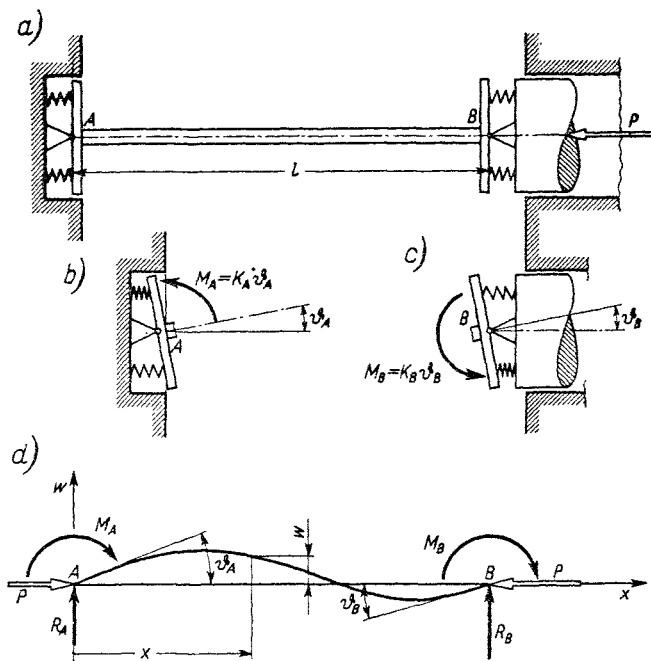
Wykorzystując teraz dwa pozostałe warunki otrzymujemy układ dwóch równań jednorodnych względem ϑ_A , ϑ_B , a mianowicie:

$$\vartheta_A \left[1 - \frac{K_A l}{EJ} \psi_1(kl) \right] - \vartheta_B \frac{K_B l}{EJ} \psi_2(kl) = 0,$$

$$-\vartheta_A \frac{K_A l}{EJ} \psi_2(kl) + \vartheta_B \left[1 - \frac{K_B l}{EJ} \psi_1(kl) \right] = 0,$$

gdzie

$$\psi_1(kl) = \frac{1}{kl} \left(\operatorname{ctg} kl - \frac{1}{kl} \right), \quad \psi_2(kl) = \frac{1}{kl} \left(\frac{1}{\sin kl} - \frac{1}{kl} \right).$$



Rys. 10.8. Wyboczenie pręta ze sprężystym utwierdzeniem końców
 K_A , K_B kGcm/rad — sztywności utwierdzenia.

Aby powyższy układ miał rozwiązanie różne od zera, tzn. aby istniała równowaga w postaci wygiętej, trzeba, aby wyznacznik charakterystyczny tego układu był równy zero. Wprowadzając oznaczenia bezwymiarowych wielkości

$$\frac{K_A l}{EJ} = \alpha_A, \quad \frac{K_B l}{EJ} = \alpha_B, \quad (10.11)$$

otrzymujemy po przekształceniach równanie przestępne względem (kl)

$$\alpha_A \alpha_B \left(1 - \frac{2}{kl} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} \right) + (\alpha_A + \alpha_B) \left(\frac{kl}{\operatorname{tg} kl} - 1 \right) - k^2 l^2 = 0. \quad (10.12)$$

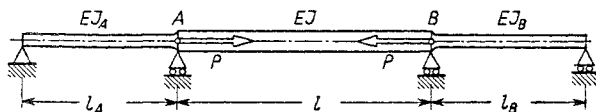
WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW RÓWNANIA (10.14b)

Tablica 10.1

kl	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$1 - \frac{2}{kl} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}$	∞	3,032	1,827	1,425	1,220	1,047	1,000
$kl \operatorname{ctg} kl - 1$	∞	5,35	1,42	-1,00	-4,02	-10,98	$-\infty$
$(kl)^2$	9,87	13,43	17,55	22,22	27,43	33,18	39,47

Rozwiązania równania (10.12) można dokonać jedną ze znanych metod przybliżonych, np. wykreślną. Dla ułatwienia tego podano w tabl. 10.1 wartości odpowiednich funkcji w przedziale* $\pi < kl < 2\pi$. Jeśli na przykład ściskany pręt stanowi przeszło środkowe belki ciągłej (rys. 10.9), to rolę utwierdzenia sprężystego dla tego pręta stanowią przesła zewnętrzne i wtedy według Wytrzymałości:

$$K_A = \frac{3EJ_A}{l_A}, \quad K_B = \frac{3EJ_B}{l_B}.$$



Rys. 10.9. Przypadek ściskania środkowego przesła belki ciągłej jako szczególny przypadek zagadnienia z rys. 10.8

Biorąc na przykład $l_A = l_B = l$, $EJ_A = 2EJ_B = EJ$, otrzymujemy $\kappa_A = 2\kappa_B = 3$ i wtedy rozwiązanie równania (10.12) daje $kl \approx 4,12$, a siła krytyczna jest

$$P_{kr} = \frac{16,93EJ}{l^2},$$

tj. o $\sim 70\%$ większa niż w przypadku przegubowego podparcia końców. Podobnie rozwiązujemy szeregi innych przypadków, sprowadzających się do schematu według rys. 10.8. Przykłady takich zagadnień podaje rys. 10.10, gdzie poza schematem konstrukcji podano również wartości K_A i K_B .

Jeśli sztywność obu utwierdzeń jest jednakowa ($\kappa_A = \kappa_B = \kappa$), to łatwo udowodnić, że równanie (10.12) daje się przedstawić w postaci:

$$\left(1 + \frac{\kappa}{kl} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}\right) \left[1 + \frac{\kappa}{kl} \left(\frac{2}{kl} - \operatorname{ctg} \frac{kl}{2}\right)\right] = 0. \quad (10.13)$$

Przyrównując do zera pierwszy z tych czynników, otrzymujemy przypadek wyboczenia symetrycznego ($\vartheta_A = -\vartheta_B$), podczas gdy przyrównanie do zera drugiego czynnika odpowiada wyboczeniu antysymetrycznemu ($\vartheta_A = \vartheta_B$). Można się przekonać, że mniejszą wartość siły krytycznej daje pierwsza alternatywa, dla której w tabl. 10.2 podano bezwymiarową wartość κ odpowiadającą danej wartości

* Wynika to z faktu, iż utwierdzenie sprężyste podnosi siłę krytyczną, a więc P_{kr} musi być większe od $\pi^2 EJ/l^2$, tj. $kl > \pi$. W drugim przypadku skrajnym, gdy $\kappa_A = \kappa_B \rightarrow \infty$, siła krytyczna wzrasta do $4\pi^2 EJ/l^2$, skąd graniczna wartość, której nie można przekroczyć, jest $(kl)_{gr} = 2\pi$.

siły krytycznej wyrażonej przez kl . Stosując interpolację można z techniczną dokładnością określić na odwrót wartość kl przy zadanym κ .

Tak więc gdy $\kappa = 2,25$, wówczas $7\pi/6 < kl < 8\pi/6$, a interpolacja daje $kl \approx 4,13$.

OBCIĄŻENIE KRYTYCZNE PRĘTA Z KOŃCAMI JEDNAKOWO SPRĘŻYSTO UTWIERDZONYMI

Tablica 10.2

kl	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
κ	0	0,985	2,415	3,712	9,11	12,48	∞

Zauważając, iż $\kappa = 2,25$ jest średnią arytmetyczną bezwymiarowych sztywności utwierdzenia z poprzedniego przykładu, widzimy, że obliczenie siły krytycznej dla pręta z niejednakową sztywnością utwierdzeń można z techniczną dokładnością zastąpić obliczeniem dla przypadku, gdy sztywność utwierdzeń jest jednakowa i równa średniej arytmetycznej obu sztywności rzeczywistych*.

Przypadek α

$$K_A = 0; \quad K_B = \frac{3EJ_B}{h}$$

Przypadek β

$$K_A = 0; \quad K_B = \frac{4EJ_B}{h}$$

Przypadek α

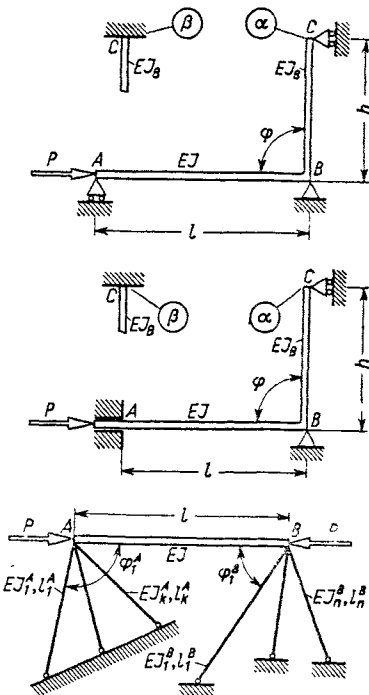
$$K_A = \infty; \quad K_B = \frac{3EJ_B}{h}$$

Przypadek β

$$K_A = \infty; \quad K_B = \frac{4EJ_B}{h}$$

$$K_A = 3 \sum_1^n \frac{EJ_1^A}{l_i^A}$$

$$K_B = 3 \sum_1^n \frac{EJ_i^B}{l_i^B}$$



Rys. 10.10. Inne przypadki sprężystego utwierdzenia końców pręta

Kąty φ , φ_A , φ_B mogą mieć wartości dowolne.

b. Wpływ ciągłego podparcia sprężystego (rys. 10.11). Stosując metodę energetyczną przy założeniu, że bardzo małe wychylenie z położenia równowagi określa funkcja $w = a_n \sin(n\pi x/l)$, spełniająca warunki brzegowe (n -liczba naturalna) otrzymujemy:

* Dokładność powyższego sposobu jest tym gorsza, im większa jest różnica κ_A i κ_B .

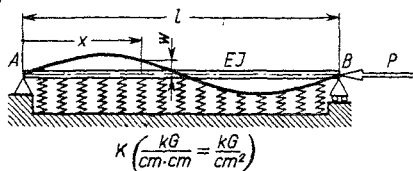
energię zgięcia

$$\Delta V_g = \frac{EJ}{2} \int_0^l (w'')^2 dx = \frac{\pi^4 n^4 EJ}{4l^3} a_n^2,$$

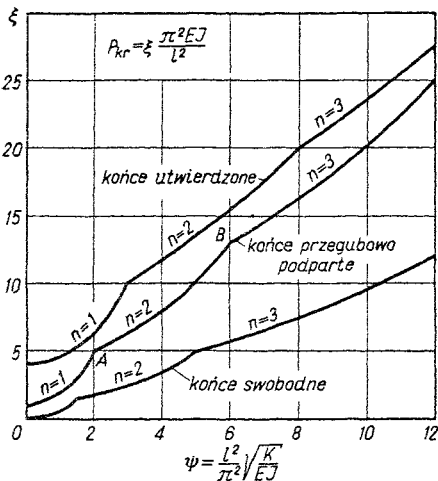
energię zgromadzoną w sprężystych podporach

$$\Delta V_s = \frac{K}{2} \int_0^l (w)^2 dx = \frac{Kl}{4} a_n^2,$$

a)



b)



Rys. 10.11. Wyboczenie pręta na sprężystym podłożu

K — sztywność podłoża jest wielkością obciążenia na 1 cm przy odkształceniu o 1 cm. Dla $\psi > 12$ z techniczną dokładnością można przyjąć dla końców utwierdzonych: $\xi = 4 + 2\psi$, dla przegubowo podpartych: $\xi = 1 + 2\psi$, dla swobodnych: $\xi = \psi$.

przeprowadzimy rozważając równowagę jego w postaci lekko wygiętej (metoda I). Zauważmy przy tym, że z uwagi na symetrię konstrukcji i obciążenia zagadnienie da się rozdzielić na przypadki wyboczenia symetrycznego i antysymetrycznego, będące od siebie nawzajem niezależne (patrz zagadnienie a. tego artykułu). Ponieważ wartość siły krytycznej, odpowiadająca wyboczeniu symetrycznemu, jest niższa niż najmniejsza siła krytyczna dla przypadku antysymetrii, zajmijmy się wyłącznie tym pierwszym przypadkiem. Pisząc równania dla części OD i DB mamy:

$$EJw''_2 = -Pw_2 \quad (0 \leq x \leq l_2/2); \quad EJ_1w''_1 = -Pw_1 \quad (l_2/2 < x < l/2),$$

zmianę energii potencjalnej obciążenia P

$$\Delta V_P = \frac{P}{2} \int_0^l (w')^2 dx = \frac{\pi^2 n^2 P}{4l}.$$

Podstawiając te wyrażenia do (10.4) po przekształceniach wyznaczamy

$$P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} + \frac{Kl^2}{n^2 \pi^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(n^2 + \frac{\psi^2}{n^2} \right), \quad (10.14)$$

gdzie $\psi = (l^2/\pi^2) \sqrt{K/EJ}$ charakteryzuje sztywność podłoża. Biorąc tę wartość jako zmienną, otrzymujemy dla różnej liczby półfal n wykres AB (rys. 10.11b). Charakterystyczne jest przy tym, że w miarę wzrostu wielkości ψ liczba półfal odpowiadająca najmniejszej sile krytycznej również zwiększa się. Tak na przykład dla $2 < \psi < 6$ najniższą wartość P_{kr} odpowiada $n = 2$, podczas gdy dla $6 < \psi < 12$ wyboczenie zachodzi przy $n = 3$ itd. W punkcie B odpowiadającym przecięciu krzywych dla $n = 2$ i $n = 3$ obydwie postacie wyboczenia są możliwe.

W przypadku gdy końce pręta są podparte inaczej niż przegubowo, wyznaczenie siły krytycznej metodą energetyczną jest utrudnione z uwagi na dobór właściwej funkcji i z tego powodu lepiej jest przeanalizować równowagę pręta w postaci wygiętej (I metoda). Wyniki rozwiązań podane są na rys. 10.11b.

c. *Wpływ zmiennej sztywności pręta.* Bardzo często ze względów konstrukcyjnych stosujemy pręt ze zmniejszoną sztywnością na odcinkach przylegających do podpór (rys. 10.12).

Wyznaczenie siły krytycznej dla takiego pręta

gdzie w_2, w_1 — ugięcia w na odcinkach OD i DB . Rozwiązanie powyższych równań ma postać:

$$w_2 = A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x, \quad w_1 = A_1 \sin k_1 x + B_1 \cos k_1 x,$$

gdzie

$$k_2 = \sqrt{P/EJ_2}, \quad k_1 = \sqrt{P/EJ_1}.$$

Aby wyznaczyć stałe całkowania A_2, B_2 , zauważmy, że dla $x = 0$ jest $w_2 = w_0$ oraz $w'_2 = 0$. Po podstawieniu otrzymujemy

$$w_2 = w_0 \cos k_2 x,$$

przy czym sama wartość w_0 nie jest na razie znana. W rezultacie mamy więc trzy niewiadome A_1, B_1 i w_0 . Aby je wyznaczyć, formułujemy następujące warunki:

a) ugięcie i kąt ugięcia w punkcie D (rys. 10.12a), wyznaczone z wzorów dla w_2 i w_1 , muszą mieć tę samą wartość, tj.

$$(w_2)_{x=\frac{1}{2}l_2} = (w_1)_{x=\frac{1}{2}l_2}, \quad (w'_2)_{x=\frac{1}{2}l_2} = (w'_1)_{x=\frac{1}{2}l_2}; \quad c)$$

b) ugięcie w punkcie B jest równe zeru, tj.

$$(w_1)_{x=\frac{1}{2}l} = 0.$$

Ostatni z powyższych warunków daje zależność

$$B_1 = -A_1 \operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2},$$

pozostałe zaś dwa mają postać:

$$w_0 \cos \frac{1}{2} k_2 l_2 - A_1 \sin \frac{1}{2} k_1 l_2 - B_1 \cos \frac{1}{2} k_1 l_2 = 0,$$

$$-k_2 w_0 \sin \frac{1}{2} k_2 l_2 - A_1 k_1 \cos \frac{1}{2} k_1 l_2 + B_1 k_1 \sin \frac{1}{2} k_1 l_2 = 0.$$

Podstawiając w tych dwóch równaniach B_1 wyrażone przez A_1 z poprzedniej zależności i stwierdzając, że niezerowe rozwiązania dla w_0 i A_1 istnieć będą, gdy wyznacznik charakterystyczny tych dwóch równań będzie równy zeru, mamy w rezultacie

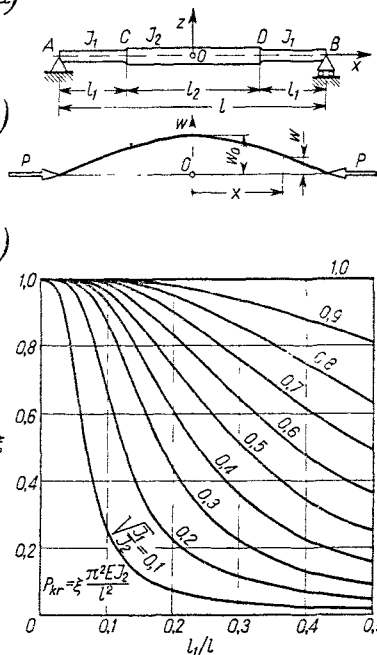
$$\operatorname{tg} k_1 l_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} k_2 l_2 = \frac{k_1}{k_2}. \quad (10.15)$$

Znając J_1, J_2 oraz l_1 i l_2 , można rozwiązać powyższe równanie np. metodą prób, wyznaczając tym samym siłę krytyczną P , którą można przedstawić w postaci:

$$P_{kr} = \xi \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2}, \quad (10.16)$$

gdzie bezwymiarowy współczynnik ξ (rys. 10.12c) jest funkcją $(\sqrt{J_1/J_2})$ oraz (l_1/l) .

Poza rozwiązaniem przypadkiem spotyka się w praktyce, zwłaszcza w konstrukcji wysięgników lub słupów, przypadki, gdy moment bezwładności zmienia się według prawa parabolicznego. Ścisłe rozwiązanie takiego zadania jest dość złożone i dlatego ograniczymy się do podania wyników, gdy siły ściskające przyłożone są na końcach pręta, a same końce przegubowo podparte. Siłę krytyczną wyrażamy tym samym wzorem (10.16) z tym tylko, że współczynnik ξ jest tym razem określony z rys. 10.13.



Rys. 10.12. Wyboczenie pręta wzmocnionego w części środkowej

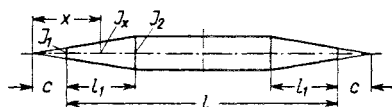
d. *Wpływ siły poprzecznej* określimy, stosując w nieco zmienionej formie metodę energetyczną. Biorąc mianowicie pod uwagę, że przy wychyleniu z pierwotnego położenia równowagi poza momentem gnącym $M_g = -Pw$ pojawia się również i siła tnąca $T = dM_g/dx = -Pw'$ (rys. 10.14), możemy energię* wyrazić jako

$$\Delta V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \kappa \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GA} = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^l w^2 dx + \kappa \frac{P^2}{2GA} \int_0^l (w')^2 dx, \quad (10.17)$$

gdzie κ — współczynnik znany z Wytrzymałości, zależny od kształtu przekroju (dla prostokąta $\kappa = 1,2$).

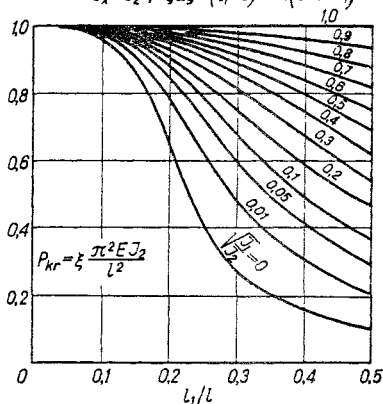
Jeśli rozważany pręt jest podparty przegubowo na obydwu końcach, to przedstawiając funkcję w w postaci

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots,$$



$$J_x = J_2 \left(\frac{x}{l_1 + c} \right)^2, \text{ gdy } c < x < l_1 + c$$

$$J_x = J_2, \text{ gdy } (l_1 + c) < x < (l + c - l_1)$$



Rys. 10.13. Wyboczenie pręta z momentem bezwładności zmiennym parabolicznie

* Dotychczas energię odkształcenia ΔV_g wyrażaliśmy przez w'' , natomiast tutaj wyrażamy przez $M_g = -Pw$. Obydwa wyrażenia są oczywiście równoważne, dopóki mamy do czynienia z właściwą funkcją w , tj. spełniającą równanie równowagi $EJw'' = M_g = -Pw$. Jeśli jednak stosujemy rozwiązanie przybliżone (10.5), to nie jest rzeczą obojętną, które z wyrażen na ΔV_g wstawimy, gdyż rezultat będzie zależał od dokładności funkcji w bądź w'' . Okazuje się, iż dokładność rozwiązań przybliżonych maleje, im wyższe pochodne wchodzi w grę. Ponieważ w rozważanym przypadku wpływ siły poprzecznej jest na ogół niewielki, bardziej odpowiednie dla właściwego ujęcia tego wpływu jest zastosowanie wyrażenia $M_g = -Pw$ niż $M_g = EJw''$. To samo dotyczy siły poprzecznej, którą, zamiast wyrazić jako $T = dM_g/dx = EJw'''$, określamy przez niższą pochodną, tj. $T = -Pw'$.

otrzymujemy

$$\Delta V = \frac{P^2 l}{4EJ} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left(1 + \kappa \frac{m^2 P_E}{GA} \right),$$

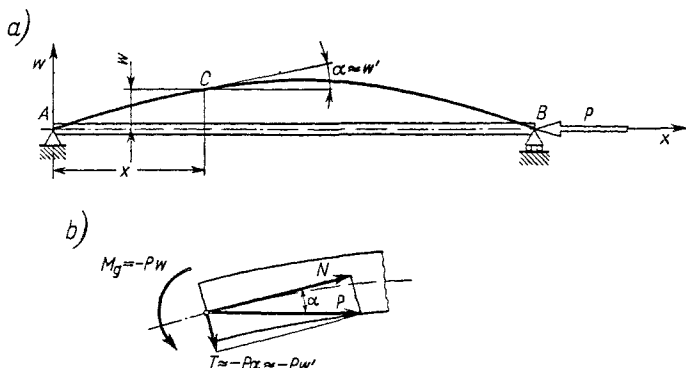
gdzie $P_E = \pi^2 EJ/l^2$ — siła eulerowska.

Wyrażając następnie zmianę potencjalnej energii V_P siły P jako

$$\Delta V_P = \frac{P}{2} \int_0^l (w')^2 dx = \frac{\pi^2 P}{4l} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m^2,$$

po podstawieniu do (10.4) mamy przy $K = 0$

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m^2}{\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left(1 + \kappa \frac{m^2 P_E}{GA} \right)}.$$



Rys. 10.14. Określenie wielkości siły poprzecznej w przecie wyboconym

Zgodnie z umową o znaku siły tnącej T jest ona ujemna dla $w > 0$.

Wartości współczynników a_m należy teraz dobrać tak, aby wartość siły P była najmniejsza. Łatwo udowodnić, że znajdzie to wtedy, gdy założymy, że wszystkie a_m z wyjątkiem a_1 są równe zero*. Tak więc wzór

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \kappa \frac{P_E}{GA}} \quad (10.18)$$

* A oto dowód: jeśli mamy szereg dodatnich ułamków (a/b) , (c/d) , (e/f) , ..., z których jeden, np. (a/b) , jest najmniejszy, to ułamek

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} > \frac{a}{b},$$

gdyż zgodnie z założeniem $d < (bc/a)$, $f < (be/a)$, ..., a więc

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} > \frac{a+c+e+\dots}{b+(bc/a)+(be/a)+\dots} = \frac{a}{b},$$

albowiem zostawiając licznik bez zmian zmniejszyliśmy mianownik.

Wynika stąd, że aby znaleźć minimum, należy w poprzednim wyrażeniu dla P zostawić tylko jedno a_m różne od zera. Tym a_m zaś jest a_1 .

ujmuje wpływ siły poprzecznej na siłę krytyczną. Pomijając pręty o przekroju zwartym (np. prostokąt), dla których wpływ ten jest bardzo mały, rozważymy dwa przypadki, gdy ma on znaczenie redukując poważnie wielkość siły krytycznej. Jednym z nich są pręty o przekroju dwuteowym, itp. (rys. 10.15a). Pomijając udział ścianki w przenoszeniu naprężeń normalnych, tj. zakładając, iż ścianka przenosi tylko naprężenia styczne, mamy zgodnie z art. 7.3 $q = T/h = \text{const}$, a ilość energii od ścinania na jednostkę długości belki wynosi: $T^2/(2Gh\delta)$. Wracając do wzoru (10.17) widzimy zatem, iż odpowiednikiem figurującego tam wyrażenia κ/GA jest tutaj $1/Gh\delta$.

Wstawiając tę ostatnią wartość do (10.18) mamy

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{Gh\delta}} \quad (10.19a)$$

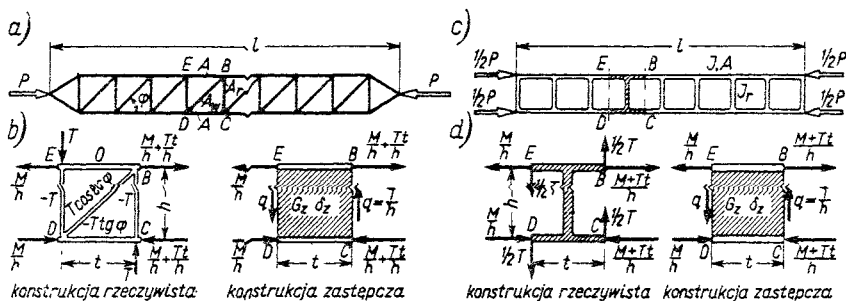
Wpływ siły poprzecznej przejawia się szczególnie jaskrawo w przypadku, gdy ścianka wykonana jest z materiału o małym G . Przypadek ten zachodzi w przecie warstwowym (rys. 10.15b), w którym należy wstawić G_w , b , h_w zamiast G , h , δ . W wyniku otrzymujemy

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{G_w h_w b}} \quad (10.19b)$$

Rys. 10.15. Oznaczenia do wzoru (10.19)

gdzie $P_E = \pi^2 E_1 J / l^2$, przy czym $J \approx 0,5b\delta h^2$. Biorąc na przykład $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $G_w = 4 \cdot 10^2 \text{ kg/cm}^2$, $h = 1,5 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $\delta = 1 \text{ mm}$, $l = 50 \text{ cm}$, otrzymujemy według (10.19b) $\sigma_{kr} = P_{kr}/2b\delta = 1020 \text{ kg/cm}^2$, zamiast $\sigma_E = P_E/2b\delta = 1550 \text{ kg/cm}^2$, a więc redukcję o $\sim 33\%$.

Drugi przypadek, gdy wpływ siły poprzecznej może znacznie zmodyfikować wartość siły krytycznej, jest przypadek ściskanych wielogrodziowych (liczba grodzi ≥ 5) słupów kratowych lub ramowych (rys. 10.16a,c), w których wykrzyżowania poprzeczne są z reguły znacznie bardziej wiotkie niż pasy



Rys. 10.16. Konstrukcje prętowe z dużą podatnością na działanie sił poprzecznych
Podane w prętach (rys. b) siły pochodzą tylko od T .

Wpływ ten uwzględnimy w sposób przybliżony, wprowadzając konstrukcję z zastępczą ścianką o tej samej sztywności na ścinanie co i dana konstrukcja*. Dla konstrukcji kratowej (rys. 10.16b) warunek ten prowadzi do zależności:

$$\frac{T^2}{2} \left(\frac{h}{EA_r} + \frac{t}{EA_w \sin^2 \varphi \cos \varphi} \right) = \frac{T^2 t}{2G_x h \delta_x}.$$

* Prowadzi to do warunku, aby ilość energii w obydwu konstrukcjach: rzeczywistej i zastępczej wywołana samą tylko siłą tnącą, była ta sama.

Określając stąd $1/G_z h \delta_z$ i wstawiając do (10.19a), otrzymujemy ostatecznie

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left(\frac{tg \varphi}{EA_r} + \frac{1}{EA_w \sin^2 \varphi \cos \varphi} \right)}, \quad (10.20a)$$

gdzie $P_E = \pi^2 EJ/l^2$ — siła eulerowska obliczona tak, jak gdyby słup był prętem o zwartym przekroju i momencie $J = 0,5A\bar{h}^2$, a A , A_w , A_r są odpowiednio polami przekrojów pasa, wykrzyżowania i rozpórki.

Dla konstrukcji ramowej (rys. 10.16c), uwzględniając, iż w środku każdej grodzi moment gnący pasy jest ≈ 0 (patrz art. 5.5), mamy

$$\frac{T^2 t}{2G_z h \delta_z} = \frac{T^2 t}{2} \left(\frac{t^2}{24EJ} + \frac{th}{12EJ_r} \right).$$

Postępując podobnie jak poprzednio, tj. wyznaczając $1/G_z h \delta_z$ i wstawiając do (10.19a), mamy

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left(\frac{t^2}{24EJ} + \frac{th}{12EJ_r} \right)}, \quad (10.20b)$$

gdzie $P_E = \pi^2 E \bar{J} / l^2$, $\bar{J} = 0,5A\bar{h}^2$ obliczone są tak, jak gdyby słup był prętem o przekroju zwartym, a J , J_r oznaczają momenty bezwładności przekroju pasa i rozpórki.

Określona wzorami (10.20) redukcja siły krytycznej może być znaczna. Tak na przykład w konstrukcji ramowej, gdy: $t/h = 2$, $J/\bar{J} = 4 \cdot 10^{-3}$, $l/h = 40$, $J/J_r = 1$, stosunek $P_{kr}/P_E \approx 0,67$, a więc redukcja siły jest o $\sim 33\%$ tej wartości, jaka istniałaby, gdyby elementy wiążące pasy były idealnie sztywne.

10.5. Wyboczenie skrętne pręta o profilu otwartym

Jak zaznaczono w art. 10.3, dla prętów cienkościennych o profilu otwartym wyboczenie giętno-skrętne może zachodzić przy niższej wartości naprężeń aniżeli wyboczenie giętne. Zanim rozpatrzymy ogólny przypadek (rys. 10.5b), rozwiążmy zadanie prostsze wyboczenia skrętnego, przy którym przekrój obraca się jako całość względem środka ciężkości. Jak udowodnimy później (patrz art. 10.6), przypadek taki może wystąpić, gdy środek sił poprzecznych (SP) pokrywa się z środkiem ciężkości (SC) przekroju (np. w przekroju zetowym, dwuteowym itp.).

Stosując w nieco zmienionej formie metodę analizy równowagi pręta w stanie wyboczonym (art. 10.1), *zadanie nasze* (rys. 10.17a) *podzielimy na dwa, z których pierwsze jest prostym ściskaniem pręta pomimo tego, że pręt ma postać odkształconą*. W tym celu, dzieląc cały przekrój na włókna, spróbujemy dodać takie obciążenia prostopadłe do danego włókna, aby było ono w stanie prostego ściskania. Warunek ten będzie wtedy spełniony, gdy w każdym punkcie włókna siła wypadkowa $\sigma_{kr} dA$ będzie styczna do osi włókna. Rysując kład włókna (rys. 10.17b) i zauważając, że przemieszczenie $w = \varrho \Phi$, mamy z warunku równowagi elementu dx .

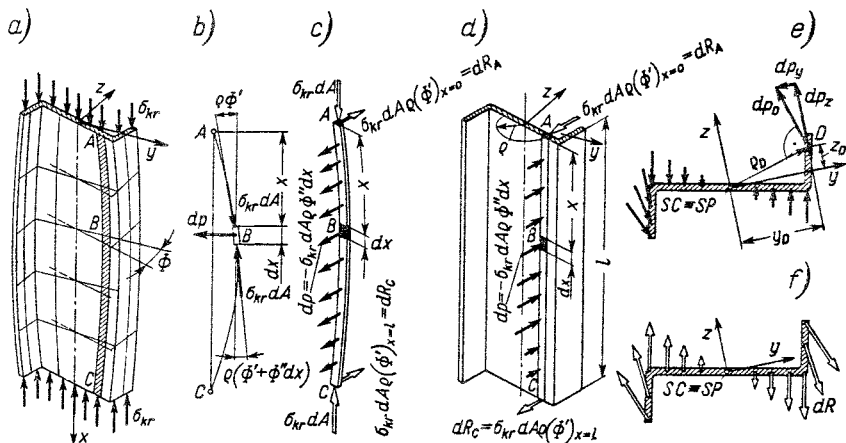
$$dp - (\sigma_{kr} dA) \frac{dw}{dx} + (\sigma_{kr} dA) \left(\frac{dw}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} dx \right) = 0,$$

a po przekształceniach

$$dp = -(\sigma_{kr} dA) \varrho \Phi'' dx,$$

jako wartość dodatkowego obciążenia*; utrzymującego w równowadze rozpatrywane włókno, gdy według założenia ma się ono znajdować w stanie prostego ściskania.

Statykę całego włókna podaje rys. 10.17c, przy czym, aby zapewnić jego równowagę, w przekrojach końcowych muszą być dodane dwie siły $dR_A = (\sigma_{kr} dA) \varrho(\Phi')_{x=0}$ oraz $dR_C = (\sigma_{kr} dA) \varrho(\Phi')_{x=l}$. Ponieważ przy tym każde włókno skraca się jednakowo i nie



Rys. 10.17. Wyboczenie skrętne pręta o przekroju otwartym

a) ogólny obraz odkształceń; b) kład włókna ABC; c) statyka włókna w pierwszym zadaniu składowym; d), e), f) — obciążenia w drugim zadaniu składowym, a mianowicie: obciążenia włókna (rys. d), plasterka o długości dx (rys. e), górnego przekroju skrajnego (rys. f).

ma żadnej nieciągłości odkształceń, to pierwsze zadanie składowe, dzięki wprowadzeniu obciążeń dodatkowych, zostało rozwiązane.

Pozostaje do rozwiązania drugie zadanie składowe (rys. 10.17d), w którym obciążenie stanowią, wzięte z przeciwnym zwrotem, siły dp rozłożone na całej powierzchni pręta oraz układy sił dR_A i dR_C działające w przekrojach końcowych. Łatwo udowodnić, że siły dp , działające na odcinek pręta o długości dx (rys. 10.17e), dają tylko skręcający** moment o natężeniu m_s [kG·cm/cm] wynoszący

$$m_s dx = -\sigma_{kr} \Phi'' J_0 dx, \quad (10.21)$$

* Znak minus wynika z przyjętego za dodatni zwrotu siły dp jak na rys. 10.17b.

** A oto dowód: elementarna siła dp_D daje rzuty na osi y i z :

$$dp_y = -dp_D \frac{z_D}{\varrho_D} = (\sigma_{kr} \Phi'' dx) (z_D dA), \quad dp_z = dp_D \frac{y_D}{\varrho_D} = -(\sigma_{kr} \Phi'' dx) (y_D dA),$$

a sumy tych rzutów

$$p_y = \sigma_{kr} \Phi'' dx \int_A z_D dA, \quad p_z = -\sigma_{kr} \Phi'' dx \int_A y_D dA$$

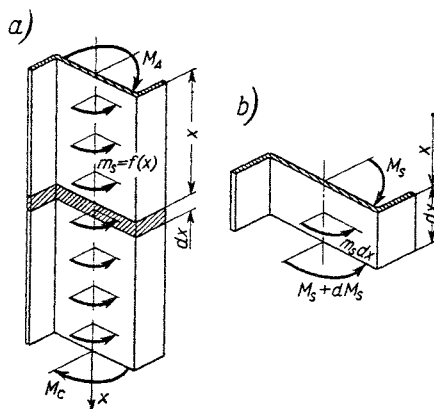
są równe zero, gdyż całki przedstawiają moment statyczny względem osi centralnych. Podobnie moment sił $dp_D \varrho_D$, zsumowany dla wszystkich elementów dA , jest:

$$m_s dx = -\sigma_{kr} \Phi'' dx \int_A \varrho_D^2 dA = -\sigma_{kr} \Phi'' J_0 dx.$$

gdzie J_0 — biegunowy moment bezwładności przekroju względem SC. W przekrojach końcowych działają też tylko momenty skręcające

$$M_A = +\sigma_{kr} J_0 (\Phi')_{x=0}, \quad M_C = +\sigma_{kr} J_0 (\Phi')_{x=l},$$

zapewniające równowagę całego pręta w drugim zadaniu składowym (rys. 10.18). Osobliwością przy tym jest, że wszystkie obciążenia jak i reakcje M_A i M_C są funkcjami nieznanego na razie kąta skręcenia Φ .



Rys. 10.18. Układ wypadkowych obciążeń w drugim zadaniu składowym przy wyboczeniu skrętnym
b) statyka plasterka pręta.

Ponieważ dla profilu mającego sztywność C na swobodne skręcanie (art. 6.3) oraz sztywność C_s na skręcanie nieswobodne (art. 6.7) zachodzi następująca zależność* momentu skręcającego M_s od kąta skręcenia Φ (wzór 6.37)

$$M_s = C\Phi' - C_s\Phi''',$$

to rozpatrując równowagę elementu pręta (rys. 10.18b), mamy

$$m_s dx + dM_s = -\sigma_{kr} J_0 \Phi'' dx + (C\Phi'' dx - C_s \Phi^{IV} dx) = 0,$$

a po przekształceniach

$$(C - \sigma_{kr} J_0) \Phi'' - C_s \Phi^{IV} = 0. \quad (10.22)$$

Zależność powyższa musi zachodzić, aby pręt mógł istnieć w równowadze w postaci odkształconej, tj. wyboconej skrętnie.

Rozwiązanie równania (10.22) przeprowadzimy naprzód dla profili, których sztywność nieswobodnego skręcania $C_s = 0$ (rys. 10.5c). W takim przypadku wyboczenie skrętnie zaistnieje wtedy, gdy $\Phi'' \neq 0$, a to prowadzi do wyniku

$$\sigma_{kr} = C/J_0. \quad (10.23)$$

* Konieczność uwzględnienia drugiego składnika jest uzasadniona tym, że kąt Φ może być nie-
liniową funkcją x , wobec czego $\Phi'' \neq 0$ i $\Phi''' = 0$.

Dla przekroju krzyżowego (rys. 10.5c) mamy (patrz tabl. 6.2):

$$C = \frac{G}{3} (b \delta_b^3 + h \delta_h^3), \quad J_0 = \frac{\delta_b b^3}{12} + \frac{\delta_h h^3}{12},$$

skąd po wprowadzeniu oznaczeń $\psi = b/h$, $\eta = \delta_b/\delta_h$ mamy

$$\sigma_{kr} = 4G \left(\frac{\delta_h}{h} \right)^2 \frac{1 + \psi \eta^3}{1 + \psi^3 \eta}. \quad (10.24a)$$

W szczególnym przypadku, gdy $h = b$, $\delta_h = \delta_b = \delta$, mamy:

$$\sigma_{kr} = 4G (\delta/h)^2. \quad (10.24b)$$

Wzór (10.23) wykazuje, że wielkość naprężenia krytycznego nie zależy od długości pręta. Wynika to stąd, że w pierwszym zadaniu składowym pominęliśmy sztywność ścianek profilu na zginanie w kierunku prostopadłym do tych ścianek. Gdyby to uwzględnić, charakter wykresu $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ przybrałby postać według linii *EC* (rys. 10.6) zamiast być linią poziomą, tak jak to określają wzory (10.24).

Z wzoru (10.23) wynika również, iż niebezpieczeństwo wyboczenia skrętnego dla profili rurowych nie istnieje, albowiem w takich profilach stosunek C/J_0 jest rzędu modułu G . Tak na przykład dla rury kwadratowej o boku a i grubości δ wielkość C określona ze wzoru Bredta (6.7) wynosi

$$C = \frac{M_s}{\varphi} = \frac{4GF^2}{p} = \frac{4G(a^2)^2}{4(a/\delta)} = Ga^3\delta.$$

Ponieważ przy tym $J_0 = 4a^3\delta/3$, to ze wzoru (10.23) otrzymujemy

$$\sigma_{kr} = C/J_0 = 3G/4 \approx 0,3E,$$

a więc znacznie wyższe niż naprężenia krytyczne wyboczenia giętnego.

Przechodząc obecnie do bardziej złożonego przypadku wyboczenia skrętnego, gdy w równaniu (10.22) $C_s \neq 0$, zauważymy, iż rozwiązanie tego równania ma postać

$$\Phi = A_0 + A_1 x + A_2 \sin kx + A_3 \cos kx, \quad (10.25)$$

gdzie

$$k^2 = (\sigma_{kr} J_0 - C)/C_s.$$

Wartość czterech stałych $A_0, \dots, A_3$ można wyznaczyć, gdy określone są warunki podparcia końców pręta. Jeśli na przykład obydwie końce pręta nie mogą się obracać, natomiast mogą się swobodnie pacyć, to zgodnie ze wzorem (6.27) mamy

$$\Phi = 0 \quad \text{oraz} \quad \Phi'' = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0 \quad \text{oraz} \quad x = l.$$

Podstawiając te warunki do (10.25), otrzymujemy:

$$A_0 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_1 l + A_2 \sin kl = 0, \quad A_2 k^2 \sin kl = 0$$

Jeśli w ostatniej z powyższych zależności założymy $\sin kl \neq 0$, to wtedy zarówno A_2 , jak i A_1 muszą być równe zero i jedyną możliwą postacią równowagi może być $\Phi \equiv 0$, tj. równowaga pręta w postaci prostej. Jeśli jednak σ_{kr} osiągnęło taką wartość, iż

$$\sin kl = 0, \quad \text{tj.} \quad kl = n\pi, \quad (10.26)$$

to może istnieć równowaga pręta w postaci skróconej*, gdyż wtedy $A_1 = 0$; $A_2 \neq 0$, a kąt skrócenia zmienia się według prawa:

$$\Phi = A_2 \sin kl.$$

* Podobnie jak i w przypadku wyboczenia giętnego (patrz Kurowski, Niezgodziński, *Wytrzymałość Materiałów*, PWN 1955) wielkość A_2 jest nieokreślona, co wynika z założenia małych odkształceń pręta.

Podstawiając obecnie do (10.26) wartość k , mamy:

$$\sigma_{kr} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} C_s \right). \quad (10.27)$$

Najmniejsza z wszystkich wartości σ_{kr} odpowiada $n = 1$, tj.

$$(\sigma_{kr})_{\min} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{\pi^2}{l^2} C_s \right) \quad (10.28)$$

i jak widać jest ona zawsze większa od wartości według wzoru (10.23), aczkolwiek różnica zmniejsza się wraz ze wzrostem smukłości.

Podane rozwiązanie (10.28) stanowi analogię do podstawowego przypadku giętnego wybooczenia pręta podpieranego przegubowo na obydwu końcach. Poza tym przypadkiem można rozpatrzeć i inne. Jeśli na przykład obydwa końce nie mogą się ani obracać, ani pacyć, to według art. 6.9

$$\Phi_{x=0} = \Phi_{x=l} = 0, \quad \Phi'_{x=0} = \Phi'_{x=l} = 0,$$

a rozwiązanie równania (10.25) czyniące zadość tym warunkom jest

$$\Phi = A_1(1 - \cos kx),$$

przy czym $kl = 2n\pi$. Najmniejsza wartość krytyczna odpowiada $n = 1$ i wtedy, podstawiając wyrażenie dla k , mamy:

$$(\sigma_{kr})_{\min} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{4\pi^2}{l^2} C_s \right). \quad (10.29)$$

Otrzymane rozwiązanie stanowi analogię do wybooczenia giętnego w przypadku idealnego utwierdzenia obydwu końców. Podobnie w przypadku idealnego utwierdzenia końca $x = 0$ przy całkowicie swobodnym końcu $x = l$, mamy następujące warunki brzegowe:

$$\Phi_{x=0} = 0, \quad \Phi'_{x=0} = 0, \quad \Phi''_{x=l} = 0,$$

$$(M_s)_{x=l} = C(\Phi')_{x=l} - C_s(\Phi''')_{x=l} = \sigma_{kr} J_0(\Phi')_{x=l},$$

skąd po podstawieniu do (10.25)

$$\Phi = A_0(1 - \cos kx),$$

przy czym $kl = \pi/2 + n\pi$. Najmniejsza wartość krytyczna zachodzi, gdy $n = 0$ i wtedy:

$$(\sigma_{kr})_{\min} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{\pi^2}{4l^2} C_s \right), \quad (10.30)$$

Wreszcie w przypadku gdy koniec $x = 0$ jest idealnie utwierdzony ($\Phi = 0$; $\Phi' = 0$), a drugi $x = l$ nie może się obracać, natomiast może się swobodnie pacyć ($\Phi = 0$; $\Phi'' = 0$) rozwiązanie równania (10.25) ma postać

$$\Phi = A_2 \left(kx_1 + \frac{\sin kx_1}{\cos kl} \right).$$

gdzie $x_1 = l - x$, a wielkość kl spełnia równanie przestępne

$$\operatorname{tg} kl = kl.$$

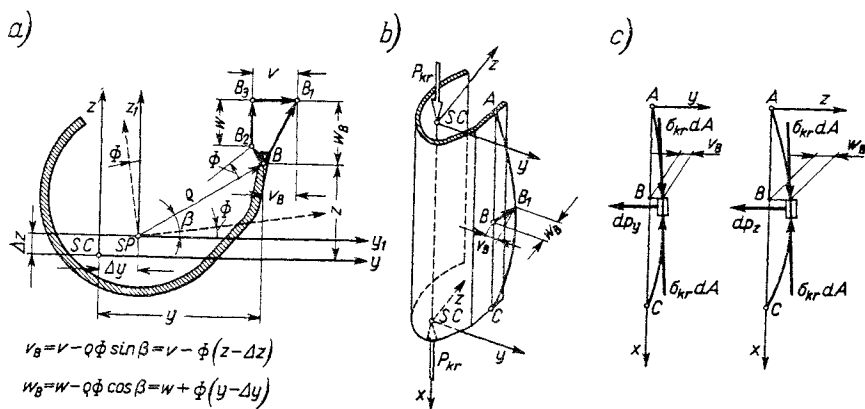
Najmniejszy pierwiastek tego równania jest $kl = 4,493$, a odpowiadające mu naprężenie krytyczne

$$(\sigma_{kr})_{\min} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{20,19}{l^2} C_s \right). \quad (10.31)$$

Dla stosowanych w stalowych konstrukcjach profili walcowanych bądź składanych z blach, naprężenia krytyczne, określone wzorami (10.27) ÷ (10.31), są z reguły wyższe od naprężeń odpowiadających wyboczeniu giętnemu, o ile tylko utwierdzenie końców na wyboczenie giętne ma ten sam charakter co i utwierdzenie na wyboczenie skrętne*.

10.6. Wyboczenie giętno-skrętne profili otwartych

Przechodząc do bardziej ogólnego przypadku wyboczenia giętno-skrętnego (rys. 10.5b), zastosujemy tę samą metodę co w art. 10.5. W tym celu musimy określić najpierw prze-



Rys. 10.19. Analiza giętno skrętnego wyboczenia pręta o przekroju otwartym

- a) określenie składowych przemieszczeń punktu B jako składowych wektora BB_1 ; b) włókno ABC w stanie wygiętym; c) rzuty tego włókna na płaszczyzny xy i xz . Oś y , z centralne główne.

mieszczenie dowolnego punktu B w płaszczyźnie przekroju, jeśli przekrój jako całość doznał przemieszczeń v i w w kierunku osi y i z oraz obrócił się o kąt Φ względem SP . Odpowiedź na to otrzymujemy z rys. 10.19a w postaci składowych przemieszczeń v_B i w_B

$$v_B = v - (z - \Delta z)\Phi, \quad w_B = w + (y - \Delta y)\Phi$$

gdzie Δy , Δz odległość** SP od SC w układzie centralnych głównych osi y , z .

* Ten sam charakter utwierdzenia przeciwko wyboczeniu giętnemu otrzymujemy, gdy zamiast pojęcia kąt Φ obrotu podstawimy pojęcie ugięcia pręta (patrz art. 6.9) Dająca się pomieścić teoretycznie odmiennność charakteru obu utwierdzeń nie ma dużego praktycznego znaczenia. Wymaga to jednak ze strony konstruktora zwrócenia na tę ewentualność uwagi. Jeśli na przykład końce pręta są podparte przegubowo (z uwagi na wyboczenie giętne), to należy również zadbać, aby utwierdzenie na końcach uniemożliwiało obrót Φ .

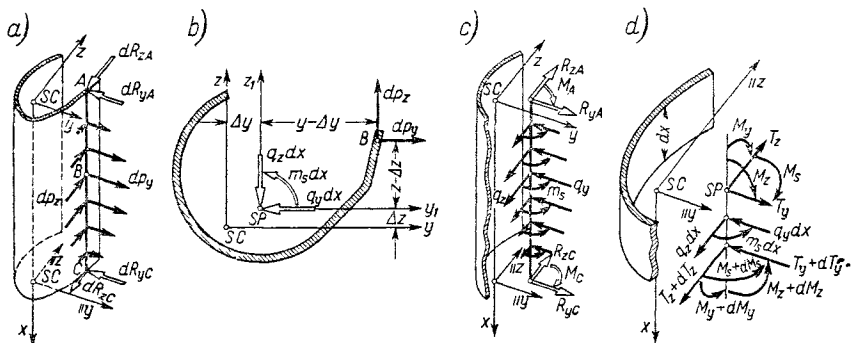
** Dla zaznaczenia, iż odległość SP mierzymy od osi y i z , a nie od dowolnie obranego punktu O (art. 6.6) zamiast oznaczeń e_y , e_z (wzór 6.24) wprowadzono odpowiednio Δy , Δz .

Aby teraz wyodrębnić pierwsze zadanie składowe, przy którym wszystkie włókna pręta będą w stanie prostego ściskania (rys. 10.17b, c), musimy dodać w płaszczyźnie przekroju obciążenie o składowych dp_y i dp_z (rys. 10.19b, c) równych

$$dp_y = -(\sigma_{kr} dA) v_B'' dx = -\sigma_{kr} dA dx [v'' - (z - \Delta z) \Phi''],$$

$$dp_z = -(\sigma_{kr} dA) w_B'' dx = -\sigma_{kr} dA dx [w'' + (y - \Delta y) \Phi''].$$

Rozwiązawszy w ten sposób zadanie pierwsze, przechodzimy do zadania drugiego, w którym obciążenie pręta (rys. 10.20a) stanowią wzięte z przeciwnym zwrotem siły



Rys. 10.20. Analiza drugiego zadania składowego przy wyboczeniu giętno-skrętnym
a) obciążenia włókna; b) obciążenia plasterka o długości dz ; c) wypadkowe obciążenie pręta; d) układ sił wewnętrznych działających na plasterkę pręta o długości dz .

dp_y , dp_z rozłożone na powierzchni oraz siły dR_y , dR_z w przekrojach końcowych tego pręta. Postępując jak poprzednio (art. 10.5) udowodnimy*, że wypadkowe obciążenie, działające na odcinek pręta o długości dx , zredukowane do SP, daje następujące siły q_y dx , q_z dx oraz moment m_s dx :

$$\begin{aligned} q_y dx &= P_{kr} dx (v'' + \Delta z \Phi''), & q_z dx &= P_{kr} dx (w'' - \Delta y \Phi''), \\ m_s dx &= -\sigma_{kr} J_{SP} \Phi'' + P_{kr} \Delta y w'' - P_{kr} \Delta z v'', \end{aligned} \quad (10.32)$$

gdzie $J_{SP} = J_x + J_y + A(\Delta y^2 + \Delta z^2)$ — biegunowy moment bezwładności względem SP, a q_y kG/cm, q_z kG/cm, m_s kGcm/cm są obciążeniami ciągłymi na jednostkę długości pręta. W rezultacie więc drugie zadanie składowe sprowadza się do rozwiązania równowagi belki, obciążonej w sposób ciągły przez q_y , q_z , m_s (rys. 10.20c), przy tym, jak w art. 10.5, obciążenia te są funkcjami nieznanymi przemieszczeń v , w , Φ . Aby więc rozwiązać

* A oto dowód: Suma rzutów na oś y przy uwzględnieniu przyjętego zwrotu siły q_y dx

$$q_y dx = - \int_A dp_y = \sigma_{kr} dx [(v'' + \Delta z \Phi'') \int_A dA - \Phi'' \int_A z dA].$$

Biorąc pod uwagę, że druga całka jest równa zeru, jako moment statyczny, a ponadto $\sigma_{kr} A = P_{kr}$, gdzie P_{kr} — siła ściskająca, mamy ostatecznie pierwszy z wzorów (10.32). Podobnie dowodzi się słuszności wyrażen dla q_z dx i m_s dx .

zagadnienie, musimy sformułować trzy równania. Wycinając w tym celu odcinek pręta (rys. 10.20d), piszemy równania równowagi:

$$\frac{dT_z}{dx} = -q_z, \quad \frac{dT_y}{dx} = -q_y, \quad \frac{dM_y}{dx} = T_z, \quad \frac{dM_z}{dx} = T_y, \quad \frac{dM_s}{dx} + m_s = 0.$$

Korzystając następnie z (10.21b) oraz równań linii ugięcia

$$EJ_y w'' = M_y, \quad EJ_z v'' = M_z$$

mamy po przekształceniach:

$$EJ_y w^{IV} = -q_z, \quad EJ_z v^{IV} = -q_y, \quad C\Phi'' - C_s \Phi^{IV} + m_s = 0. \quad (10.33)$$

Podstawiając na koniec do powyższych równań wielkości q_y , q_z , m_s z (10.32), otrzymujemy układ trzech równań różniczkowych będący rozwiązaniem zagadnienia, a mianowicie:

$$EJ_y w^{IV} + P_{kr}(w'' - \Delta y \Phi'') = 0, \quad (10.34a)$$

$$EJ_z v^{IV} + P_{kr}(v'' + \Delta z \Phi'') = 0, \quad (10.34b)$$

$$C_s \Phi^{IV} - (C - \sigma_{kr} J_{SP}) \Phi'' - P_{kr}(w'' \Delta y - v'' \Delta z) = 0. \quad (10.34c)$$

Zanim przystąpimy do rozwiązywania tego układu, zauważmy, że w przypadku, gdy $\Delta y = \Delta z = 0$, a więc gdy SP pokrywa się z SC, wtedy każde z tych trzech równań staje się równaniem z jedną niewiadomą, a więc każde z nich można rozwiązać niezależnie od pozostałych. Oznacza to, że istnieją trzy różne i od siebie niezależne postacie wybożenia, z których dwa pierwsze odpowiadają wybożeniu giętnemu względem osi y lub z , ostatnia zaś identyczna z (10.22) jest wybożeniem skrętnym. Tak więc otrzymujemy potwierdzenie sformułowania podanego na początku art. 10.5.

Przechodząc do bardziej ogólnego przypadku, założmy na początek, że przekrój poprzeczny ma oś symetrii, np. oś y . Wtedy SP leży na tej osi ($\Delta z = 0$) i równanie (10.34b) staje się niezależne od pozostałych. Jeśli przy tym końce pręta są podparte przegubowo, to rozwiązanie tego równania daje siłę krytyczną P_v , odpowiadającą wybożeniu w płaszczyźnie symetrii xy , tj.

$$P_v = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}.$$

Pozostałe dwa równania, tj. (10.34a, c), rozwiązujemy podstawiając

$$w = B_w \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \Phi = B_\phi \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (10.35a)$$

Podstawienie to spełnia warunki przegubowego podparcia obu końców ($w = 0$; $w'' = 0$, dla: $x = 0$ oraz $x = l$), uniemożliwiającego swobodny obrót przekrojów końcowych ($\Phi = 0$), pozwalającego jednak na swobodne spaczenie tych przekrojów ($\Phi'' = 0$).

Po przekształceniach otrzymujemy układ dwóch równań

$$\begin{cases} (P_{kr} - P_w) B_w - P_{kr} \Delta y B_\phi = 0, \\ -P_{kr} \Delta y B_w + r_{SP}^2 (P_{kr} - P_s) B_\phi = 0, \end{cases} \quad (10.35b)$$

w których

P_w — krytyczna siła wybooczenia giętnego w płaszczyźnie xz ,

P_s — krytyczna siła wybooczenia skrętnego względem SP jako środka obrotu,

r_{SP} — biegunowy promień bezwładności przekroju względem SP.

Te wielkości są określone następująco

$$P_w = \pi^2 E J_y / l^2, \quad P_s = (A / J_{SP}) [(\pi^2 C_s / l^2) + C], \quad r_{SP} = \sqrt{J_{SP} / A}.$$

Aby jednorodny względem niewiadomych B_w i B_ϕ układ (10.35b) miał rozwiązania różne od zera, tj. aby pręt mógł istnieć w postaci wybooczonej, trzeba, żeby wyznacznik charakterystyczny tych równań był równy zeru. Prowadzi to do następującego równania kwadratowego względem siły P_{kr}

$$r_0^2 P_{kr}^2 - r_{SP}^2 (P_w + P_s) P_{kr} + r_{SP}^2 P_w P_s = 0,$$

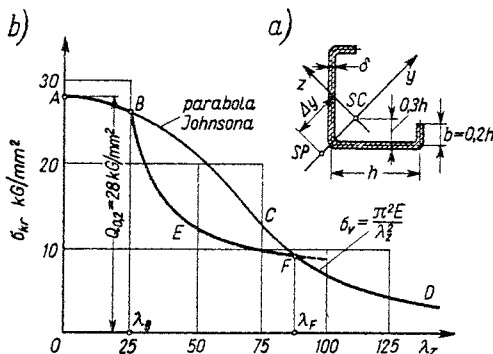
którego pierwiastki dają dwie wartości sił krytycznych P_1, P_2 , a mianowicie:

$$\left. \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\xi (P_w + P_s) \pm \sqrt{\xi^2 (P_w + P_s)^2 - 4\xi P_w P_s}}{2}, \quad (10.35c)$$

gdzie $r_0 = \sqrt{J_0 / A}$ — biegunowy promień bezwładności względem SC, a współczynnik $\xi = r_{SP}^2 / r_0^2$. Uwzględniając iż $\xi > 1$, z prostych rozważań otrzymujemy, że *wartość mniejszej z sił krytycznych jest mniejszej od mniejszej z sił P_w lub P_s* , a więc taka giętno-skrętne postać utraty stateczności będzie zachodzić w rzeczywistości.

Przeprowadzając pełną analizę wybooczenia, nie należy zapominać o możliwości wybooczenia czysto giętnego (siła P_v), wobec czego mniejszą z sił, tj. P_1 , należy porównać z siłą P_v i do obliczeń wziąć mniejszą z tych dwóch wartości.

Przykład. Wyznaczyć wartość $\sigma_{kr}(\lambda)$ dla kątownika duralowego (rys. 10.21a), jeśli $h/\delta = 15$, $b/h = 0,2$.



Rys. 10.21. Analiza wybooczenia pręta w funkcji smukłości

CFD — hiperbola Eulera, ABC — parabola Johnsona, BEF — wybooczenie skrętno-giętne; materiał: dural $E = 7,2 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$, $G/E = 0,37$.

Rozwiązanie. Wyznaczając wielkości charakteryzujące przekrój otrzymujemy

$$J_y = 0,496h^3\delta, \quad i_y^2 = 0,2067h^2, \quad J_z = 0,144h^3\delta, \quad i_z^2 = 0,0600h^2,$$

$$J_0 = J_y + J_z = 0,640h^3\delta, \quad r_0^2 = i_y^2 + i_z^2 = 0,2667h^2.$$

Ponadto, korzystając z danych tabl. 6.2 i 6.4, obliczamy:

$$\Delta y = -0,3h\sqrt{2} - e_y = -0,3h\sqrt{2} - \frac{0,2h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,52}{1,488} = -0,4760h,$$

$$C_s = 0,00412Eh^3\delta, \quad U = 0,800Gh\delta^3, \quad J_{SP} = 1,182h^3\delta.$$

Obecnie określamy wielkości naprężeń $\sigma_v, \sigma_w, \sigma_s$ odpowiadające wyjściowym wartościom P_v, P_w, P_s , odnosząc je wszystkie do smukłości $\lambda_z = l/i_z$. Tak więc:

$$\sigma_v = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2}, \quad \sigma_w = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} \frac{i_y^2}{i_z^2} = 3,45\sigma_v,$$

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A} = 5,80 \cdot 10^{-2} \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} + 0,676G \left(\frac{\delta}{h} \right)^2.$$

Podstawiając powyższe wartości do (10.35), przy uwzględnieniu, że $\xi = 1,848$, mamy

$$\sigma_{kr} = \frac{\xi}{2} (\sigma_w + \sigma_s) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\sigma_s\sigma_w}{\xi(\sigma_w + \sigma_s)^2}} \right].$$

Obliczając teraz poszczególne wartości σ_v i σ_{kr} dla wybranych wartości λ_z , otrzymujemy wykres jako linię $ABEFD$ (rys. 10.21b), przy czym na odcinku AB wyboczenie zachodzi jako niesprężyste giętnie w płaszczyźnie xy , na odcinku BEF jako sprężyste wyboczenie skrętno-giętnie i wreszcie na odcinku FD jako wyboczenie giętnie sprężyste w płaszczyźnie xy . Aby zmienić niekorzystną redukcję σ_{kr} w przedziale smukłości λ_B i λ_F , należałoby zwiększyć σ_s . Szczególnie dodatni efekt pod tym względem daje zwiększenie długości b pólek, gdyż zwiększa to bardzo znacznie wielkość C_s .

Przechodząc do najogólniejszego przypadku, gdy SP nie leży na żadnej z głównych osi centralnych, mamy do rozwiązania układ trzech równań (10.34) i jeśli końce są przegubowo podparte, to podstawiając do tych równań

$$v = B_v \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w = B_w \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \Phi = B_\Phi \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10.36a)$$

otrzymujemy trzy jednorodne równania liniowe względem B_v, B_w i B_Φ , podobne do układu (10.35b), a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} (P_{kr} - P_v)B_v + 0 + P_{kr}\Delta z B_\Phi &= 0, \\ 0 + (P_{kr} - P_w)B_w - P_{kr}\Delta y B_\Phi &= 0, \\ P_{kr}\Delta z B_v - P_{kr}\Delta y B_w + r_{SP}^2(P_{kr} - P_s)B_\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.36b)$$

Aby istniały niezerowe odpowiedzi B_v, B_w, B_Φ , tzn. aby pręt był w równowadze w postaci wyboczonej, wyznacznik charakterystyczny tego układu musi być równy zeru. Prowadzi to do następującego równania trzeciego stopnia określającego siłę P_{kr}

$$-r_0^2 P_{kr}^3 + [(P_v + P_w + P_s)r_{SP}^2 - \Delta y^2 P_v - \Delta z^2 P_w]P_{kr}^2 -$$

$$-r_{SP}^2(P_w P_v + P_w P_s - P_s P_v)P_{kr} + P_v P_w P_s r_{SP}^2 = 0, \quad (10.37)$$

gdzie oznaczenia sił P_v, P_w, P_s oraz r_0 i r_{SP} są jak poprzednio.

Rozwiązanie tego równania jedną ze znanych metod ścisłych lub przybliżonych daje trzy wartości siły P_{kr} , przy których pręt będzie w równowadze w postaci wyboczonej. Nie rozwiązując jednak równania, można z bezpośredniej analizy określić przedział, w którym znajduje się najmniejszy pierwiastek. Przypuśćmy mianowicie, że $P_v < P_w$.

Dla $P_{kr} = 0$ lewa strona równania (10.37) $P_v P_w P_s r_{SP}^2 > 0$, natomiast dla $P = P_v$ staje się ona ujemną, gdyż wynosi* $\Delta z^2 P_v^2 (P_v - P_w)$. Wynika stąd, iż między $P_{kr} = 0$ a $P_{kr} = P_v < P_w$ istnieje jeden pierwiastek. Tak więc przy możliwości wyboczenia giętno-skrętnego najmniejsza siła krytyczna jest mniejsza niż najmniejsza siła odpowiadająca wyboczeniu czysto giętnemu. Podobnie możemy udowodnić, iż z pozostałych dwóch pierwiastków jeden zawiera się między P_v a P_w , drugi zaś jest większy od P_w . W wyniku ustawienie pierwiastków P_1, P_2, P_3 względem 0, P_v i P_w jest

$$0 < P_1 < P_v < P_2 < P_w < P_3.$$

Dla otrzymania pełnego obrazu przeanalizujemy jeszcze wpływ wielkości siły P_s . W przypadku gdy pręt jest cienkościenny i krótki, P_s może stać się mniejsze od P_v i P_w . Analogiczne jak poprzednio rozważanie prowadzi do wniosku, iż najmniejsza siła krytyczna $P_1 < P_s$, aczkolwiek różnice nie są zbyt wielkie. Innymi słowy taki krótki pręt ulega wyboczeniu zbliżonemu do wyboczenia skrętnego. Przy dużych smukłościach λ siła P_s staje się większa od P_v i P_w dzięki obecności składnika (C/J_{SP}) niezależnego od smukłości. W takim przypadku siła P_1 , będąc stale mniejsza od mniejszej z sił (np. P_v), zbliża się do tej wartości i postać wyboczenia zbliża się do wyboczenia giętnego. Ta zmiana charakteru wyboczenia przejawia się również we względnej wielkości stałych B_v, B_w i B_ϕ , a mianowicie po obliczeniu siły P_1 i wstawieniu do układu trzech równań jednorodnych (10.36b) otrzymamy w pierwszym przypadku (małe λ) B_v i B_w jako bardzo małe w porównaniu do B_ϕ , podczas gdy w przypadku drugim (duże λ) B_ϕ i jedna z wartości, np. B_w , będą małe w porównaniu do B_v .

Otrzymane wyniki odpowiadają przegubowemu podparciu obu końców pręta, rozwiązanie można jednak otrzymać i dla innych przypadków podparcia. Jeśli na przykład obydwa końce są idealnie utwierdzone, to spełnienie warunków podparcia:

$$\left. \begin{array}{lll} v = 0, & w = 0, & \Phi = 0, \\ v' = 0, & w' = 0, & \Phi' = 0, \end{array} \right\} \text{ przy } \left\{ \begin{array}{l} x = 0; \\ x = l; \end{array} \right.$$

otrzymamy, wstawiając do równań równowagi (10.34):

$$v = B_v \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad w = B_w \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad \Phi = B_\phi \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Tok rozwiązania zostaje niezmienny i w wyniku otrzymujemy identyczne wzory (10.35) bądź (10.37) z tym tylko, że P_v, P_w, P_s są obecnie równe:

$$P_v = \frac{4\pi^2 EJ_z}{\gamma}, \quad P_w = \frac{4\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad P_s = \frac{A[C + (4\pi^2/l^2) C_s]}{J_{SP}}. \quad (10.38)$$

Wreszcie w przypadku pręta o jednym końcu swobodnym, drugim utwierdzonym bądź w przypadku przegubowego podparcia jednego końca, a utwierdzenia drugiego należy w oznaczeniach (10.38) zamiast $4\pi^2/l^2$ wstawić odpowiednio $\pi^2/4l^2$ lub $20,19/l^2$.

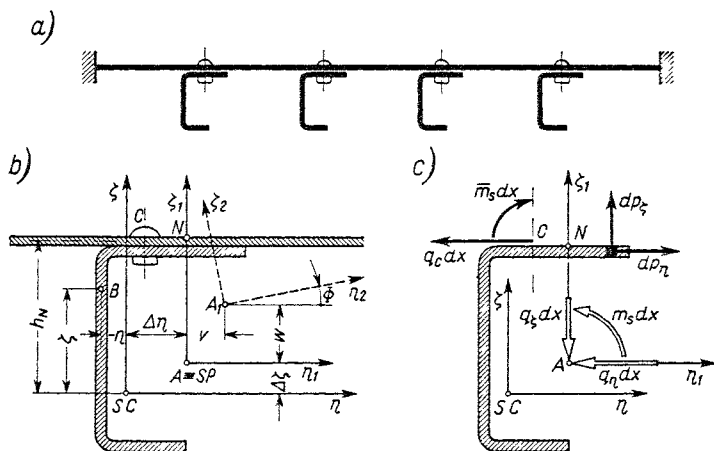
10.7. Nieswobodne wyboczenie giętno-skrętne

Rozpatrzone w art. 10.5 i 10.6 zagadnienia dotyczą przypadku, gdy ściskany osiowo pręt połączony jest z resztą konstrukcji tylko na końcach (np. w kratownicach). W kon-

* Należy wziąć pod uwagę, iż $r_{SP}^2 = r_0^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

strukcjach cienkościennych spotykamy jednak również przypadki, gdy ściskany pręt podparty jest na całej swej długości w ten sposób, że możliwość przemieszczenia pewnego włókna jest wyeliminowana całkowicie lub częściowo (rys. 10.22).

Wyznaczenie obciążeń krytycznych w takim przypadku *nieswobodnego wyboczenia* można by było przeprowadzić metodą z art. 10.6, jednakże przekształcenia byłyby dość złożone. Aby rozwiązanie uprościć, wprowadzamy w płaszczyźnie przekroju układ osi centralnych η i ζ , nie będących osiami głównymi, przy czym oś η jest równoległa, oś



Rys. 10.22. Przykład częściowego unieruchomienia profilu. Dzięki istnieniu pokrycia punkty C i N mogą się przemieszczać tylko pionowo

b) geometria przemieszczeń; c) układ obciążeń działających na plasterkę o długości dx .

ζ prostopadła do pokrycia (rys. 10.22). Podobnie jak w art. 10.6 przemieszczenia v_B i w_B dowolnego punktu B przekroju po wyboczeniu wyrażamy przez przemieszczenia v i w punktu SP oraz kąt obrotu Φ względem tegoż punktu, otrzymując te same co poprzednio zależności, w których tylko zamiast y, z figurują odpowiednio η i ζ . Tak więc

$$v_B = v - (\zeta - \Delta\zeta)\Phi, \quad w_B = w + (\eta - \Delta\eta)\Phi,$$

przy czym z warunków zagadnienia wynika, że wszystkie punkty półki połączonej z pokryciem mają przemieszczenie $v_N = 0$, tj.

$$v_N = v - (h_N - \Delta\zeta)\Phi = 0. \quad (10.39)$$

Wyodrębniając jak poprzednio pierwsze zadanie składowe, w którym każde włókno pracuje w stanie prostego ściskania, otrzymujemy dodatkowo obciążenia dp_η i dp_ζ jako

$$dp_\eta = -\sigma_{kr} dA dx [v'' - (\zeta - \Delta\zeta)\Phi''],$$

$$dp_\zeta = -\sigma_{kr} dA dx [w'' + (\eta - \Delta\eta)\Phi''].$$

Przechodząc do drugiego zadania składowego, zauważamy jedną istotną różnicę w porównaniu z analogicznym zadaniem poprzednim (rys. 10.20c), polegającą na tym, że na odcinek pręta o długości dx poza obciążeniami dp_η i dp_ζ działają reakcje pokrycia.

Sprowadzają się one (rys. 10.22c) do pewnego obciążenia ciągłego $q_C dx$, równoległego do osi η , oraz do momentu utwierdzenia $\overline{m}_s dx$, o którym zakładamy, że jest proporcjonalny do kąta Φ obrotu*, tj.

$$\overline{m}_s = K_\Phi \Phi.$$

Wyznaczając teraz wypadkowe obciążenia $q_\eta dx$, $q_\zeta dx$ i $m_s dx$ o dodatnich zwrotach, jak podano na rys. 10.22c, mamy po przekształceniach**

$$q_\eta dx = [q_C + P_{kr}(v'' + \Delta\zeta \Phi'')] dx, \quad (10.40a)$$

$$q_\zeta dx = P_{kr}(w'' - \Delta\eta \Phi'') dx, \quad (10.40b)$$

$$m_s dx = [-K_\Phi \Phi + q_N(h_N - \Delta\zeta) - \sigma_{kr} J_{SP} \Phi'' + P_{kr} w'' \Delta\eta - P_{kr} v'' \Delta\zeta] dx. \quad (10.40c)$$

Aby teraz sformułować warunki równowagi, zauważmy, że trzecie równanie (10.33c) zostaje bez zmian, natomiast pozostałe, gdy osie η i ζ nie są główne, przyjmują postać***:

$$EJ_\eta w^{IV} + EJ_{\eta\zeta} v^{IV} = -q_\zeta, \quad (10.41a)$$

$$EJ_{\eta\zeta} w^{IV} + EJ_\zeta v^{IV} = -q_\eta, \quad (10.41b)$$

gdzie

J_η, J_ζ — momenty bezwładności względem osi η, ζ ;

$J_{\eta\zeta}$ — moment odśrodkowy względem tychże osi.

Podstawiając więc do tych równań wyrażenia (10.40a) i (10.40b), a do trzeciego z równań (10.33) wyrażenie (10.40c) dla m_s , mamy trzy równania z niewiadomymi v, w, Φ oraz q_C :

$$EJ_{\eta\zeta} w^{IV} + EJ_\zeta v^{IV} + P_{kr}(v'' + \Delta\zeta \Phi'') + q_C = 0, \quad (10.42a)$$

$$EJ_\eta w^{IV} + EJ_{\eta\zeta} v^{IV} + P_{kr}(w'' - \Delta\eta \Phi'') = 0, \quad (10.42b)$$

$$C_s \Phi^{IV} - (C - \sigma_{kr} J_{SP}) \Phi'' + K_\Phi \Phi - P_{kr}(w'' \Delta\eta - v'' \Delta\zeta) - q_C(h_N - \Delta\zeta) = 0. \quad (10.42c)$$

Ponieważ brakującym czwartej równaniem jest zależność (10.39), więc korzystając z niej rugujemy wszędzie v przez Φ . Ponadto wyznaczając z (10.42a) nieznaną wartość q_C i podstawiając do (10.42c), otrzymujemy ostatecznie dwa równania z niewiadomymi w i Φ :

$$EJ_\eta w^{IV} + P_{kr} w'' + EJ_{\eta\zeta}(h_N - \Delta\zeta) \Phi^{IV} - P_{kr} \Delta\eta \Phi'' = 0, \quad (10.43a)$$

$$[C_s + EJ_\zeta(h_N - \Delta\zeta)^2] \Phi^{IV} - [C - \sigma_{kr} J_{SP} - P_{kr}(h_N^2 - \Delta\zeta^2)] \Phi'' + \\ + K_\Phi \Phi + EJ_{\eta\zeta}(h_N - \Delta\zeta) w^{IV} - P_{kr} \Delta\eta w'' = 0. \quad (10.43b)$$

* Pomijamy przy tym oddziaływanie pokrycia w kierunku osi ζ , gdyż jak pokazuje dokładniejsza analiza ma ono bardzo mały wpływ.

** Porównaj z wzorami (10.32).

*** Uwzględniając mianowicie wzory (6.18) (art. 6.5) mamy po ich dwukrotnym zróżniczkowaniu i wprowadzeniu oznaczeń η, ζ zamiast y, z

$$d^2 M_\eta / dx^2 = EJ_\eta w^{IV} + EJ_{\eta\zeta} v^{IV}, \quad d^2 M_\zeta / dx^2 = EJ_{\eta\zeta} w^{IV} + EJ_\zeta v^{IV}.$$

Z artykułu 10.6 mamy z równań równowagi elementu (rys. 10.20d)

$$d^2 M_\eta / dx^2 = -q_\zeta, \quad d^2 M_\zeta / dx^2 = -q_\eta,$$

które po podstawieniu do poprzednich zależności dają wzory (10.41a) i (10.41b).

Zanim rozwiążemy te równania w przypadku ogólnym, rozważmy przypadek szczególny, gdy przekrój jest symetryczny, a oś symetrii prostopadła do pokrycia. W takim przypadku osie η i ζ stają się osiami głównymi ($J_{\eta\zeta} = 0$), SP leży na osi symetrii ($\Delta\eta = 0$) i obydwa równania (10.43) stają się od siebie niezależne. Podobnie jak w art. 10.6 oznacza to, że obydwa postacie wybożenia: giętne i skrętne zachodzą niezależnie od siebie. Jeśli przy tym końce pręta są podparte przegubowo, to siła krytyczna P_w , odpowiadająca wybożeniu w płaszczyźnie $x\zeta$, jest ogólnie biorąc

$$P_w = \frac{n^2 \pi^2 EJ_\zeta}{l^2} \quad (10.44a)$$

i najniższa jej wielkość odpowiada $n = 1$.

Wartość siły krytycznej P_s odpowiadającą wybożeniu skrętnemu otrzymamy wstawiając do (10.43b) wyrażenie $\Phi = B_\phi \sin(n\pi x/l)$, odpowiadające unieruchomieniu obydwu końców przeciwko obracaniu się ($\Phi_{x=0} = \Phi_{x=l} = 0$) przy swobodzie pacyenia się tych przekrojów ($\Phi'_{x=0} = \Phi'_{x=l} = 0$). Przekształcenia dają wynik:

$$P_s = \frac{1}{r_N^2} \left[C_{sN} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + C + K_\phi \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \right], \quad (10.44b)$$

w którym oznaczenia

$$C_{sN} = C_s + EJ_\zeta (h_N - \Delta\zeta)^2, \quad r_N^2 = r_{sP}^2 + h_N^2 - \Delta\zeta^2$$

mają określony sens fizyczny. Można mianowicie udowodnić, że C_{sN} jest sztywnością nieswobodnego skręcania, jeśli środkiem obrotu jest punkt N , podczas gdy r_N jest biegunowym promieniem bezwładności przekroju względem tegoż punktu N .

Jak widać, dzięki sprężystemu utwierdzeniu postać wzoru (10.44b) przypomina przypadek giętnego wybożenia pręta podpartego sprężystości (patrz wzór 10.14) i dyskusja wyniku może być przeprowadzona jak poprzednio. W szczególności należy zwrócić uwagę, że dla danej długości l pręta minimalna wartość $(P_s)_{\min}$ nie zawsze odpowiada $n = 1$. Po obliczeniu zatem parametrów* (C_{sN} , C , ...) należy we wzorze (10.44b) podstawić kolejno $n = 1, 2, 3, \dots$ i wybrać to n , której odpowiada $(P_s)_{\min}$. Wartość tę należy porównać z P_w obliczoną z (10.44a) dla $n = 1$ i dopiero wtedy można orzec jaka jest P_{kr} i jaka jej odpowiada postać wybożenia.

Przechodząc z kolei do bardziej ogólnego przypadku, gdy przekrój pręta jest dowolny, rozwiążemy równania (10.43) przy tych samych warunkach podparcia co poprzednio. Podstawiając

$$w = B_w \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \Phi = B_\phi \sin \frac{n\pi x}{l},$$

otrzymujemy po przekształceniach układ dwóch równań jednorodnych:

$$(P_w - P_{kr})B_w + [P_{\eta\zeta}(h_N - \Delta\zeta) + P_{kr} \Delta\eta]B_\phi = 0, \quad (10.45a)$$

$$[P_{\eta\zeta}(h_N - \Delta\zeta) + P_{kr} \Delta\eta]B_w + (P_s - P_{kr})B_\phi r_N^2 = 0, \quad (10.45b)$$

* Dużą pomocą są tu tabl. 6.2 i 6.4.

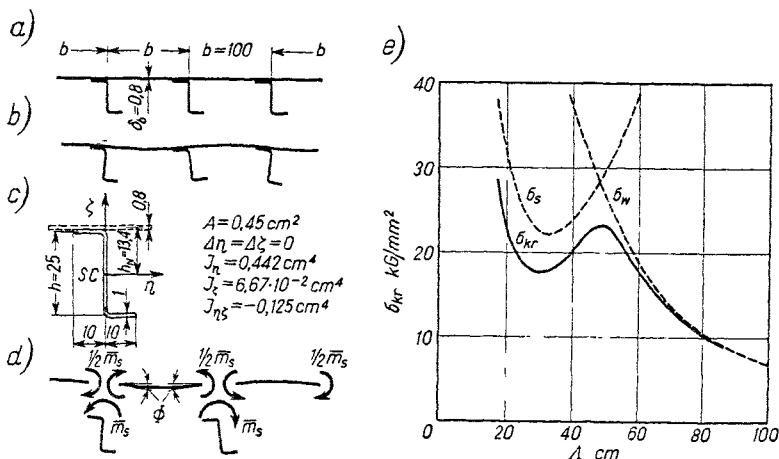
gdzie P_w , P_s określone są wzorami (10.44), a ponadto

$$P_{\eta\zeta} = \frac{n^2 \pi^2 E J_{\eta\zeta}}{l^2}. \quad (10.45c)$$

Postępując podobnie jak dotychczas i przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny tych równań, mamy w wyniku równanie kwadratowe

$$(P_w - P_{kr})(P_s - P_{kr})\eta_N^2 - [P_{\eta\zeta}(\eta_N - \Delta\zeta) + P_{kr} \Delta\eta]^2 = 0 \quad (10.46)$$

określające dwie wartości siły krytycznej P_{kr} . W równaniu tym zarówno P_w , jak i P_s są zależne od liczby półfal. Na skutek tego po wyznaczeniu P_{kr} należy przeprowadzić dyskusję wyniku w zależności od liczby półfal n , wybierając tę liczbę, której odpowiada najmniejsza wartość P_{kr} . Podobnie jak w przypadku swobodnego wybooczenia giętno-skrętnego (art. 10.5), tak i tu można udowodnić, że mniejszy pierwiastek równania (10.46) jest mniejszy od mniejszej z dwóch wartości P_w lub P_s . Przeprowadzenie dyskusji wybooczenia nieswobodnego dla innych przypadków podparcia pręta pozostawia się czytelnikowi.



Rys. 10.23. Analiza nieswobodnego wybooczenia giętno-skrętnego
b) założona postać odkształceń; d) układ oddziaływań między pokryciem a profilem.

nikowi, przy czym należy podkreślić, że pewne utrudnienie w dyskusji powoduje istnienie członu $K_\phi \Phi$ w równaniu (10.43b).

Przykład*. Zakładając, iż zebrowana konstrukcja, złożona z pokrycia i usztywniających go zetowników ($E = 7 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, $G = 2,7 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$), ulega wybooczeniu, jak podaje rys. 10.23b, wyznaczyć naprężenie σ_{kr} w funkcji długości fali $\lambda = (l/n)$.

Rozwiązanie. Przystępując do rozwiązania zagadnienia wyznaczmy najpierw wszystkie wartości wchodzące do równania (10.46). W tym celu wyznaczamy wielkości geometryczne oraz sztywności (patrz tabl. 6.2 i 6.4) jak następuje:

$$E J_\eta = 3,10 \cdot 10^5 \text{ kGcm}^2, \quad E J_\zeta = 0,481 \cdot 10^5 \text{ kGcm}^2, \quad E J_{\eta\zeta} = -0,875 \cdot 10^5 \text{ kGcm}^2,$$

$$C = 4,05 \cdot 10^5 \text{ kGcm}^2, \quad C_s = 0,486 \cdot 10^5 \text{ kGcm}^2$$

* Uzupełnienie tego przykładu patrz str. 534 ... 535.

oraz

$$r_{SP}^2 = J_{SP}/A = (J_\eta + J_\zeta)/A = 1,135 \text{ cm}^2, \quad h_N = 1,34 \text{ cm}, \quad h_N^2 = 1,800 \text{ cm}^2.$$

Jako ostatnią daną wyjściową pozostaje jeszcze wyznaczyć współczynnik K_Φ utwierdzenia sprężystego. Rysując pasek blachy o szerokości 1 cm i długości b widzimy, iż jest on obciążony dwoma momentami $0,5 \bar{m}_s$ (rys. 10.23d), wobec czego, zgodnie z Wytrzymałością, zależność między kątem Φ a $\bar{m}_s$ ma postać

$$\Phi = \frac{\bar{m}_s b}{4EJ_b} = \frac{\bar{m}_s}{K_\Phi},$$

gdzie $J_b = \delta_b^3/12$ — moment bezwładności przekroju paska. Wyznaczając stąd K_Φ mamy

$$K_\Phi = \frac{E\delta^3}{3b} = \frac{7 \cdot 10^5 (0,08)^3}{3 \cdot 10} = 11,98 \frac{\text{kGem}}{\text{cm rad}}.$$

Podstawiając do wzorów (10.44) i (10.45b) wszystkie obliczone wartości przy wprowadzeniu oznaczenia dla $A = (l/n)$, mamy

$$\sigma_w = \frac{P_w}{A} = \frac{6,80 \cdot 10^6}{A^2}, \quad \sigma_s = \frac{P_s}{A} = \frac{1,010 \cdot 10^6}{A^2} \div 307 + 0,920 A^2,$$

$$\sigma_{\eta\zeta} = \frac{P_{\eta\zeta}}{A} = - \frac{1,920 \cdot 10^6}{A^2},$$

gdzie σ_w , σ_s i $\sigma_{\eta\zeta}$ są wyrażone w kG/cm^2 , gdy A jest w cm. Aby teraz obliczyć z równania (10.46) wartość $\sigma_{kr} = P_{kr}/A$, zauważmy, że w naszym przypadku $\Delta\eta = \Delta\zeta = 0$, gdyż SP pokrywa się SC. Wtedy:

$$(\sigma_w - \sigma_{kr})(\sigma_s - \sigma_{kr}) - \sigma_{\eta\zeta}^2 \frac{h_N^2}{h_N^2 + r_{SP}^2} = 0.$$

Podstawiając szereg wartości A , określamy kolejno σ_w , σ_s , $\sigma_{\eta\zeta}$ i rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy wynik podany na wykresie (rys. 10.23e), na którym naniesiono również przebieg σ_w , σ_s . Jak widać dla dużych wartości A σ_{kr} zbliża się do σ_w , co oznacza, że wyboczenie ma postać wyboczenia giętnego, natomiast dla małych i średnich wartości A krzywa σ_{kr} zbliża się w swym przebiegu do σ_s a więc wyboczenie ma postać zbliżoną do wyboczenia skrętnego.

Aby związać otrzymany rezultat z parametrem konstrukcyjnym, jakim jest rozstaw l zeber po-pręcznych, zauważmy, że musi być on całkowitą wielokrotnością A . Gdy jest on dany, to można określić szereg wartości A jako l/n (n — liczba naturalna) i następnie z wykresu (10.23e) wyznaczyć odpowiednie σ_{kr} . Jeśli na przykład $l = 60 \text{ cm}$, to biorąc $n = 1, 2, 3$ mamy:

$$(\sigma_{kr})_{n=1} = 1800 \text{ kG/cm}^2, \quad (\sigma_{kr})_{n=2} = 1770 \text{ kG/cm}^2, \quad (\sigma_{kr})_{n=3} = 2240 \text{ kG/cm}^2,$$

wobec czego wyboczenie znajdzie przy $n = 2$ ($A = 30 \text{ cm}$), a $\sigma_{kr} = 1770 \text{ kG/cm}^2$. Analizując otrzymany wynik, podkreślić należy niekorzystną dla konstruktora znaczną redukcję naprężeń krytycznych w porównaniu z wartością, jakiej należałoby oczekiwać, gdyby wyboczenie miało charakter giętny. Widać również, że w omawianej konstrukcji w celu należytego wykorzystania jej materiału należałoby dać zebrza bardzo gęsto rozstawione lub inaczej dobrać proporcje (patrz rozdz. 12). Z drugiej strony, gdy zgodzimy się pomimo wszystko na tak niskie naprężenia krytyczne (tj. $\approx 1770 \text{ kG/cm}^2$), to widać, że rozstaw zeber można swobodnie zmieniać aż do $l = 60 \text{ cm}$, nie wywołując tym żadnej specjalnej redukcji* σ_{kr} .

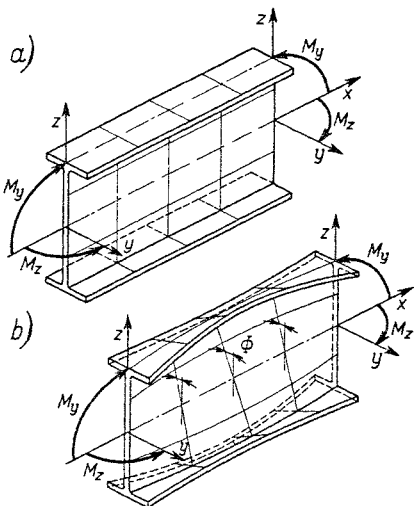
* Stwierdzenie to jest słuszne, o ile na konstrukcję nie działają obciążenia powierzchniowe prostopadłe do pokrycia. W przypadku ich działania zwiększenie rozstawu zeber powoduje zwiększenie momentów zginających od obciążenia lokalnego i prowadzi na ogół do szybszego (tj. przy mniejszych obciążeniach) zniszczenia konstrukcji przy mniejszych obciążeniach.

10.8. Zwichrzenie belek zginanych

Jak pociąga doświadczenie przy zginaniu belek o przekroju otwartym, a więc mających małą sztywność na skręcanie (rys. 10.24), może wystąpić utrata stateczności polegająca na przemieszczeniu się przekrojów poza płaszczyznę obciążenia z jednoczesnym ich obrotem względem osi podłużnej. Ograniczając się do przypadku czystego zgięcia $M_y = \text{const}$, $M_z = \text{const}$, rozwiązanie zadania przeprowadzimy podobnie jak w art. 10.6, wyodrębniając, przez wprowadzenie dodatkowego układu obciążeń, taki stan napięć, w którym każde włókno pracuje w stanie prostego rozciągania lub ściskania. Określając przemieszczenia przekroju przez dwa przesunięcia równoległe v , w i kąt Φ obrotu względem SP otrzymujemy na przemieszczenia dowolnego włókna identyczne wzory jak w art. 10.6. Podobnie rozumując, wyznaczamy siły dp_y i dp_z (rys. 10.19b, c), potrzebne do utrzymania rozpatrywanego włókna w stanie prostego rozciągania lub ściskania. Jedyna różnica w porównaniu z art. 10.6 tkwi w tym, że naprężenia stanu podstawowego, wywołane przez M_y i M_z nie są tym razem stałe we wszystkich włóknach, lecz zmieniają się według wzoru

$$\sigma_{kr} = \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z},$$

przy czym jako dodatnie przyjmujemy tu naprężenia ściskające*.



Rys. 10.24. Zjawisko zwichrzenia belek o przekroju otwartym

Podstawiając tę wartość σ_{kr} do odpowiednich wzorów z art. 10.6, otrzymamy w wyniku

$$dp_y = - \left(\frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} \right) [v'' - (z - \Delta z) \Phi''] dA dx, \quad (10.47a)$$

$$dp_z = - \left(\frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} \right) [w'' + (y - \Delta y) \Phi''] dA dx. \quad (10.47b)$$

Przechodząc do rozwiązania drugiego zadania, w którym obciążenie stanowią siły powierzchniowe dp_y i dp_z , wzięte z przeciwnym zwrotem, określmy najpierw wypadkowe obciążenia odcinka belki o długości dx . Biorąc pod uwagę przyjęte za dodatnie zwroty obciążeń ciągłych $q_y dx$, $q_z dx$, $m_s dx$ (rys. 10.25a), mamy po wykonaniu całkowania:

$$\left. \begin{aligned} q_y dx &= - \int_A dp_y = -M_y \Phi'' dx, \\ q_z dx &= - \int_A dp_z = +M_z \Phi'' dx, \\ m_s dx &= \int_A [-dp_y (z - \Delta z) + dp_z (y - \Delta y)] = \\ &= -\Phi'' [M_y a_z + M_z a_y] + (M_y v'' - M_z w''), \end{aligned} \right\} \quad (10.48)$$

* Osie y i z są przy tym obrane jako osie główne centralne.

gdzie a_y, a_z , wielkości* mierzone w cm, określone są

$$a_z = \frac{\int \varrho^2 z dA}{J_y} - 2 \Delta z, \quad a_y = \frac{\int \varrho^2 y dA}{J_z} - 2 \Delta y, \quad (10.49)$$

przy czym $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ — odległość danego włókna od środka ciężkości.

Ponieważ równania równowagi belki obciążonej przez q_y, q_z, m_s mają identyczną postać jak (10.33), więc podstawiając określone powyżej wartości, mamy w rezultacie

$$EJ_y w^{IV} + M_z \Phi'' = 0, \quad (10.50a)$$

$$EJ_z v^{IV} - M_y \Phi'' = 0, \quad (10.50b)$$

$$C_s \Phi^{IV} - (C - M_y a_z - M_z a_y) \Phi'' - M_y v'' + M_z w'' = 0. \quad (10.50c)$$

Otrzymany układ równań rozwiążmy w szczególnym przypadku, gdy przekrój ma oś symetrii, np. oś z , a ponadto sztywność $EJ_y \gg EJ_z$. Zakładając, że obciążenie belki stanowi tylko moment $M_y (M_z = 0)$ podstawmy dla v, w, Φ następujące wyrażenia:

$$v = B_v \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w \equiv 0, \quad \Phi = B_\Phi \sin \frac{\pi x}{l}$$

spełniające warunki przegubowego podparcia na końcach belki unieruchomionej dodatkowo w tych przekrojach przeciwko obrotowi względem osi x ($\Phi_{x=0} = \Phi_{x=l} = 0$), przy dozwolonym swobodnym spaceniu ($\Phi''_{x=0} = \Phi''_{x=l} = 0$).

W rezultacie, biorąc pod uwagę, że w naszym przypadku** $a_y = 0$, mamy układ dwóch równań względem B_v i B_Φ :

$$P_v B_v + M_y B_\Phi = 0,$$

$$M_y B_v + (C_z - M_y a_z) B_\Phi = 0,$$

w którym krytyczna siła P_v giętnego wyboczenia w płaszczyźnie xy oraz zastępcza sztywność C_z kGem² na skręcanie określone są następująco

$$P_v = \pi^2 EJ_z / l^2, \quad C_z = C + (\pi^2 C_s / l^2).$$

Równowaga belki w stanie zwichrzonym zajdzie wtedy, gdy powyższy układ będzie miał rozwiązania niezerowe, tj. wyznacznik charakterystyczny będzie równy zeru. Prowadzi to do następującej zależności

$$M_y^2 + P_v a_z M_y - P_v C_z = 0.$$

skąd

$$M_{ykr} = -\frac{P_v a_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_v a_z}{2}\right)^2 + P_v C_z}. \quad (10.51a)$$

* Wielkości a_y i a_z mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne. Wyznaczenie ich wartości w przypadku prostych przekrojów przeprowadzamy analitycznie, w przypadku przekrojów bardziej złożonych — tabelarycznie. W tym ostatnim przypadku, dzieląc przekrój na szereg pól A_i o współrzędnych środka ciężkości y_i, z_i otrzymujemy

$$a_z \approx \frac{\sum (y_i^2 + z_i^2) z_i A_i}{\sum A_i z_i^2} - 2 \Delta z, \quad a_y \approx \frac{\sum (y_i^2 + z_i^2) y_i A_i}{\sum A_i y_i^2} - 2 \Delta y,$$

gdzie $\Delta y, \Delta z$ identyczne są z e_y, e_z (wzory 6.24), o ile punkt O pokrywa się z SC (patrz art. 6.6).

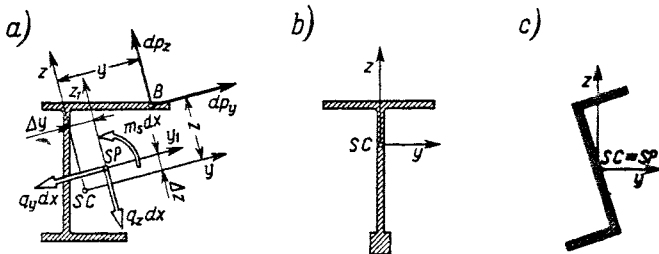
** Gdy oś z jest osią symetrii, to $\Delta y = 0$, a ponadto każdemu elementowi dA o współrzędnych ϱ i y odpowiada taki sam element o współrzędnych ϱ i $-y$, co dowodzi słuszności stwierdzenia. Gdy przekrój ma dwie osie symetrii, jak np. przekrój dwuteowy, to $a_y = a_z = 0$.

W odróżnieniu od rozważanych uprzednio przypadków wybooczenia obydwie odpowiedzi dla M_{ykr} , tj. dodatnia i ujemna, mają znaczenie techniczne, określając dwa przypadki zwiczenia; raz gdy moment M_y działa zgodnie z rys. 10.24 ($M_y > 0$); drugi raz zaś gdy działa przeciwnie. Powodem różnicy wartości M_{ykr} jest asymetria przekroju względem osi y , na skutek czego podparcie włókien ścisanych przez włókna rozciągane jest różne w obu przypadkach obciążenia. Jeśli na przykład dźwigar ma pasy górny i dolny ukształtowane w różny sposób (rys. 10.25b), to przy $M_y > 0$ ścisany pas górny ma znacznie większą sztywność w kierunku bocznym niż pas dolny. Odwrotna sytuacja zaistnieje, gdy $M_y < 0$, wobec czego należy przewidywać, iż wartości $|-M_{ykr}| < |+M_{ykr}|$, co zresztą potwierdzają rachunki. W przypadku gdy przekrój ma podwójną oś symetrii, $a_z = 0$, wtedy wielkość M_{ykr}

$$M_{ykr} = \pm \sqrt{P_w P_s r_0^2} = \pm \frac{\pi}{l} \sqrt{E J_z \left(C_s \frac{\pi^2}{l^2} + C \right)}, \quad (10.51b)$$

nie zależy od jego zwrotu. Ten sam wzór (10.51b) zostaje słuszny w przypadku symetrii punktowej względem SC, jak np. dla profilu zetowego, gdyż wtedy również $a_y = a_z = 0$ (rys. 10.25c).

Szczególne niebezpieczne z uwagi na małą wartość M_{ykr} są belki o przekroju otwartym, dla których C_s jest równe zeru (patrz tabl. 6.4). Podniesienie wartości M_{ykr} jest w takim przypadku możliwe tylko



Rys. 10.25. Układ elementarnych sił w przypadku zwiczenia belki zginanej (rys. a) oraz kształty przekroju podatnych na zwiczenie (rys. b÷c)

na drodze zgrubienia ścianek, tj. powiększenia C , co jednak ze względów ciężarowych jest nieekonomiczne. Dla belek natomiast o przekroju zamkniętym (rurowym) niebezpieczeństwo zwiczenia nie istnieje, gdyż sztywność C na swobodne skręcanie jest bardzo duża. Przybliżoną wartość M_{ykr} w takim przypadku wyznaczamy ze wzoru (10.51a), w którym pomijamy składnik $P_w a_z$ oraz przyjmujemy $C_z \approx C$.

Podobną analizę układu (10.50) można przeprowadzić w przypadku, gdy belka o przekroju symetrycznym względem osi z zginana jest momentem M_z ($M_y = 0$). W jej wyniku otrzymujemy

$$M_{zkr} = -\frac{P_w a_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_w a_y}{2}\right)^2 + P_w c_z}, \quad (10.52)$$

gdzie $P_w = \pi^2 E J_y / l^2$ — siła krytyczna wybooczenia giętnego w płaszczyźnie zx .

Wreszcie w ogólnym przypadku, gdy na podpartą przegubowo belkę działają jednocześnie momenty M_y i M_z , podstawienie do równań (10.50) następujących wyrażeń na odkształcenia:

$$v = B_v \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w = B_w \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \Phi = B_\Phi \sin \frac{\pi x}{l}$$

daje w wyniku zależność wiążącą obydwie wielkości M_y i M_z :

$$\frac{M_y^2}{P_v} + \frac{M_z^2}{P_w} + M_y a_z + M_z a_y - C_z = 0. \quad (10.53)$$

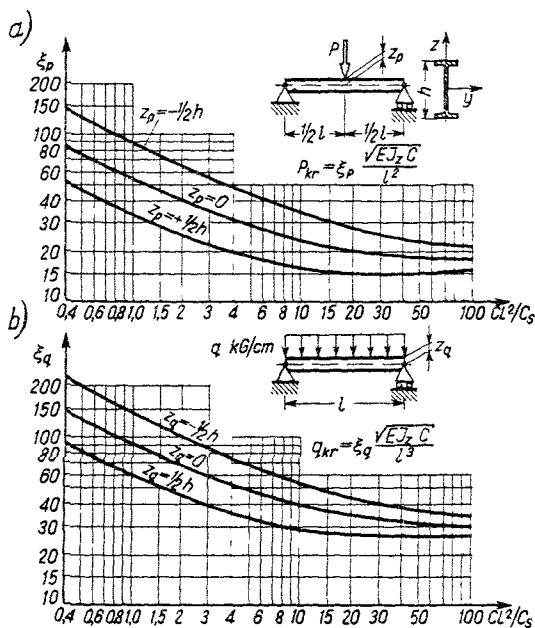
Wyznaczenie stąd krytycznych wartości M_y i M_z można przeprowadzić przy różnych założeniach. Jeśli na przykład M_z jest stałe, to otrzymujemy dwie wartości M_{ykr} , przy działaniu których belka

ulega zwirzeniu. Jeśli obydwa momenty narastają jednocześnie tak, że $M_x = \xi M_y$ (ξ – wartość znana), to po podstawieniu do (10.53) otrzymujemy znowu równanie z jedną niewiadomą M_y . Wynikiem rozwiązania są dwie wartości M_{ykr} , którym towarzyszą dwie wartości $M_{xkr} = \xi M_{ykr}$.

Rozwiązany przypadek zwirzenia przy czystym zginaniu i przegubowym podparciu przekrojów końcowych stanowi analogię podstawowego przypadku wybożenia giętnego. Jeśli przekroje końcowe są idealnie utwardzone bądź jeden koniec utwardzony, a drugi podparty przegubowo, bądź wreszcie jeden koniec utwardzony, a drugi swobodny, odpowiednie wzory dla M_{kr} otrzymamy wstawiając we wszystkich wzorach poprzednich (również i w C_x) zamiast $(\pi/l)^2$ odpowiednio wartości

$$(2\pi/l)^2, \quad (4,493/l)^2, \quad (\pi/2l)^2.$$

Poza omówionym przypadkiem zwirzenia przy czystym zginaniu w zagadnieniach technicznie ważnych mamy przypadki, gdy zwirzenie może powstać na skutek działania obciążeń poprzecznych, dających zmienne wzdłuż długości belki momenty gnące M_y i M_x . W takim przypadku równania równowagi (10.50) pozostają bez zmian, z tym tylko, że M_y i M_x są teraz znanymi funkcjami x . Ścisłe rozwiązanie takich równań następcza poważne trudności i dlatego ograniczymy się tu do podania wy-



Rys. 10.26. Wyniki analizy obciążeń krytycznych, wywołujących zwirzenie dwuteowe belki zginanej

ników dla często spotykanego przypadku dwuteowej belki o przekroju symetrycznym, obciążonej w płaszczyźnie większej sztywności (EJ_y) siłą skupioną pośrodku bądź obciążeniem równomiernie rozłożonym. Wyniki te (rys. 10.26) podane są w postaci współczynników ξ_P , ξ_q we wzorach

$$P_{kr} = \xi_P \frac{\sqrt{EJ_z C}}{l^2}, \quad q_{kr} = \xi_q \frac{\sqrt{EJ_z C}}{l^3}$$

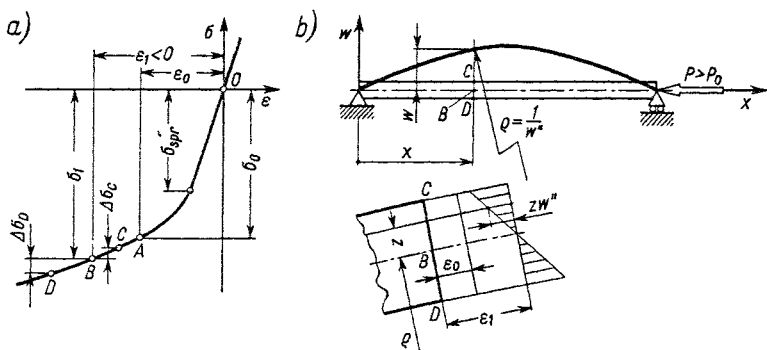
i zależą od bezwymiarowego stosunku (Cl^2/C_s) .

Należy przy tym podkreślić, że wartość obciążeń krytycznych odpowiadających zwirzeniu zależy od wysokości przyłożenia tych obciążeń nad lub pod ośią belki. Jeśli mianowicie obciążenie dzia-

lające do dołu przyłożone jest powyżej osi na górnym pasie, to obniża ono wartość ξ , dając przy zwichrzeniu dodatkowy moment skręcający pogłębiający to zwichrzenie. Odwrotny skutek wywiera przyłożenie obciążenia na dolnym pasie belki. W przypadkach pośredniego przyłożenia obciążeń można stosować interpolację liniową.

10.9. Wyboczenie poza granicami sprężystości

Przeprowadzone rozważania niezależnie czy dotyczą one wyboczenia giętnego, skrętnego, czy też zwichrzenia belek, biorą jako punkt wyjścia liniową zależność naprężeń od odkształceń, tj. gdy maksymalne naprężenia stanu podstawowego nie przekraczają granicy sprężystości materiału. Gdy więc z bezpośredniego zastosowania dotychczas wy-



Rys. 10.27. Analiza giętnego wyboczenia w zakresie plastycznym

a) charakterystyka ściskania (σ, ϵ) materiału, punkty B, C, D określają stan materiału włókien B, C, D przy $P_1 > P_0$,
b) stan odkształceń pręta; na rysunku dolnym obraz rozkładu ϵ w przekroju BCD.

prowadzonych wzorów otrzymamy $|\sigma_{kr}| > |\sigma_{spr}|$, to wynik musi być odpowiednio zmodyfikowany przez uwzględnienie nieliniowości wykresu $\sigma = f(\epsilon)$ (rys. 10.27). Okazuje się przy tym, że następstwa tej nieliniowości przejawiają się nie tylko w matematycznym ujęciu zagadnienia, lecz sięgają w sam model zjawisk zagadnień stateczności. Nie podważając bowiem podstawowego określenia, że stanem krytycznym jest taki stan, w którym może istnieć równowaga w postaci wychylonej od naturalnej, zastanówmy się nad sposobem samego przejścia do tej wychylonej postaci. W omawianym dotychczas sposobie były wyraźnie dwie fazy, a mianowicie faza pierwotnej równowagi, w której obciążenia podstawowe istnieją już w postaci rozwiniętej, i faza dodatkowego wychylenia (art. 10.1). Tak więc w modelu tym zakładamy a priori, iż te dwa zjawiska (obciążenia i wychylenia) są następującymi po sobie. Jest jednak do pomyślenia i inne postępowanie, a mianowicie, gdy te dwa zjawiska są jednoczesne, to znaczy iż wzrostowi obciążeń podstawowych towarzyszy jednocześnie wzrost dodatkowego wychylenia*. To rozróżnienie

* Rzeczą zupełnie dowolną i wymagającą sprecyzowania jest tempo wzrostu dodatkowego wychylenia w stosunku do wzrostu podstawowego obciążenia. Można na przykład obrać taki proces, w którym te dwa zjawiska są liniowo zależne. Równie dobrze jednak można przyjąć, że do pewnej wartości obciążeń podstawowych dodatkowe wychylenie jest równe zero, a jednoczesny wzrost obu wielkości zaczyna się dopiero od tej obranej wartości.

metod postępowania jest bez znaczenia, dopóki rozpatrujemy małe wychylenia i dopóki materiał ustroju jest sprężysty, gdyż obydwie metody dają te same wyniki. Inaczej jednak jest wtedy, gdy choćby jedno z tych założeń nie jest spełnione. Okazuje się bowiem że wynik końcowy (obciążenie krytyczne) zależy od przyjętego modelu zjawisk. W szczególności, gdy przyczyną nieliniowości jest materiał, to mniejsze wartości obciążeń krytycznych odpowiadają niestosowanemu dotychczas modelowi jednoczesnego narastania podstawowych obciążeń i dodatkowego wychylenia.

Wykorzystując powyższe stwierdzenia rozpatrzmy ściskany pręt (rys. 10.27b), w którym jego prosta postać została zachowana, aż do wartości $P = P_0$ bardzo bliskiej sile P_{kr} , przy czym zakładamy, że $|\sigma_0| = P_0/A > |\sigma_{spr}|$ (punkt A wykresu $\sigma-\varepsilon$). Przy dalszym wzroście siły $P_1 > P_0$ zakładamy *jednoczesny wzrost dodatkowego wychylenia w (wygięcia) tak dobrany, aby we wszystkich włóknach wyginającego się pręta (zarówno po stronie wypukłej jak i wklęsłej) następował wzrost skróceń*. Konsekwencją takiego modelu zjawisk jest to, że w danym przekroju BCD rozkład ε w funkcji z jest liniowy* (rys. 10.27b) i określony zależnością

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 + zw'' \quad (a)$$

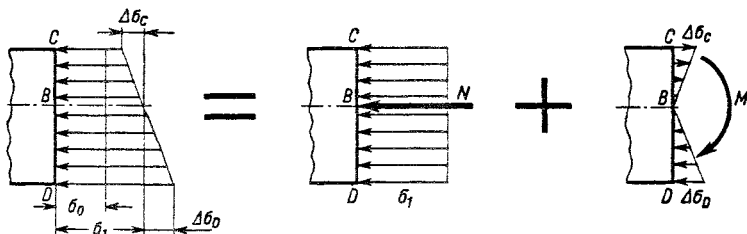
O ile wychylenie w jest małe, to odpowiadający temu rozkładowi ε rozkład naprężeń jest też liniowy** i określony następująco

$$\sigma = \sigma_1 + E_t zw'' \quad (b)$$

gdzie

σ_1 — naprężenie odpowiadające skróceniu ε_1 ,

$E_t = (d\sigma/d\varepsilon)_{\sigma=\sigma_0}$ — lokalne nachylenie wykresu $\sigma = f(\varepsilon)$ nazywane także *modułem stycznym odpowiadającym danej wartości σ_0* . Jak widać (rys. 10.28), rozkład naprężeń



Rys. 10.28. Rozkład naprężeń przy giętym wyboczeniu plastycznym

* Jak uczy doświadczenie, hipoteza płaskich przekrojów obowiązuje niezależnie od tego, czy materiał jest w stanie sprężystym, czy plastycznym. Przy działaniu $P > P_0$ następuje równomierny wzrost skróceń do wartości $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_0|$ oraz pojawienie się wydłużeń $\varepsilon_2 = zw''$ towarzyszących dodatkowemu wychyleniu w i określonych tak, jak w teorii zgięcia belek. Współrzędna z mierzona jest od tej warstwy, która przy samym tylko wygięciu jest warstwą obojętną.

** Ponieważ, zgodnie z przyjętym modelem, $\varepsilon - \varepsilon_0 < 0$ dla wszystkich włókien, więc wszystkie punkty na wykresie $\sigma - \varepsilon$ reprezentujące stany poszczególnych włókien leżą na lewo od punktu A . Jeśli w (a więc i w'') jest małe, to te zmiany naprężeń są też małe i wykres $\sigma - \varepsilon$ może być zastąpiony styczną o nachyleniu $(d\sigma/d\varepsilon)_{\sigma=\sigma_0}$.

w końcowej fazie procesu składa się ze stałego na całym przekroju naprężenia i rozkładu takiego jaki zaistnieje w zginanej belce o module sprężystości równym E_t .

Wypadkowe siły wewnętrzne odpowiadające tym dwóm rozkładom są: siła ściskająca N i moment gnący M równe

$$N = -\sigma_1 A, \quad M = E_t J_y w'', \quad (c)$$

gdzie J_y — moment bezwładności przekroju względem centralnej osi y prostopadłej do płaszczyzny xz , w której zachodzi dodatkowe wychylenie. Jeśli teraz założymy, że stan obciążenia siłą P_1 jest stanem krytycznym ($P_1 = P_{kr}$), to zgodnie z podstawowym określeniem, każdy element pręta musi być w stanie równowagi. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy

$$E_t J_y w'' = -P_1 w = -P_{kr} w. \quad (10.54)$$

Otrzymane równanie jest identyczne jak w przypadku materiału idealnie sprężystego, z tym tylko, że zamiast modułu E wchodzi moduł styczny E_t . Siła krytyczna będzie zatem zredukowana w stosunku E_t/E tej wartości, która odpowiada materiałowi idealnie sprężystemu. Jeśli więc ściskany pręt jest przegubowo podparty na obu końcach, to

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E_t J_y}{l^2}, \quad (10.55)$$

a naprężenia krytyczne

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda_y^2} \quad (10.56)$$

gdzie $\lambda_y = l/\sqrt{J_y A}$ — smukłość pręta odpowiadająca wyboczeniu w płaszczyźnie xz .

Podsumowując powyższe wyniki stwierdzamy, że giętne wyboczenie pojedynczego pręta w zakresie naprężeń przekraczających σ_{spr} jest określone identycznymi zależnościami co i w zakresie poniżej σ_{spr} . Jedyna różnica polega na zastąpieniu modułu E przez moduł styczny E_t , którego wartość zależy od wartości naprężenia krytycznego*.

Zależność (10.56) pozwala wyznaczyć przebieg $\sigma_{kr} = f(\lambda)$, jeśli tylko znana jest charakterystyka materiału, tj. $\sigma = f_1(\epsilon)$, z której możemy określić przebieg** $E_t = f_2(\sigma)$ (rys. 10.29a). Obierając teraz szereg wartości σ , określamy odpowiadające im wartości $E_t = d\sigma/d\epsilon$, a następnie z wzoru (10.56) wyznaczamy te wartości λ_y ,

$$\lambda_y = \pi \sqrt{E_t / \sigma_{kr}}, \quad (10.57)$$

dla których σ_{kr} jest równe obranym wartościom σ . W wyniku otrzymujemy wykres*** (rys. 10.29b), na którym dla porównania naniesiono parabolę Johnsona. Parabola ta ma wierzchołek na osi rzędnych ($\lambda = 0, \sigma = Q_{0,2}$), jest styczna do hiperboli $\sigma_{kr} = \pi^2 E / \lambda^2$ i ma równanie

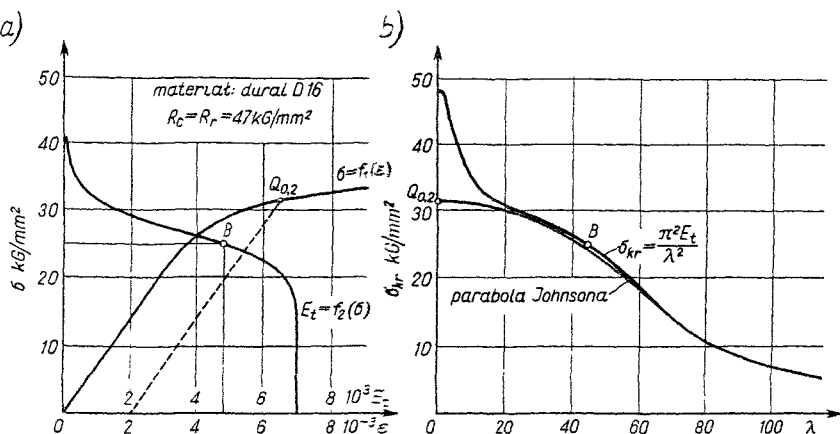
$$\sigma_{kr} = Q_{0,2} [1 - (Q_{0,2} / 4\pi^2 E) \lambda^2]. \quad (10.58)$$

* Wartość σ_0 jest z założenia bardzo bliska $\sigma_1 = \sigma_{kr}$ tak, że $(d\sigma/d\epsilon)_{\sigma=\sigma_0} = (d\sigma/d\epsilon)_{\sigma=\sigma_{kr}}$.

** W praktyce wykres ściskania (rys. 10.26a) zastępujemy łatwiejszym do wyznaczania w laboratorium wykresem rozciągania. Wielkość E_t z tego wykresu wyznaczamy zazwyczaj wykreślnie.

*** Dla przykładu dla $\sigma = 25 \text{ kG/mm}^2$ otrzymamy z wykresu (rys. 10.29a) $E_t = 4,7 \cdot 10^3 \text{ kG/mm}^2$, a ze wzoru (10.57) $\lambda = 43,5$. Nanosząc teraz dwie współrzędne (rys. 10.29b) tzn. $\sigma = 25 \text{ kG/mm}^2$ i $\lambda = 43,5$ otrzymujemy punkt B.

Jak widać, zgodność obu wykresów dla średnich smukłości ($20 < \lambda < 60$) jest bardzo dobra i dlatego w przypadku braku wykresu $\sigma = f(\varepsilon)$ można stosować parabolę Johnsona, do której wykreślenia niezbędne dane (E , $Q_{0,2}$) można znaleźć w kalendarzach.



Rys. 10.29. Określenie σ_{kr} giętnego wyboczenia w przedziale małych i średnich λ

Rozpatrzony ustrój (rys. 10.26b) należy do kategorii ustrojów jednorodnych, w których po przekroczeniu σ_{spr} wszystkie elementy mają te same właściwości materiałowe. Istnieją jednak ustroje, które będąc jednorodnie poniżej σ_{spr} , tracą te właściwości przy przekroczeniu σ_{spr} . Przykładem takiego ustroju jest pręt ze sprężycy utwardzonymi końcami (rys. 10.8), w którym zmiana modułu E na E_t dotyczy tylko elementów samego pręta i powoduje zmniejszenie sztywności EJ na $E_t J$. Elementy podpierające zostają bez zmian, na skutek czego przy niezmiennych K_A i K_B wzrastają współczynniki utwardzenia κ_A i κ_B (wzory 10.11). Pociąga to za sobą konieczność rozwiązania równania (10.12) metodą kolejnych przybliżeń. Zakładając mianowicie pewną wartość σ i odpowiadającą mu wartość E_t wyznaczamy κ_A i κ_B , a następnie rozwiązujemy równanie (10.12), otrzymując wartość $(kl)'$ tj.

$$(kl)' = l \sqrt{P'/E_t J}, \quad (d)$$

a następnie pierwsze przybliżenie siły krytycznej P' i naprężenia $\sigma' = P'/A$. Biorąc tę wartość σ' oraz odpowiadającą mu wartość E_t' korygujemy odpowiednio κ_A i κ_B a następnie dla tych nowych wartości κ_A i κ_B rozwiązujemy równanie (10.12), znajdując drugie przybliżenie $(kl)''$ itd. Ta sama metoda postępowania dotyczy pozostałych przypadków z art. 10.4, w których należy zawsze rozróżnić elementy podpierające o niezmiennych właściwościach od elementów głównych, w których E jest zastąpione przez E_t . W konstrukcji kratowej (rys. 10.16a) na przykład sztywności EJ , i EJ_w rozperek i wykrzywowań są stałe, natomiast występująca we wzorze (10.20a) siła P_E musi być obliczona z wprowadzeniem E_t zamiast E . Podobnie dla słupa ramowego (rys. 10.16b) należy we wzorze (10.20b) zmienić EJ na $E_t J$, podczas gdy EJ_r zostaje bez zmian.

Przedstawiona szkicowo metoda rozwiązania ustrojów niejednorodnych (po przekroczeniu σ_{spr}) jest dość żmudna. Z tego powodu często zadowalamy się przybliżeniem, redukując wszystkie sztywności w tym samym stosunku E_t/E i stosując tę samą procedurę, którą opisano w przypadku wyboczenia giętnego (rys. 10.29). Postępowanie takie daje заниżoną wartość siły krytycznej.

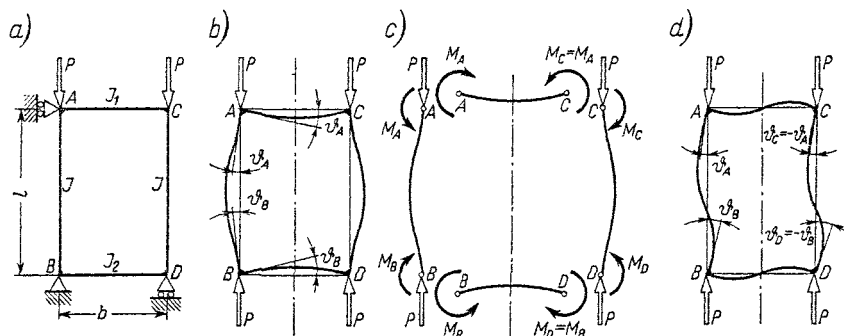
Analogiczne jak dla przypadku wyboczenia giętnego rozważania można przeprowadzić dla wyboczenia giętno-skrotnego lub skrotnego. W wyniku otrzymujemy ten sam wniosek,

a mianowicie iż przy przekroczeniu σ_{spr} można stosować wszystkie wzory z art. 10.5, 10.6 i 10.7, w których zamiast modułów E lub G wstawia się odpowiednio* E_t lub G_t .

W przypadku zwiczenia belek podstawienie do wzorów art. 10.8 E_t zamiast E nie jest ściśle biorąc uzasadnione, gdyż część przekroju w pobliżu warstwy obojętnej ma zawsze naprężenia niższe od granicy sprężystości, wobec czego nie może być słuszna zależność $\Delta\sigma = E_t \Delta\varepsilon$. Ponadto w przypadku zwiczenia belki, wywołanego obciążeniami poprzecznymi (rys. 10.26), obszar odkształceń plastycznych obejmuje jedynie część długości belki. Ponieważ jednak obliczenia uwzględniające obydwa powyższe fakty są bardzo złożone, zagadnienie świadomie upraszczamy stosując poprzednią regułę, tj. wstawiając do wzorów w art. 10.8 wszędzie E_t i G_t zamiast E i G , przy czym zdajemy sobie sprawę, iż takie obliczenie idzie w stronę zwiększenia** bezpieczeństwa konstrukcji.

10.10. Wyboczenie ram płaskich

Analizę stateczności ram rozpoczniemy od omówienia przypadku wyboczenia symetrycznej ramy prostokątnej (rys. 10.30a) podpartej w ten sposób, że węzły A i C mają zostawioną swobodę przesunięć pionowych. Zakładając symetryczną postać wyboczenia ramy (rys. 10.30b) i rozdzielając ją na elementy (rys. 10.30c), widzimy, że obydwa pionowe



Rys. 10.30. Wyboczenie ramy płaskiej z nieprzesuwnymi na boki węzłami
b), c) analiza symetrycznej postaci wyboczenia; d) postać antysymetryczna.

pręty AB i CD są sprężyste na końcach utwierdzone i zadanie sprowadza się do zadania rozpatrzonego w art. 10.4. Sztywność utwierdzenia górnych końców A i C określimy rozważając belkę AC , dla której zależność między kątami $\vartheta_A = \vartheta_C$ a momentami $M_A = M_C$ znana jest z Wytrzymałości Materiałów

$$\vartheta_A = \vartheta_C = M_A b / 2EJ_1 = M_C b / 2EJ_1,$$

* Na skutek trudności określenia $\tau = f(\beta)$ przyjmuje się $G_t/G = E_t/E$.

** Zwiększenie to w przypadku najczęściej spotykanych przekrojów typu dwuteówki lub ceówki nie jest duże z uwagi na stosunkowo niewielki przekrój ścianki w porównaniu do przekrojów pasów.

skąd według rys. 10.8

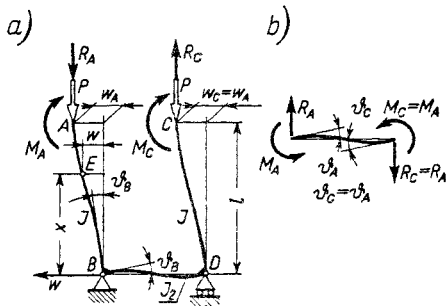
$$K_A = K_C = 2EJ_1/b.$$

Podobnie sztywność utwardzona $K_B = K_D$ dolnych końców prętów pionowych jest

$$K_B = K_D = 2EJ_2/b,$$

a bezwymiarowe współczynniki κ_A i κ_B , występujące w równaniu (10.12), określającą krytyczną wartość kl są

$$\kappa_A = 2 \frac{(EJ_1)}{(EJ)} \frac{l}{b}, \quad \kappa_B = 2 \frac{(EJ_2)}{(EJ)} \frac{l}{b}. \quad (10.59a)$$



W przypadku podwójnej symetrii ramy, tj. gdy $J_1 = J_2$, $\kappa_A = \kappa_B$, siłę krytyczną określa równanie (10.13).

Zmieniając sztywność prętów poziomych możemy otrzymać różne warianty konstrukcyjne. Jeśli na przykład $EJ_2 \rightarrow 0$, to rama zamienia się w przegubowo podpartą w punktach B i D, a rozwiązanie zadania sprowadza się do określania kl z równania (10.12), w którym $\kappa_B = 0$, tj.

$$\kappa_A \left(\frac{kl}{\operatorname{tg} kl} - 1 \right) - k^2 l^2 = 0.$$

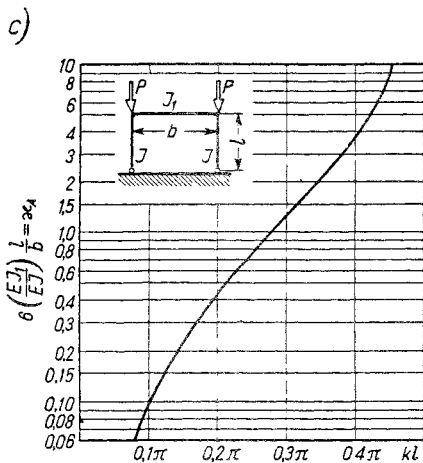
Analizę pozostałych wariantów (np. gdy $EJ_2 \rightarrow \infty$) zostawia się czytelnikowi.

Poza omówioną postać wybożenia antysymetryczne (rys. 10.30d), jednakże wartość P_{kr} odpowiadająca temu przypadkowi jest wyższa niż poprzednia, gdyż bezwymiarowe współczynniki κ_A i κ_B są 3-krotnie wyższe niż poprzednio, a mianowicie mają wartość

$$\kappa_A = 6 \frac{(EJ_1)}{(EJ)} \frac{l}{b}, \quad \kappa_B = 6 \frac{(EJ_2)}{(EJ)} \frac{l}{b}. \quad (10.59b)$$

Rozwiązane zadanie należy do grupy, gdy węzły ramy nie mają swobody przesunięć bocznych.

Znacznie bardziej niebezpieczny, tj. prowadzący do mniejszych wartości sił krytycznych, jest przypadek, gdy taka swoboda istnieje, tj. gdy nie ma przesuwnej podpory w A. Zakładając niesymetryczną postać wybożenia (rys. 10.31) i rozdzielając ramę



Rys. 10.31. Wybożenie ramy w przypadku swobody przemieszczeń bocznych
c) wynik analizy dla $J_1 = 0$.

na części, mamy układ oddziaływań belki poziomej górnej na część pozostałą w postaci $|M_A| = |M_C|$ oraz reakcji $R_A = R_C = (2M_A/b)$. Formułując w przekroju E równanie równowagi w tym wyboczonym stanie, mamy

$$EJw'' = M_g = P(w_A - w) - M_A,$$

gdzie $k = \sqrt{P/EJ}$. Rozwiązanie powyższego równania ma postać:

$$w = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + w_A - (M_A/P).$$

Aby wyznaczyć stałe całkowania B_1 , B_2 oraz nieznane na razie w_A i M_A , uzależnimy wartość M_A oraz momentu gnącego w punkcie B od kątów ϑ_A i ϑ_B , otrzymując w wyniku

$$M_A = 6EJ_1 \vartheta_A/b, \quad M_B = 6EJ_2 \vartheta_B/b.$$

Formułując następnie warunki brzegowe:

$$(w)_{x=l} = w_A, \quad (w')_{x=l} = \vartheta_A, \quad (w)_{x=0} = 0, \quad (w')_{x=0} = \vartheta_B, \quad (M)_{x=0} = M_B,$$

otrzymujemy pięć równań z niewiadomymi w_A , ϑ_A , ϑ_B oraz B_1 i B_2 . Po wyrugowaniu stałych B_1 i B_2 układ ten sprowadza się do trzech równań jednorodnych względem ϑ_A , ϑ_B i (w_A/l) :

$$\begin{aligned} \kappa_A \vartheta_A + \kappa_B \vartheta_B - (kl)^2 (w_A/l) &= 0, \\ [1 + (\kappa_A \sin kl/kl)] \vartheta_A - \cos kl \vartheta_B - (kl \sin kl)(w_A/l) &= 0, \\ [\kappa_A (1 - \cos kl)/(kl)^2] \vartheta_A - (\sin kl/kl) \vartheta_B + \cos kl (w_A/l) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie κ_A i κ_B określone są wzorem (10.59b). Przyrównując jak zwykle do zera wyznacznik charakterystyczny tych równań, mamy zależność:

$$(\kappa_A + \kappa_B)kl + \kappa_A \kappa_B \operatorname{tg} kl - (kl)^2 \operatorname{tg} kl = 0, \quad (10.60a)$$

której rozwiązanie daje krytyczne wartości obciążenia P . Jeśli na przykład $\kappa_B = 0$, tzn. gdy dolny pręt jest nadzwyczaj wiotki na zginanie pozostając sztywnym na rozciąganie, otrzymujemy z (10.60a)

$$kl \operatorname{tg} kl = \kappa_A. \quad (10.60b)$$

Wartości lewej strony tego równania w funkcji argumentu kl ($0 < kl < 0,5\pi$) podaje wykres (10.31c), skąd bezpośrednio, mając wartość κ_A , można określić $(kl)_{\text{kr}}$. Jak widać przy wszystkich możliwych wartościach κ_A zawsze jest

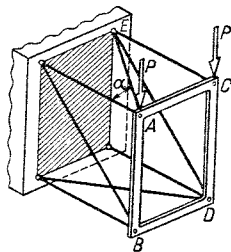
$$(kl)_{\text{kr}} < \frac{1}{2}\pi, \quad P_{\text{kr}} < \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Drugi skrajny przypadek występuje, gdy $\kappa_B \rightarrow \infty$, co odpowiada idealnemu zamocowaniu obu dolnych węzłów. Równanie (10.60a) zamienia się wtedy na

$$\operatorname{tg} kl = -kl/\kappa_A \quad (10.60c)$$

i pokrywa się z równaniem (10.2b), w którym rolę współczynnika $[(L/l) - 1]$ obejmuje $(1/\kappa_A)$. Sposób rozwiązania jest więc identyczny z podanym na rys. 10.3c, a wynik określony krzywą z rys. 10.3d, w której za odcietą (L/l) należy podstawić $[1 + (1/\kappa_A)]$. Jak widać dla wszystkich κ_A jest $\xi < 1$ i tylko w granicznym przypadku, gdy $\kappa_A \rightarrow \infty$ jest $\xi = 1$.

Analogicznie jak rozwiązane przykłady można przeanalizować inne konstrukcje ramowe*. Przy rozwiązywaniu takich zagadnień należy zawsze zwrócić baczną uwagę, czy węzły rozpatrywanej ramy mają możliwość przemieszczeń bocznych w płaszczyźnie ramy, gdyż w takim przypadku wartość obciążeń krytycznych znacznie spada w porównaniu do ramy z nieprzesuwnymi węzłami. Możliwość takich przemieszczeń zależy od ustawienia dodatkowych prętów łączących się z ramą, stanowiącą z reguły podzespół konstrukcji przestrzennej. *Jeśli ustawienie tych prętów jest takie, że przemieszczeniu bocznemu węzłów ramy towarzyszą wydłużenia lub skrócenia prętów tego samego rzędu co i odkształcenia giętne ramy, to możliwość bocznych przemieszczeń węzłów należy traktować za wykluczoną**.* Tak na przykład w konstrukcji (rys. 10.32) przemieszczenie pręta AC wzdłuż jego osi o wielkość w_A spowodowałoby wzrost długości pręta AE o długość $w_A \sin \alpha$, a więc tego samego rzędu co i samo przemieszczenie w_A . Wobec tego możliwość wyboczenia ramy w postaci podanej na rys. 10.31 należy uważać za wykluczoną, w przeciwieństwie do przypadku, gdyby pręta tego nie było.



Rys. 10.32. Przestrzenne podparcie ramy

Przeprowadzone rozważania dotyczyły wyboczenia ram, gdy $\sigma_{kr} < \sigma_{spr}$, można je jednak uogólnić i dla ram o prętach krępych wstawiając we wszystkich wzorach E ; zamiast E . Ten sposób postępowania, aczkolwiek nieściśły***, jest względnie prosty rachunkowo, daje zwiększone bezpieczeństwo konstrukcji i dlatego jest stosowany.

10.11. Wyboczenie kratownic

Już w przypadku prostych ram przekonaaliśmy się, że ścisła analiza stateczności konstrukcji jest zadaniem dość złożonym. W przypadku kratownic, w których liczba prętów jest nieporównanie większa niż w rozpatrzonych ramach, zadanie wyznaczenia obciążeń krytycznych w sposób ścisły z uwzględnieniem sztywności węzłów staje się nadzwyczaj trudne****. Z tego powodu w zastosowaniach praktycznych analizę stateczności przeprowadzamy przy założeniach upraszczających. Ponieważ omówienie

* Wyniki bardzo wielu rozwiązań można znaleźć w podręczniku A. Pflügera, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer Verlag.

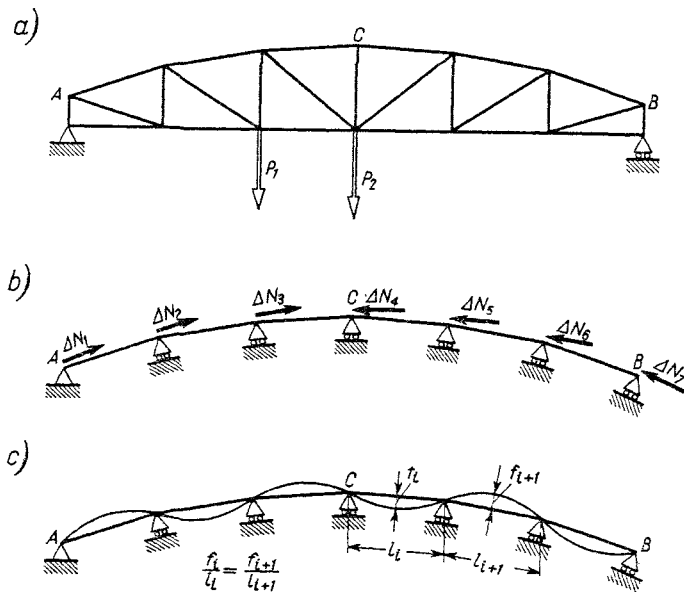
** Wynika to z rozważań energetycznych. Jeśli mianowicie pręty dodatkowe doznają wydłużeń tego samego rzędu co giętne odkształcenia w prętach, to w bilansie energii $\Delta\Pi$ (10.4) pojawiają się człony typu $(\xi EA_i w^2/2l_i)$ (ξ — współczynnik zależny od ustawienia pręta względem ramy). Człony te wielokrotnie przewyższają człon ΔV_g , gdyż w ich mianowniku l_i występuje w pierwszej potęgze. podczas gdy w wyrażeniu ΔV_g długość pręta l_i figuruje też w mianowniku, lecz w sześciennian. Konsekwencją tego jest tak ogromny wzrost P_{kr} , odpowiadającej wyboczeniu z bocznym przemieszczeniem węzłów, że najniższą wartością siły krytycznej staje się ta, która odpowiada wyboczeniu z węzłami nieprzesuwnymi. Stwierdzenie to jest słuszne dopóty, dopóki przekrój pręta AE , bądź kąt α nie są zbyt małymi wartościami.

*** Wyjaśnienie przyczyn nieściśłości takiego postępowania patrz art. 10.9.

**** Stosunkowo najprostszą metodą rozwiązania takich złożonych zadań jest metoda kolejnych przybliżeń Crossa, patrz np. Hoff, *The Analysis of Structures*, New York 1956, Wiley.

wszystkich możliwych wariantów jest niewykonalne, ograniczymy się tu do rozpatrzenia kilku najważniejszych typowych przypadków.

a. *Wyoboczenie pasa kratownicy przy jej zginaniu* (rys. 10.33). Ocenę obciążenia krytycznego ściskanego pasa ACB przeprowadzamy pomijając wpływ utwardzenia sprężystego poprzecznych elementów (rozpórek i wykrzyżowań), co uzasadnione jest małą sztywnością tych elementów w porównaniu z sztywnością samego pasa. W takim ujęciu pas można traktować jako ciąg prętów, połączonych ze sobą sztywno



Rys. 10.33. Wyoboczenie ściskanego pasa zginanej kratownicy

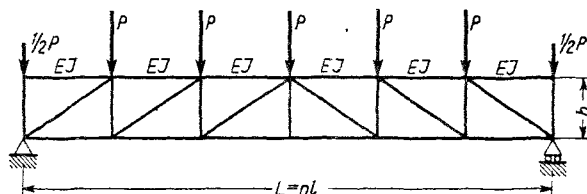
na przegubowych podporach (rys. 10.33b), obciążony układem sił ΔN . Jeśli przy tym położenie sił P_1 , P_2 jest stałe, to możemy dobrać tak przekroje pasów, aby przy pewnej wartości tych obciążeń każdy z prętów osiągał stan krytyczny niezależnie od drugich, tj. aby $(N_i)_{kr} = \pi^2 EJ_i / l_i^2$. Przypadek taki, będąc ideałem wykorzystania materiału, reprezentuje jednocześnie najgorszy możliwy przypadek z uwagi na stateczność pasa jako całości. Każde bowiem odchylenie od tego warunku, tj. zwiększenie sztywności na jednym czy kilku prętach, daje rezerwę wytrzymałości na wyoboczenie pasa wywierając ustarczający wpływ na pręty niewzmocnione, a więc podnosząc obciążenie krytyczne. Jeśli tych odchyżeń nie ma, to przy utracie stateczności każdy z prętów będzie pracował jako pręt podparty przegubowo wyginając się według półfali sinusoidy. Ciągłość odczłajeń, tj. równość kątów ugięcia pomiędzy sąsiadującymi prętami, może być przy tym zachowana, o ile tylko amplitudy tych wygięć sinusoidalnych będą proporcjonalne do długości prętów. Aby zatem zaprojektować konstrukcję, w której pręty pasa ściskanego miałyby ten sam współczynnik bezpieczeństwa z uwagi na wyoboczenie, należy każdy z prętów obliczać tak, jak by był on podparty przegubowo na obu końcach.

W niektórych konstrukcjach ze względów technologicznych pasy kratownic wykonuje się jako pręty o przekroju stałym, dobranym z uwagi na bezpieczeństwo najbardziej obciążonego odcinka pasa. Tak zaprojektowany pas ściskany ma siłę krytyczną wyższą niżby to wypadło ze wzoru Eulera dla najbardziej obciążonego odcinka, tj. $N_{kr} = -\pi^2 EJ / l^2$. Nie wchodząc w szczegółową analizę tego zagadnienia podamy tu wyniki przeliczeń dla przypadku, gdy kratownica o n jednakowych grodziach

(rys. 10.34) obciążona jest równomiernie na całej rozpiętości. Wielkość N_{kr} dla pasa górnego wyraża się wtedy wzorem

$$N_{kr} \approx \frac{4n}{4n-5} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (10.61)$$

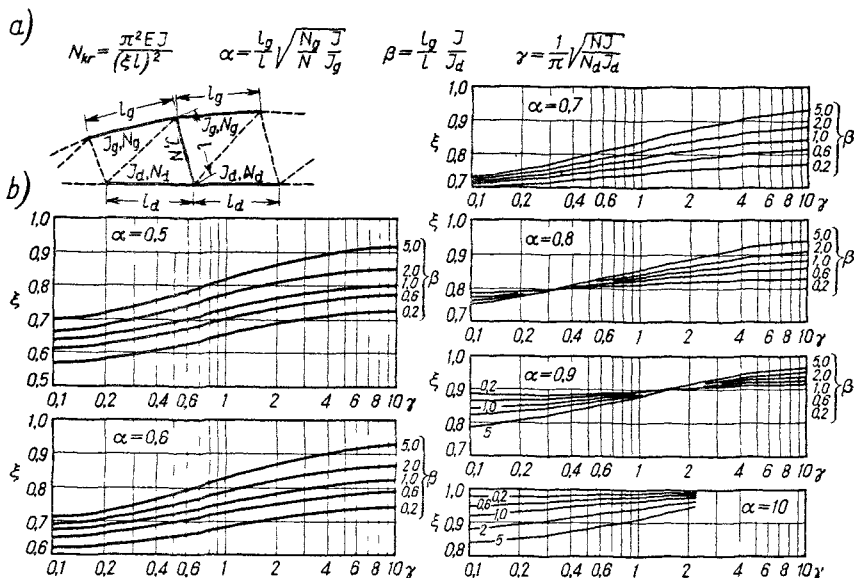
i gdy liczba grodzi jest $n = 6$ (rys. 10.34), to wzrost siły krytycznej jest o $\sim 25\%$ w porównaniu z siłą odpowiadającą przegubowemu podparciu obu końców odcinka. Wzór (10.61) może być stosowany



Rys. 10.34. Przypadek kratownicy o stałej sztywności pasa ściskanego

również przy wyboczeniu poza granicami sprężystości, o ile zamiast E wstawić moduł E_t . Wreszcie wzór ten z pewnym przybliżeniem idącym w kierunku zwiększenia bezpieczeństwa można stosować w przypadku obciążenia siłą skupioną.

b. Wyboczenie rozpórki lub wykrzyżowanie w kratownicach zginanych, tj. obciążonych siłami poprzecznymi (rys. 10.33) można zanalizować, pomijając usztywniający wpływ sąsiadujących rozpórek lub wykrzyżowań pracujących na rozciąganie, a biorąc pod uwagę tylko wpływ sztywnego powiązania badanego pręta z pasami górnym i dolnym (rys. 10.35). Upraszczając dalej zagadnienie pomija się



Rys. 10.35. Wyboczenie wykrzyżowania w kratownicy

W analizie uwzględniono współdziałanie prętów grubo narysowanych na rys. a), z których pasy górne są ściskane, dolne rozciągane.

usztywniający wpływ dalszych odcinków tych pasów, zostawiając jedynie te, które bezpośrednio przylegają do badanego pręta. Ponadto zakłada się, że obydwa sąsiadujące odcinki pasa górnego mają tę samą długość l_g , ten sam moment bezwładności J_g i ściskane są tą samą siłą N_g . To samo założenie dotyczy pasa dolnego (l_d, J_d) rozciąganej stałą siłą N_d . Wyniki przeliczeń podane są w postaci współczynnika ξ (rys. 10.35) określającego tzw. swobodną długość pręta $l_s = \xi l$, przy czym siła krytyczna wyraża się jako

$$N_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\xi l)^2}.$$

a współczynnik ξ zależy od trzech bezwymiarowych wielkości α, β, γ . We wzorach określających te współczynniki, N jest siłą w badanym wykrzywianiu względnie rozpórce. Jeśli na przykład

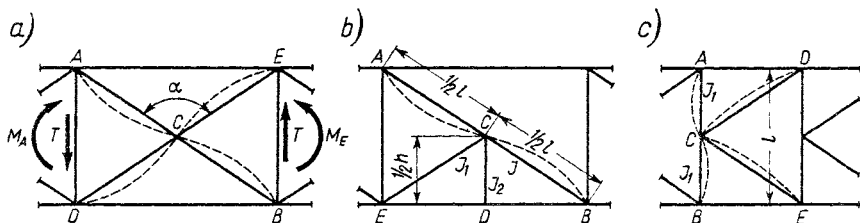
$$N_g = N_d = 2N, \quad J_g = J_d = 4J, \quad l_d = l_g = 1,2l,$$

to

$$\alpha = 0,85, \quad \beta = 0,3, \quad \gamma = 0,109$$

i odczytany z interpolacji wykresów 10.35 współczynnik $\xi = 0,83$ daje $N_{kr} = 1,45(\pi^2 EJ/l^2)$. Łatwo przy tym sprawdzić, iż z uwagi na wyoboczenie rzeczywisty stopień bezpieczeństwa dla pasa górnego równy $(N_{kr})_g/N_g$ jest nieco mniejszy niż stopień bezpieczeństwa dla badanej rozpórki, tj. (N_{kr}/N) , wbrew przybliżonemu obliczeniu, które przy założeniu przegubowego podparcia końców rozpórki daje wynik odwrotny.

c. Wyoboczenie wykrzywian lub rozpórek prostopadle do płaszczyzny kratownicy może zajść w takich przypadkach, gdy na skutek dodatkowych więzów siła krytyczna, odpowiadająca wyoboczeniu w płasz-



Rys. 10.36. Przykłady konstrukcji, w których możliwe jest przestrzenne wyoboczenie ściskanego pręta ACB

Linie kreskowane — postać utraty stateczności w płaszczyźnie kratownicy.

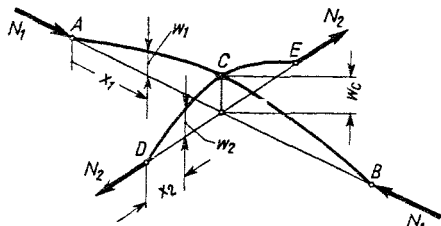
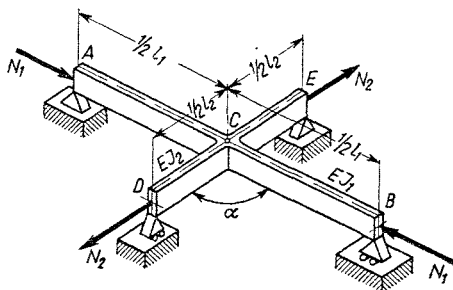
czyźnie kratownicy, została znacznie podniesiona (rys. 10.36). Tak na przykład dodanie prętów CD i CE (rys. 10.36a) powoduje na skutek dużej ich sztywności na ściskanie lub rozciąganie, że jedyną możliwą postacią wyoboczenia pręta ACB w płaszczyźnie kratownicy musi mieć węzeł w punkcie C , a siła krytyczna wzrasta ~ 4 -krotnie w porównaniu z przypadkiem, gdyby pręty CD i CE nie było. Ponieważ węzeł C nie jest na ogół przestrzennie podparty za pomocą dodatkowego pręta, to jedyny opór przeciwko jego przemieszczeniu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kratownicy dają oddziaływania prętów CD i CE , zależne od ukształtowania tych prętów i ich sztywności na zginanie. Jeśli zatem pręty CD i CE będą mało sztywne, to może się zdarzyć, że ta przestrzenna postać wyoboczenia odpowiadać będzie najniższej sile krytycznej.

Wielkość siły krytycznej zależy przy tym w decydującym stopniu od tego, czy wzmacniające pręty są połączone w węźle C z prętem ACB przegubowo, czy też węzeł C ukształtowany jest w ten sposób, że pręty CE i CD są w tym węźle idealnie utwierdzone. Ponadto wielkość tej siły zależy w dużym stopniu od wielkości sił działających w prętach dodatkowych.

Jako przykład zagadnień tego rodzaju wyznaczmy metodą energetyczną wielkość siły krytycznej dla konstrukcji (rys. 10.36a), gdy pręt DCE stanowi jedną sztywną na zginanie belkę rozciąganą siłą

N_2 , podczas gdy pręt ACB ściskany jest siłą N_1 (rys. 10.37). Zakładając przegubowe podparcie obu prętów w węzłach A, B, D, E , obierzmy jako funkcje ugięcia

$$w_1 = w_C \sin \frac{\pi x_1}{l_1}, \quad w_2 = w_C \sin \frac{\pi x_2}{l_2},$$



Rys. 10.37. Przestrzenne wyboczenie 2-prętowej typowej konstrukcji
Kąt α może mieć wartość dowolną.

Stosowanie wzoru (10.62a) ma sens dopóty, dopóki $(N_1)_{kr}$ jest mniejsza niż siła krytyczna $(N)_{gr}$ odpowiadająca wyboczeniu w postaci dwóch półfal, tj.

$$(N_1)_{kr} < (N)_{gr} = \frac{4\pi^2 EJ_1}{l_1^2}.$$

Jeśli siła N_2 jest siłą ściskającą, to dla otrzymania $(N_1)_{kr}$ należy we wzorze (10.62a) wstawić N_2 ze znakiem minus, otrzymując:

$$(N_1)_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_1}{l_1^2} \left[1 + \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^3 \right] / \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \frac{l_1}{l_2} \right). \quad (10.62b)$$

W podobny sposób otrzymujemy wyniki (rys. 10.38), gdy połączenie prętów w węzle C konstrukcji według rys. 10.36a jest przegubowe. W przypadku konstrukcji z wykrzyżowaniem w literę K (rys. 10.36c), w której ściskająca siła N_1 działająca w odcinku AC jest większa od ściskającej siły N_2 działającej w odcinku CB , siła krytyczna przy wyboczeniu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kratownicy wynosi

$$N_{kr} \approx \frac{\pi^2 EJ_1}{l^2} \frac{1}{\left(0,75 + 0,25 \frac{N_2}{N_1} \right)^2}. \quad (10.63)$$

Jeśli N_2 jest siłą rozciągającą, to w mianowniku powyższego wzoru należy zamienić znak plus na minus, przy czym podobnie jak dla wzoru (10.62a) stosowność wzoru (10.63) ograniczona jest wartością siły krytycznej N_{gr} , odpowiadającej wyboczeniu w postaci dwóch półfal.

przy czym w obu funkcjach amplituda w_C jest oczywiście ta sama. Wyrażając przyrost energii zginania ΔV_g dla obu prętów (patrz art. 10.2), mamy:

$$\Delta V_g = \frac{\pi^4 EJ_1}{4l_1^3} w_C^2 + \frac{\pi^4 EJ_2}{4l_2^3} w_C^2.$$

Zmiana ΔV_P obciążeń N_1 i N_2 przy uwzględnieniu, że N_2 jest siłą rozciągającą, wyraża się (porównaj art. 10.2) następująco

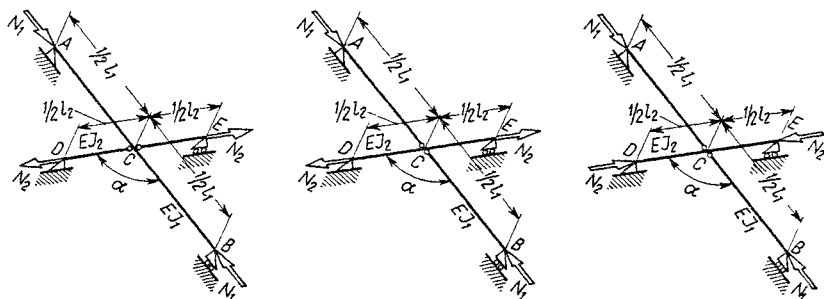
$$\Delta V_P = \frac{\pi^2 N_1}{4l_1} w_C^2 - \frac{\pi^2 N_2}{4l_2} w_C^2.$$

Po podstawieniu do wzoru (10.4) i przekształceniach mamy $(N_1)_{kr}$ niezależną od wartości kąta α , a mianowicie:

$$(N_1)_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_1}{l_1^2} \left[1 + \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^3 \right] / \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \frac{l_1}{l_2} \right), \quad (10.62a)$$

przy czym J_1, J_2 są momentami bezwładności prętów przy zgięciu ich w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny kratownicy. Należy tu podkreślić, że stosunek N_2/N_1 jest wartością stałą, zależną jedynie od sposobu obciążenia kratownicy jako całości.

Wreszcie w przypadku konstrukcji (rys. 10.36b) utwierdzenie sprężyste węzła C przeciwko wyboczeniu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kratownicy zależy od konstrukcyjnego rozwiązania tego węzła oraz od sposobu połączenia prętów CE i CD w węzłach E i D . Jeśli na przykład połączenie nie dzielonego pręta ACB z prętami CE i CD jest przegubowe, podczas gdy pozostałe końce tych prętów



$$(N_1)_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_1}{l_1^2} \frac{1}{(1 - 0,75 \frac{N_2 l_1}{N_1 l_2})}$$

$$\text{przy czym } (N_1)_{kr} < \frac{4\pi^2 EJ_1}{l_1^2}$$

$$(N_1)_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ_1}{l_1^2} \text{ gdy } \frac{N_2 l_1}{N_1 l_2} \geq 1$$

$$(N_1)_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ_1}{l_1^2} \text{ gdy } \frac{N_2 l_1}{N_1 l_2} < 1$$

lecz przy tym musi być:

$$EJ_2 \geq \frac{(N_1)_{kr} l_1^2}{12 l_1} \left(1 - \frac{N_2 l_1}{N_1 l_2}\right)$$

$$(N_1)_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ_1}{l_1^2}$$

przy czym musi być

$$EJ_2 \geq \frac{(N_1)_{kr} l_1^2}{12 l_1} \left(1 + 1,2 \frac{N_2 l_1}{N_1 l_2}\right)$$

Rys. 10.38. Wartość obciążenia krytycznego przy przestrzennym wyboczeniu różnych wariantów konstrukcji z rys. 10.39

są idealnie zamocowane w węzłach E i D , to siłę krytyczną wyznaczamy ze wzoru (10.9), w którym wartość K jest

$$K = \frac{24EJ_1}{l^3} + \frac{24EJ_2}{h^3},$$

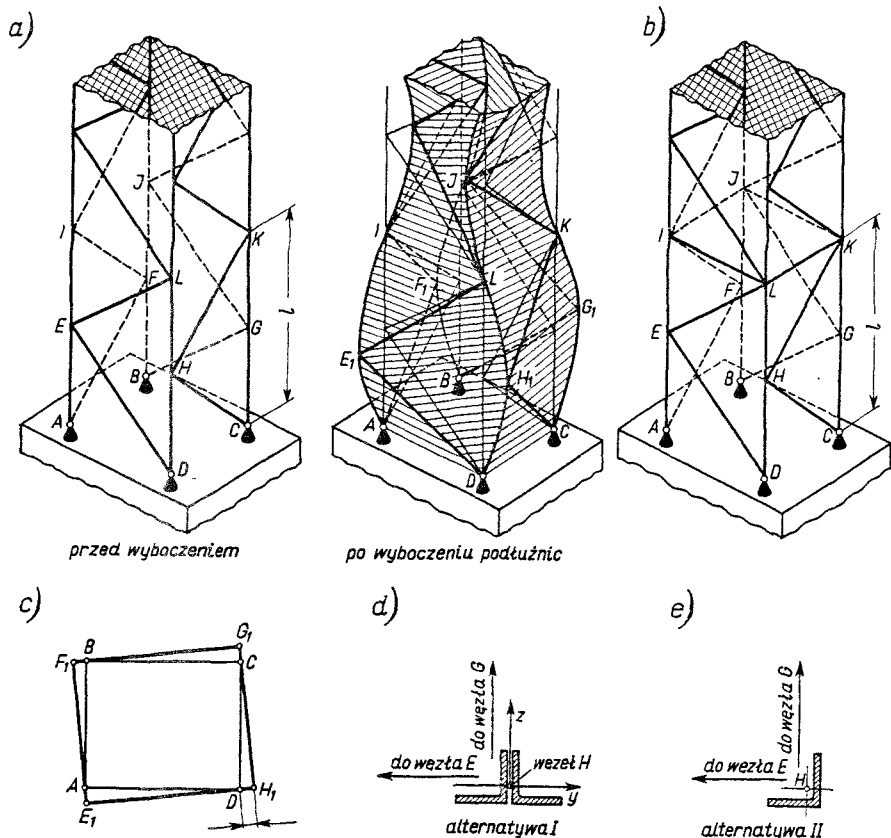
przy czym zakłada się, że pas EDB jest bardzo sztywny na skręcanie i zginanie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny kratownicy.

d. *Wyboczenie pasów kratownic pozornie niesztynnych*, znajdujących zastosowanie jako maszty lub słupy kratowe (rys. 10.39a,b), ma zazwyczaj postać, przy której długość wykrzyżowań nie ulega zmianie (rys. 10.39c). W zależności od kształtu poprzecznego przekroju pasa i jego ustawienia względem założonej płaszczyzny wybożenia, rozróżniamy dwa przypadki, a mianowicie gdy główne centralne osie bezwładności przekroju leżą, względnie nie leżą w płaszczyźnie wybożenia. W przypadku pierwszym, jeśli pominąć wpływ utwierdzenia sprężystego wykrzyżowań, tj. przyjąć, że są one połączone z pasami przegubowo, swobodną długością wybożenia l_s staje się podziałka kratownicy l (rys. 10.39a, b), a siła krytyczna jest

$$N_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_s^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

gdzie J — moment bezwładności przekroju odpowiadający założonej postaci wybożenia pasa. Jeśli na przykład pas wykonany jest z dwóch kątowników ustawionych tak (rys. 10.39d), że wyboczeniu w kierunku HH_1 , prostopadłym do płaszczyzny $DLKC$, odpowiada oś z jako oś obojętna, to $J = J_z$, podczas gdy wyboczeniu tegoż pasa w płaszczyźnie $DLKC$ odpowiada $J = J_y$ oraz $l_s = l$ (rys. 10.39a) lub $l_s = 0,5 l$ (rys. 10.39b).

W przypadku drugim, gdy pas jest kątownikiem z półkami ustawionymi w płaszczyznach ścian bocznych kratownicy (rys. 10.39e), obliczenie siły krytycznej przy założonej postaci wybożenia staje



Rys. 10.39. Wyboczenie słupów kratowych pozornie niesztywnych
 e) przekrój $EFGH$ po wyboczeniu; d), e) typowe poprzeczne przekroje podłużnicy w węźle H . Na rys. a) i b) dla jasności potraktowano ściany boczne, jak gdyby były oklejone pokryciem.

się bardziej złożone. Wyniki zależą tu nie tylko od podziałki wykrzyżowań, lecz również od rodzaju obciążenia kratownicy jako całości oraz od tego, czy istnieją dodatkowe przewiązania jak np. pręty wręgi $IJKL$ (rys. 10.39b). Dla bardzo często spotykanego przypadku, gdy pas jest pojedynczym kątownikiem (rys. 10.39e), wyniki analizy są podane w tabl. 10.3, przy czym jako moment bezwładności należy do wzoru Eulera wstawić najmniejszy moment bezwładności przekroju kątownika $J_{\min}$. W przypadku

**DLUGOŚĆ SWOBODNA l_s PODŁUŻNIC KRATOWNIC POZORNIE
NIESZTYWNYCH**

Tablica 10.3

Rodzaj obciążenia	Zginanie słupa	Ściskanie słupa
Konstrukcja według rys. 10.41a	$l_s \approx 0,7 l$	$l_s \approx 0,8 l$
Konstrukcja według rys. 10.41b	$l_s \approx 0,6 l$	$l_s \approx 0,7 l$

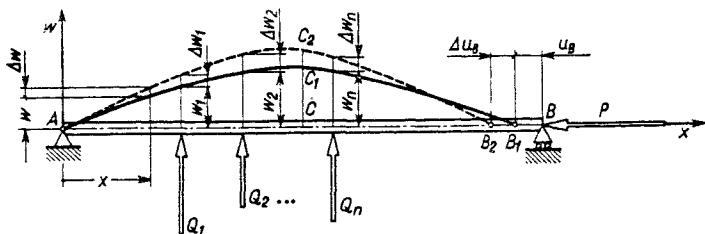
gdy słup pracuje jako całość na zginanie i ściskanie, wartość l_s otrzymujemy określając % udział obciążenia ściskającego w całkowitej sile N , działającej w danym odcinku pasa, a następnie stosujemy interpolację liniową między podanymi w tabl. 10.3 wartościami.

Niezależnie od sprawdzenia tej postaci wybooczenia, w przypadku słupów należy zawsze sprawdzić wybooczenie słupa jako całości z uwzględnieniem podatności wykrzyżowań (patrz art. 10.4 wzór 10.20).

10.12. Działanie zespołów obciążeń w stanach podkrytycznych

Nawiązując do art. 10.3 (patrz rys. 10.7), zajmiemy się obecnie działaniem takiego zespołu obciążeń, z których co najmniej jedno, tzw. *obciążenie zasadnicze*, działające oddzielnie od pozostałych obciążeń może doprowadzić ustrój do utraty stateczności. Przedmiotem analizy będzie zachowanie się ustroju (określenie odkształceń i naprężeń) w stanie podkrytycznym, gdy obciążenie zasadnicze jest mniejsze niż odpowiadająca mu wartość krytyczna.

Jedną z metod rozwiązania tego rodzaju zagadnień jest metoda energetyczna. Zastosowanie jej objaśnimy dla przypadku ściskanego pręta obciążonego jednocześnie siłami poprzecznymi (rys. 10.40). Zakładamy przy tym, że przekrój pręta jest zawarty i że wobec



Rys. 10.40. Działanie zespołów poprzecznych obciążeń i zasadniczego (ściskającego) obciążenia

tego nie wchodzi w grę ani wżwchrzenie belki (art. 10.8), ani wybooczenie giętno skrętne (art. 10.6). W takim przypadku obciążeniem zasadniczym jest siła P , która może doprowadzić do giętnego wybooczenia pręta przy wartości krytycznej

$$P_{kr} = P_E = \pi^2 EJ/l^2. \quad (a)$$

Punktem wyjścia do dalszych rozważań jest zasada prac przygotowanych (patrz art. 1.1). Zakładając mianowicie, że pod działaniem siły P i sił $Q_1, \dots, Q_n$ pręt wygiął się do położenia AC_1B_1 (położenie równowagi) nadajmy teraz prętowi wirtualne wychylenie $\Delta w(x)$ z tego położenia. Zgodnie z wzorem (1.2) pierwotne położenie AC_1B_1 równowagi charakteryzuje się tym, że suma prac sił zewnętrznych ΔL_z na tym wirtualnym wychyleniu $\Delta w(x)$ oraz zmiana energii sprężystej ΔV spełniają zależność

$$\Delta L_z - \Delta V = 0. \quad (b)$$

Tak więc zadanie nasze sprowadza się do określenia ΔL_z i ΔV towarzyszących wirtualnemu przemieszczeniu $\Delta w(x)$. Wirtualną pracę sił Q określamy bezpośrednio jako

$$\sum_{i=1}^n Q_i \Delta w_i, \quad (c)$$

gdzie Δw_1 — wartość $\Delta w(x)$ dla odciętej x_1 odpowiadającej sile Q_1 . Nie jest ona jednak całkowitą pracą ΔL_z , gdyż przy wirtualnym wychyleniu wykona pracę również siła P . W położeniu mianowicie równowagi następuje przesunięcie $u_B = \overline{BB_1}$, które wyraża się [porównaj wzór (i) art. 10.2] jako

$$u_B = \overline{BB_1} = \int_0^l \frac{1}{2} (w')^2 dx \quad (d)$$

i które przy dodatkowym wirtualnym wychyleniu $\Delta w(x)$ zwiększa swą wartość o

$$\Delta u_B = \overline{B_2B_1} = \int_0^l \frac{1}{2} (w' + \Delta w')^2 dx - \int_0^l \frac{1}{2} (w')^2 dx. \quad (e)$$

To wyrażenie (e) można również zapisać symbolicznie jako

$$\Delta u_B = \Delta \int_0^l \frac{1}{2} (w')^2 dx, \quad (f)$$

gdzie symbol Δ przed znakiem całki oznacza zmianę jej wartości, gdyż funkcję w zmieniamy na $w + \Delta w$. Ponieważ wirtualna praca siły P jest $P \Delta u_B$, to podstawiając wyrażenie (f) i dodając (e) otrzymujemy ostatecznie

$$\Delta L_z = \frac{P}{2} \Delta \int_0^l (w')^2 dx + \sum_1^n Q_i \Delta w_i = \Delta \left[\frac{P}{2} \int_0^l (w')^2 dx + \sum_1^n Q_i w_i \right], \quad (g)$$

gdzie symbol Δ przed nawiasem kwadratowym oznacza przyrost wyrażenia* zawartego w nawiasach, gdy w zmieniamy na $w + \Delta w$. Analogicznie obliczamy zmianę ΔV , która wynosi [porównaj wzór (g) art. 10.2]

$$\Delta V = \int_0^l \frac{EJ}{2} (w'' + \Delta w'')^2 dx - \int_0^l \frac{EJ}{2} (w'')^2 dx = \Delta \int_0^l \frac{EJ}{2} (w'')^2 dx. \quad (h)$$

Podstawiając teraz wyrażenia (g) i (h) do wzoru (b) otrzymujemy zależność

$$\Delta \left[\frac{P}{2} \int_0^l (w')^2 dx + \sum_1^n Q_i w_i - \int_0^l \frac{EJ}{2} (w'')^2 dx \right] = \Delta \Pi = 0 \quad (10.64)$$

stwierdzając tym, iż w położeniu równowagi wyrażenie w nawiasach, tj. Π , przedstawiające pełną energię potencjalną układu osiąga ekstremum. Podobnie jak w art. 10.2 (patrz wzór 10.4) tak i tu poszukiwana funkcja $w(x)$ znajduje się pod znakiem całki, a ściśłą odpo-

* Pamiętając (art. 1.1), że przy wirtualnym wychyleniu siły zachowują swoje kierunki i wartości możemy iloczyn $Q_i \Delta w_i$ stałej Q_i przez przyrost w_i , tj. Δw_i , przedstawić jako przyrost iloczynu tj. $\Delta(Q_i w_i)$. Z kolei suma przyrostów $\sum \Delta(Q_i w_i)$ równa jest przyrostowi sumy, tj. $\Delta(\sum Q_i w_i)$. Podobnie postępujemy z pierwszym składnikiem wyrażenia (g), tj. $(P/2) \Delta \int (w')^2 dx$.

wiedź otrzymamy stosując rachunek wariacyjny. Zamiast tego zadowolamy się przybliżeniem podstawiając

$$w(x) = a_1 w(x) + a_2 w_2(x) + \dots + a_k w_k(x), \quad (10.65)$$

gdzie każda z obranych funkcji $w_i(x)$ spełnia warunki brzegowe, a jedynymi niewiadomymi są nieznane parametry $a_1, \dots, a_k$. Wartości tych parametrów tak dobieramy, aby pełna energia potencjalna układu osiągała ekstremum.

Kolejne etapy postępowania prześledzimy na przykładzie belki na dwóch przegubowych podporach (rys. 10.40) obciążonej pojedynczą siłą skupioną Q przyłożoną w połowie rozpiętości. Załóżmy na początek, że przybliżona postać (10.65) linii ugięcia $w(x)$ jest

$$w(x) = a_1 \sin(\pi x/l). \quad (i)$$

Jak łatwo sprawdzić, spełnia ona warunki podporowe ($w_{x=0} = w_{x=l} = 0$, $(M_g)_{x=0} = EJ(w'')_{x=0} = (M_g)_{x=l} = EJ(w'')_{x=l} = 0$) oraz zbliża się swym kształtem do przewidywanej linii ugięcia (np. $w'_{x=l/2} = 0$). Obliczając teraz pełną energię potencjalną Π według (10.64)

$$\Pi = \frac{\pi^2 a_1^2 P}{4l} + Q a_1 - \frac{\pi^4 EJ a_1^2}{4l^3}, \quad (k)$$

otrzymujemy ją jako funkcję nieznanego parametru* a_1 .

Różniczkując teraz to wyróżnienie względem a_1 i przyrównując do zera pochodną mamy w wyniku

$$a_1 = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EJ} \frac{1}{[1 - (P/P_E)]}, \quad (l)$$

gdzie P_E określone jest wzorem (a). W przypadku gdy $P = 0$, mamy zgięcie belki na dwóch podporach i wtedy ugięcie pośrodku obliczone ze wzoru (i) po podstawieniu a_1 ze wzoru (l) jest

$$f = w_{x=l/2} = a_1 \approx Ql^3/48,7EJ, \quad (m)$$

podczas gdy z kursu Wytrzymałości Materiałów wiadomo, że prawidłowa odpowiedź jest

$$f_0 = Ql^3/48EJ. \quad (n)$$

Jak widać, różnica obu wyników jest technicznie bez znaczenia (błąd 1,5%) i dlatego możemy utożsamić wyrażenia (m) i (n), w rezultacie czego wzór (l) przybierze postać

$$a_1 = w_{x=l/2} = \frac{f_0}{1 - (P/P_E)}, \quad (10.66)$$

gdzie f_0 — ugięcie odpowiadające działaniu samego tylko obciążenia poprzecznego.

Ze wzoru (10.66) wynika, że gdy siła P rośnie zbliżając się do P_E , to strzałka ugięcia odpowiadająca jednoczesnemu działaniu P i Q jest znacznie większa niż f_0 . Gdy $P \approx P_E$, to wystarczy bardzo małe obciążenie siłą Q , aby ugięcie stało się bardzo duże. Ta szcze-

* W odróżnieniu od wzoru (k) z art. 10.2 sens fizyczny parametru a_1 jest inny. Poprzednio bowiem a_1 oznaczał amplitudę wychylenia z położenia pierwotnej równowagi i jako taki był on wielkością bardzo małą. W omawianym przypadku jest on wielkością skończoną, a wychyleniu z położenia równowagi odpowiada zmiana jego z a_1 na $a_1 + \Delta a_1$.

gólna wartość obciążenia zasadniczego pokrywa się z wartością krytycznego obciążenia $P_{kr} = P_E$, przy której prosta postać równowagi przestaje być stateczna. Ten sam merytorycznie wynik co i wzór (10.66) otrzymujemy i dla innych konstrukcji prętowych i to nie tylko w odniesieniu do odkształceń liniowych (ugięć) lecz do dowolnych wielkości fizycznych, jak odkształcenia kątowe, momenty gnące itd. Wynik ten zapisujemy następująco

$$B_{Q,P} = \frac{B_Q}{1 - (P/P_{kr})}, \quad (10.67)$$

przy czym $B_{Q,P}$, B_Q oznaczają odpowiednio tę samą wielkość fizyczną w danym przekroju pręta przy łącznym działaniu obciążeń P i Q i przy samym tylko działaniu poprzecznych obciążeń Q , podczas gdy P_{kr} jest krytyczną wartością obciążenia P dla danego ustroju*. Ta wspólna postać wzoru (10.67) charakteryzującego zachowanie się ustrojów prętowych w stanie podkrytycznym daje w wyniku następujące wnioski:

- Działanie zespołu obciążeń nie zmienia krytycznej wartości P_{kr} obciążeń zasadniczych P .*
- Skutek działania (odkształcenia, naprężenia) zespołu obciążeń, z których co najmniej jedno może spowodować utratę stateczności, nie podlega zasadzie superpozycji, nie jest bowiem liniową funkcją obciążeń zasadniczych*

Niezależnie od tych wniosków należy podkreślić uniwersalność wzoru (10.67), który znajduje szerokie zastosowanie w badaniach doświadczalnych. Jeśli mianowicie mierząc w pewnym punkcie konstrukcji naprężenia lub odkształcenia stwierdzimy nieliniowość ich przrastania w stosunku do przyrostów obciążeń, to posługując się wzorem (10.67) możemy z bardzo dużą dokładnością wyznaczyć krytyczną wartość P_{kr} nie doprowadzając do zniszczenia ustroju. Rozróżniamy przy tym dwa różne sposoby przeprowadzenia eksperymentu. Pierwszy z nich, rzadziej stosowany, polega na zwiększaniu jedynie obciążeń zasadniczych P przy zachowaniu stałej wartości wszystkich pozostałych obciążeń. W odniesieniu do wzoru (10.67) oznacza to, iż $B_Q = \text{const}$, a jedyną niezależną zmienną jest siła P przyjmująca w doświadczeniu kolejne wartości $P_1, \dots, P_n$. Zmienną zależną znaną z pomiarów jest wielkość $B_{Q,P}$, której wartości $(B_{Q,P})_1, \dots, (B_{Q,P})_n$ odpowiadają siłom $P_1, \dots, P_n$, przy czym ze wzoru (10.67) mamy dla i -tego pomiaru

$$P_{kr}(B_{Q,P})_i - P_i(B_{Q,P})_i = P_{kr}B_Q = \text{const}. \quad (o)$$

Jeśli teraz jako nowe zmienne potraktujemy $B_{Q,P}$ oraz iloczyn $(PB_{Q,P})$, to widzimy, że zależność między tymi nowymi zmiennymi jest liniowa. Nanosząc zatem dla szeregu pomiarów punkty w układzie współrzędnych $B_{Q,P}$ i $(PB_{Q,P})$ (rys. 10.41b) otrzymujemy linię prostą, której pochodna jest wartością krytycznego obciążenia, tj. P_{kr} .

Drugi sposób przeprowadzenia doświadczeń (częściej stosowany) *polega na proporcjonalnym zwiększaniu wszystkich obciążeń*. Jeśli jako parametr określający te wszystkie obciążenia przyjmimy siłę P , to wielkość B_Q da się przedstawić jako $B_Q = b_Q P$, gdzie b_Q jest pewnym stałym współczynnikiem. W wyniku wzór (10.67) przyjmuje postać

$$B_{Q,P} = \frac{b_Q P}{1 - (P/P_{kr})}$$

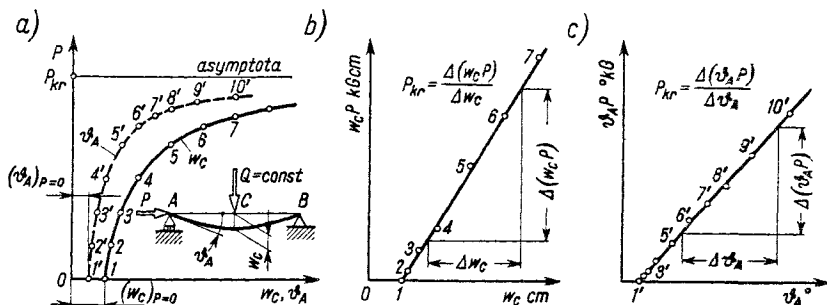
lub

$$\left(\frac{B_{Q,P}}{P} \right) P_{kr} - B_{Q,P} = b_Q P_{kr} = \text{const}. \quad (p)$$

* W omawianym przykładzie określmy moment gnący w środkowym przekroju belki i kąt ugięcia na podporze przy łącznym działaniu siły P i Q . W pierwszym przypadku mamy $B_Q = (M_g)_{x=l/2} = = Ql/4$, wobec czego moment gnący przy łącznym działaniu $B_{QP} = (Ql/4)[1 - (P/P_E)]$. W drugim przypadku $B_Q = \vartheta_A = Ql^2/16EJ$, wobec czego $B_{Q,P} = (Ql^2/16EJ)[1 - (P/P_E)]$.

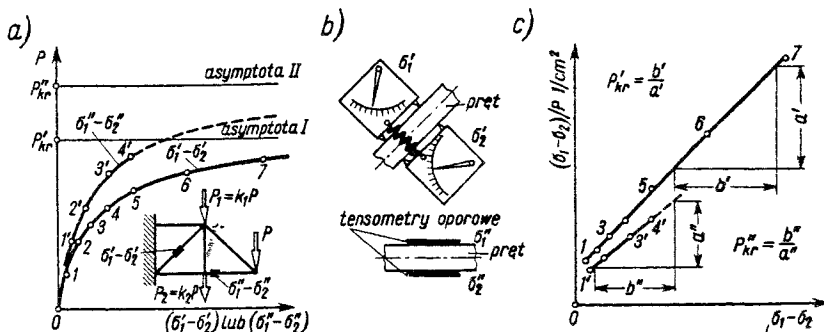
Traktując teraz wielkości $B_{Q,P}$ i $(B_{Q,P}/P)$ jako nowe zmienne, których wartości znamy z doświadczenia, widzimy, że zależność między nimi jest liniowa. Ustalenie tej zależności w układzie współrzędnych $B_{Q,P}$, $(B_{Q,P}/P)$ daje poszukiwaną wartość P_{kr} jako odwrótność pochodnej (rys. 10.42c).

Charakterystyczną cechą obu zależności (o) i (p) jest to, że do wyznaczenia P_{kr} niepotrzebna jest znajomość B_Q i b_Q . Jest to tym bardziej istotne, że na wielkość B_Q i b_Q okazują wpływ niemożliwe do zmierzenia niedokładności wykonania ustroju, mimośrodowość obciążenia itp.



Rys. 10.41. Zachowanie się ustroju przy $Q = \text{const}$, P — zmienne

a) typowe wykresy dwóch obranych wielkości (φ_A, w_C); b) wykres $P B_{Q,P} = P w_C$ w funkcji $B_{Q,P} = w_C$; punkty 1, ..., 7 są wynikiem pomiarów i odpowiadają punktom 1, ..., 7 na wykresie (a); c) wykres $P B_{Q,P} = P \varphi_A$ w funkcji $B_{Q,P} = \varphi_A$; punkty 1', ..., 10' są wynikiem pomiarów i odpowiadają punktom z wykresu (a).



Rys. 10.42. Określenie krytycznego obciążenia $P, P_1 = k_1 P, P_2 = k_2 P$ dla złożonego ustroju

a) wyniki pomiarów różnicy $\sigma_1 - \sigma_2$ naprężeń w przeciwnych włókienach wybranego przekroju wykrzywiania (') bądź pása (''), zakresowana część krzywej 1, ..., 4 jest ekstrapolacją teoretyczną; b) szczegóły ustawienia tensometrów mechanicznych lub elektrycznych; c) wyniki z wykresu (a) przedstawione w układzie $B_{Q,P} = \sigma_1 - \sigma_2$ i $B_{Q,P}/P$, siły P'_{kr} i P''_{kr} odpowiadają utracie stateczności pręta (') lub ('') i są na ogół różne, wartością decydującą o bezpieczeństwie jest wartość mniejsza tj. P'_{kr} .

Opisana energetyczna metoda rozwiązania zagadnień jest z założenia metodą przybliżoną. Drugą równoległą metodą, dającą odpowiedzi ściśle (w ramach poczynionych założeń) jest analiza równowagi elementów ustroju. Metoda ta daje wynik pod postacią równania różniczkowego lub układu równań różniczkowych, których rozwiązanie należy

przeprowadzić przy zadanych warunkach brzegowych. Wyniki rozwiązania otrzymujemy z reguły w postaci bardziej złożonej niż wyniki metody energetycznej i dlatego tę drugą metodę rzadziej stosujemy w praktyce.

10.13. Zadania

1. Zakładając, iż równanie (a) (art. 10.1), tj. $Q \operatorname{tg} \alpha - K(R+r) \sin \alpha$, jest słuszne przy dużych wychyleniach, wyznaczyć położenia równowagi w funkcji siły Q i przeprowadzić dyskusję.

2. Metodą energetyczną określić wartość krytycznego obciążenia ustroju (rys. 10.3a), jeśli $L \gg l$, a linię ugięcia przyjmą jako $w(x) = w_A[1 - \sin(\pi x/2l)]$. Wyniki porównać z rozwiązaniem ścisłym (rys. 10.3d). Sprawdzić spełnienie warunków brzegowych.

Wskazówka. W bilansie ΔII należy uwzględnić składnik $Pw_A^2/2L$ przedstawiający pracę pionowej siły P .

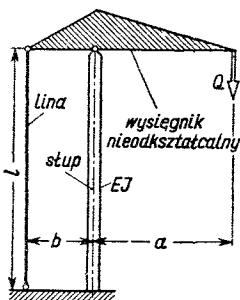
3. Zakładając symetryczną postać wyboczenia metodą analizy równowagi rozwiązać przykład (rys. 10.4) i wyniki porównać z wzorem (10.9) będącym wynikiem przybliżonym.

Wskazówka. Na podporze A działa reakcja pionowa $Kw_c/2$.

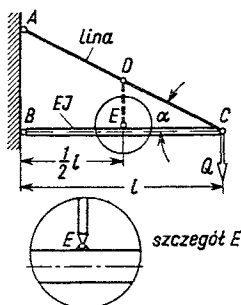
4. Odrzucając założenie, że postać wyboczenia ustroju (rys. 10.4) jest symetryczna, udowodnić, że równanie przestępne opisujące zaistnienie stanu krytycznego da się przedstawić jako iloczyn czynnika przedstawiającego wyboczenie symetryczne i czynnika odpowiadającego wyboczeniu antysymetrycznemu.

Wskazówka. Ugięcie w_1 dla lewej i w_2 dla prawej połówki spełniać muszą warunki ciągłości $w_1 = w_2$ i $w'_1 = w'_2$ w przekroju C .

5. Udowodnić, że w konstrukcji żurawia (rys. 10.43) warunki pracy słupa są podobne jak dla ustroju (rys. 10.3a). Zakładając, iż $a = 20$ m, $b = 2$ m, $l = 20$ m podać wzór dla krytycznej siły ściskającej słup.



Rys. 10.43.



Rys. 10.44.

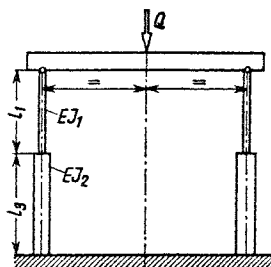
6. W wysięgniku (rys. 10.44) wbudowano nieodkształcalny pręt DE łączący się przegubowo z liną i prętem BC (przegub E jest tylko nabudowany na przecię BC). Udowodnić, że warunki pracy pręta BC są takie same jak w przypadku z rysunku 10.4 oraz obliczyć wzrost siły krytycznej spowodowany przez pręt DE .

7. Obliczyć siłę krytyczną dla belki ciągłej (rys. 10.9) zakładając $EJ_B = 0$, $EJ_A = EJ$, $l_A = l$.

8. Ściskany siłą $P = 20$ t pręt (rys. 10.11a) o wymiarach $l = 4$ m, $EJ = 4,5 \cdot 10^7$ kGem², $A = 14,2$ cm² związany jest ze sprężystym podłożem. Jaka co najmniej musi być sztywność K tego podłoża, aby pręt miał 1,75-krotny stopień bezpieczeństwa na wyboczenie. Jaka będzie przy tym liczba półfal wyboczenia na długości pręta.

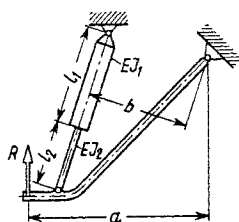
9. Wyjaśnić dlaczego w pręcie na sprężystym podłożu (rys. 10.11a) z obydwoma końcami swobodnymi współczynnik $\xi = 0$ dla $K = 0$.

10. Podnośnikowe urządzenie (rys. 10.45) składa się z poziomej platformy i dwóch utwierdzonych na dole podnośników hydraulicznych. Wykorzystując wyniki z rys. 10.12 określić stopień bezpieczeństwa konstrukcji na wyboczenie, jeśli w stanie podniesionym $l_1 = 1$ m, $l_2 = 1,5$ m, $EJ_1 = 1,7 \cdot 10^8$ kGcm², $EJ_2 = 11,1 EJ_1$, $Q = 47$ t.

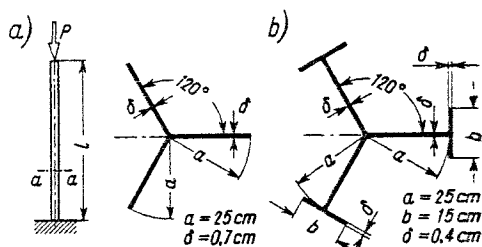


Rys. 10.45.

11*. Amortyzator cieczowy (rys. 10.46) złożony z cylindra ($EJ_1 = 9,1 \cdot 10^7$ kGcm², $l_1 = 0,5$ m) i tłoczyska ($EJ_2 = 1,7 \cdot 10^6$ kGcm², $l_2 = 0,4$ m) można traktować jako jednolity pręt o zmiennym przekroju. Posługując się analogią do zagadnienia (rys. 10.12) określić krytyczną ściskającą siłę powodującą wyboczenie amortyzatora oraz krytyczne obciążenie R , jeśli $b/a = 2$.



Rys. 10.46.



Rys. 10.47.

12. Kratowy stalowy ($E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm²) słup (rys. 10.16a) o wymiarach $l = 25$ m, $t = h = 0,5$ m, $A = 10$ cm², $A_w = A_r = 2$ cm² ściskany jest siłą $P = 11$ t. O ile % zmniejszy się teoretyczna siła krytyczna P_E , jeśli uwzględnić okształcalność wykrzywiania i rozpórek. Jaki będzie współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie.

13. Przegubowo podparty na obydwu końcach pręt o przekroju zetowym (szerokość półki $b = 3$ cm, wysokość środnika $h = 10$ cm, $\delta = \text{const} = 1,5$ mm, $E = 7 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu = 0,35$) ściskany jest siłą P . Wyznaczyć krytyczną wartość tej siły w dwóch przypadkach, gdy długość $l = 1$ m i gdy $l = 0,5$ m. Przekroje końcowe mają swobodę spazczenia.

14. Stalowy maszt ($E = 2,5G = 2 \cdot 10^6$ kG/cm²) o długości $l = 6$ m i podanym przekroju (rys. 10.47a) utwierdzony jednym końcem obciążony jest na swobodnym końcu siłą ściskającą $P = 10$ t. Określić najbardziej prawdopodobną postać utraty stateczności i wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie.

15. Jak zmieni się postać utraty stateczności i współczynnik bezpieczeństwa masztu z zadania 14, jeśli przekrój masztu zmienić na inny (rys. 10.47b), którego sztywność $C_s = Eb^3a^2\delta/4$.

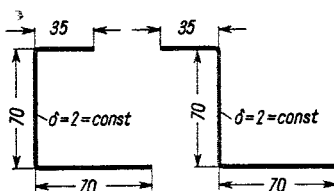
16*. Obliczyć krytyczną ściskającą siłę wyboczenia skrętnego (art. 10.5) pręta utwierdzonego jednym końcem, a na drugim końcu zamkniętego blokiem uniemożliwiającym spaczenie przekroju pozwalającym jednak na swobodny obrót (patrz rys. 6.22d).

17*. Podparty przegubowo na końcach pręt o przekroju otwartym ma swobodę spaczenia przekrojów końcowych. Pręt ten na połowie długości licząc od jednej z podpór wzmocniono, zwiększając C_s — dwukrotnie, C — ośmiokrotnie, a J_0 — dwukrotnie w stosunku do pierwotnych wartości. Obliczyć krytyczną siłę skrętnego wyboczenia takiego złożonego pręta przy stałej na całej długości siły wzdłużnej.

18. Jak zmieni się wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ (rys. 10.21), jeśli nie zmieniając innych wymiarów wykonać profil z grubszej blachy ($h/\delta = 10$).

19. Podparty przegubowo na końcach pręt o przekroju ceówkowym ($b = 100$, $h = 50$, $\delta = 2$) ma swobodę spaczenia przekrojów końcowych. Wykorzystując dane tabl. 6.2 i 6.4 obliczyć krytyczną siłę wyboczenia giętno-skrętnego, jeśli $l = 1$ m, $E = 7 \cdot 10^5$ kG/cm², $E/G = 2,7$.

20*. Określić dla którego z prętów o podanych przekrojach (rys. 10.48) krytyczna siła ściskająca ma większą wartość, jeśli warunki podparcia, materiał i długość prętów ($l = 1$ m) są te same.



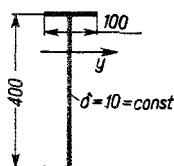
Rys. 10.48.

21*. W konstrukcji (rys. 10.23) pogrubiono profil zetowy dając $\delta = 1,5$ zamiast $\delta = 1,0$, resztę zaś wymiarów pozostawiając bez zmian. Jak zmieni się wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ (rys. 10.23e).

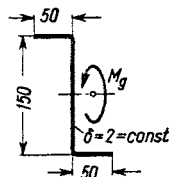
22*. W konstrukcji (rys. 10.23) zwiększono grubość blachy pokrycia z $\delta = 0,8$ na $\delta = 1,5$, zostawiając resztę wymiarów bez zmian. Określić nową zależność $\sigma_{kr}(\lambda)$.

23*. W konstrukcji (rys. 10.23) profile zetowe zastąpiono ceówkami o tych samych wymiarach ścianki, pólki i grubości blachy co poprzednio. Określić nową zależność $\sigma_{kr}(\lambda)$.

24. Określić krytyczne wartości momentu gnącego M_y , przy których belka o podanym przekroju (rys. 10.49) i długości $l = 4$ m poddana czystemu zginaniu ulegnie zwirzeniu.



Rys. 10.49.



Rys. 10.50.

25. Poddana czystemu zginaniu momentem $M_y = 10^4$ kGcm stalowa belka o przekroju zetowym (rys. 10.50) podparta jest na przegubowych podporach pozwalających na spaczenie przekrojów. Określić współczynnik bezpieczeństwa z uwagi na możliwość zwirzenia, jeśli $l = 2$ m, $E = 2,5G = 7 \cdot 10^5$ kG/cm².

26. Przegubowo podparty na końcach pręt o długości $l = 50$ cm i przekroju według rys. 10.50 wykonany jest z duralu D16, którego własności w zakresie plastycznym podane są na rys. 10.29a.

Wyznaczyć siłę krytyczną wybożenia giętnego i wybożenia skrętnego z uwzględnieniem plastycznych właściwości materiału.

27. Jak zmienia się wartości sił krytycznych dla pręta z poprzedniego zadania, jeśli jeden z końców pręta zostanie utwierdzony, a drugi nadal podparty przegubowo.

28. Określić krytyczną wartość sił P w ramie (rys. 10.30a), jeśli $l = 2b = 2\text{ m}$, $EJ = EJ_1 = EJ_2 = 6 \cdot 10^7 \text{ kGcm}^2$. Przeanalizować zarówno przypadek wybożenia symetrycznego (rys. 10.30b), jak i antysymetrycznego (rys. 10.30d).

29*. W ramie z poprzedniego zadania obciążenie stanowi tylko jedna siła P przyłożona w narożu A , natomiast siła w narożu C nie istnieje. Zakładając symetryczną względem poziomej osi postać wybożenia ($\vartheta_A = \vartheta_B$) obliczyć wartość krytycznego obciążenia.

30*. W ramie (zad. 28) obciążenie stanowią nie tylko pionowe siły P , lecz również dwie poziome siły H przyłożone w narożach C i D i ściskające pręty AC i BD . Zakładając symetryczną postać wybożenia (rys. 10.30b), sformułować równanie określające utratę stateczności. Konkretnie obliczenia przeprowadzić przy $H = 2P$.

31. W prostokątnej ramie (rys. 10.31a), w której istnieje swoboda bocznych przemieszczeń, określić krytyczną wartość sił P , jeśli $l = b$, $J = J_1 = J_2$. Konkretnie obliczenia przeprowadzić dla $l = 2\text{ m}$, $EJ = 8 \cdot 10^7 \text{ kGcm}^2$.

32. W konstrukcji (rys. 10.37) pręt AB jest utwierdzony na końcach A i B . Zakładając linię ugięcia w postaci $w_1 = 0,5w_c[1 - \cos(2\pi x_1/l_1)]$, $w_2 = w_c \sin(\pi x_2/l_2)$, obliczyć przybliżoną wartość N_{1kr} oraz określić graniczną wartość N_{gr} .

33. W konstrukcji (rys. 10.37) część AC ma 2-krotnie mniejszą sztywność niż sztywność EJ_1 części CB , a końce D i E są utwierdzone przeciwko obrotowi względem osi DE (tzn. skręceniu), przy czym sztywność C na swobodne skręcanie pręta DE jest $C = kEJ_1$ (k -dane). Zakładając linię ugięcia pręta AB w postaci $w_1 = w_c \cdot \sin(\pi x_1/l_1) + \bar{w} \sin(2\pi x_1/l_1)$, a linię ugięcia pręta ED $w_2 = w_c \sin(\pi x_2/l_2)$ określić przybliżoną wartość siły krytycznej N_{1kr} .

Wskazówka. W wyrażeniu $\Delta II = 0$ uwzględnić energię swobodnego skręcania pręta DE .

34. Jak zmieni się przebieg analizy z art. 10.12, jeśli obciążenie poprzeczne stanowić będą dwie zgodnie skierowane siły Q przyłożone w przekrojach $x_1 = l/3$ i $x_2 = 2l/3$, a nie jedna siła Q przyłożona pośrodku. Wyrażenie (i) z art. 10.12 zachować bez zmian.

35. Zachowując wyrażenie (i) (art. 10.12) dla linii ugięcia podpartej przegubowo na końcach belki ściskanej siłą P i obciążonej poprzecznym równomiernym obciążeniem q , przeprowadzić analizę zachowania się ustroju.

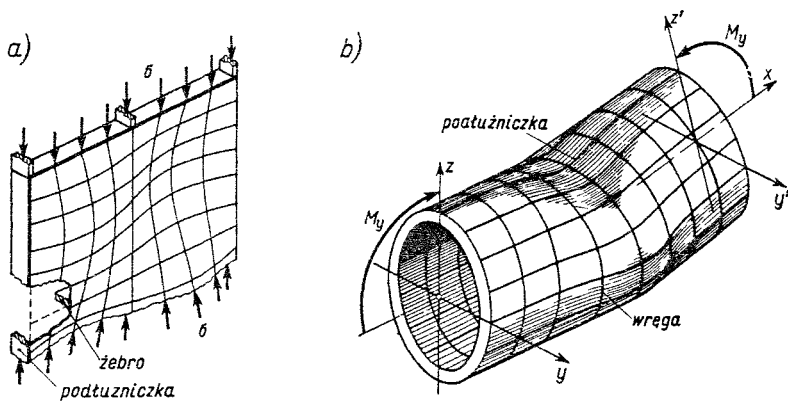
36. Pręt (rys. 10.8a) obciążono jednocześnie siłą P i prostopadłym do osi obciążeniem ciągłym $q \text{ kG/cm}$. Zakładając, że $K_A = K_B$ oraz że linia ugięcia wyraża się jako $w = w_1 \sin(\pi x/l) + w_2[1 - \cos(2\pi x/l)]$, wyznaczyć zachowanie się konstrukcji przy takim jednoczesnym działaniu obciążeń.

Wskazówka. Parametry w_1 i w_2 są związane ze sobą warunkiem brzegowym $K_A \vartheta_A = EJw''_{x=0}$.

37*. Pręt o przekroju zetowym i długości l utwierdzony jest jednym końcem ($\Phi_{x=0} = 0$, $\Phi'_{x=0} = 0$) na swobodnym zaś końcu obciążony jest ściskającą siłą P i momentem skręcającym M_0 . Wychodząc z równania (10.22) i (10.25) określić zachowanie się pręta przy tym obciążeniu.

11. STATECZNOŚĆ PŁYT I POWŁOK

W typowych konstrukcjach cienkościennych (art. 7.1) szkielet, stanowiąc podparcie pokrycia, dzieli je jednocześnie na elementy (ścianki, odcinki powłoki) związane ze sobą sprężystością. Wskutek tego podziału rozróżniamy dwie zasadnicze formy utraty stateczności, z których pierwsza, tzw. *wyboczenie lokalne* polega na pofalowaniu samego tylko pokrycia, podczas gdy pręty szkieletu stateczności nie tracą (rys. 11.1a). Druga forma, tzw. *wyboczenie ogólne* (rys. 11.1b), charakteryzuje się pofalowaniem pokrycia i prętów



Rys. 11.1 Obraz lokalnej i ogólnej utraty stateczności konstrukcji

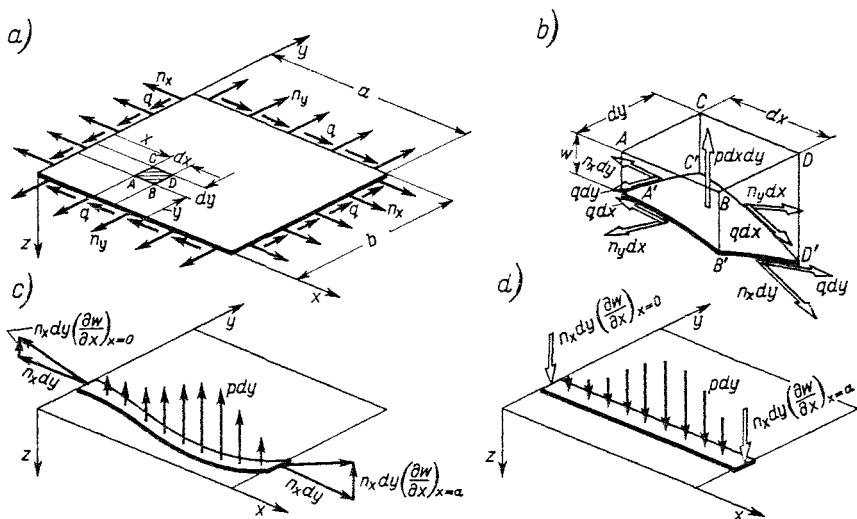
szkieletu. Pojawienie się jednej lub drugiej postaci wyboczenia zależy od wzajemnego stosunku sztywności pokrycia i prętów szkieletu. Jeśli pokrycie jest cienkie a pręty szkieletu bardzo solidne, to przy wzroście obciążenia pojawi się najpierw wyboczenie lokalne (obciążenie W_1), a dopiero potem przy obciążeniu W_n , nieraz kilkakrotnie większym od W_1 , następuje wyboczenie prętów szkieletu i towarzyszące temu na ogół zniszczenie ustroju. Jeśli na odwrót sztywności pokrycia i prętów szkieletu są tego samego rzędu, to utrata stateczności może nastąpić od razu jako wyboczenie ogólne (obciążenie W_2) bez fazy początkowej, tj. wyboczenia lokalnego.

Wszystkie te obciążenia W_1 , W_2 , W_n reprezentują *nośność ustroju*, tj. zdolność przeniesienia pewnych obciążeń odpowiadających określonej postaci wyboczenia. Jest interesujące, jakie miejsce w stosunku do tych wielkości zajmuje dopuszczalne obciążenie W_{dop} danego ustroju. Ponieważ wyboczeniu ogólnemu towarzyszy z reguły zniszczenie ustroju, jest oczywiste, iż $W_{dop} < W_2$ lub $W_{dop} < W_n$, gdyż konstrukcja przy obciążeniach dopuszczalnych musi mieć określony przepisami zapas bezpieczeństwa. Inaczej przed-

stawia się sprawa wzajemnego stosunku W_{dop} i W_1 . W praktyce spotyka się bowiem ustroje, w których $W_{\text{dop}} > W_1$, to znaczy takie, w których pozwala się na wyboczenie lokalne przy działaniu obciążeń dopuszczalnych. Do ustrojów takich należą konstrukcje płytowcowe, aczkolwiek obecnie tendencje w tej dziedzinie zbliżają się raczej do przepisów w innych działach (np. dźwignicach, nadwoziach), gdzie wymaga się aby $W_{\text{dop}} < < W_1$. Niezależnie jednak od stosowanych kryteriów punktem zasadniczym jest umiejętność określenia obciążeń krytycznych odpowiadających wyboczeniu lokalnemu. Omówienie tych zagadnień jest treścią rozdz. 11.

11.1. Obciążenia krytyczne płyt. Metody obliczeń

Opisane na przykładzie konstrukcji prętowych ogólne metody wyznaczenia obciążeń krytycznych (art. 10.2) znajdują zastosowanie i dla płyt, a jedyna różnica przejawia się w innej niż dla prętów postaci równań różniczkowych, bądź innym wyrażeniu zmiany pełnej energii potencjalnej ustroju. Przez analogię do art. 10.2 rozważania nasze rozpoc-



Rys. 11.2. Analiza wyboczenia płyty

a) geometria i układ obciążeń; b) i c) równowaga elementu i paska płyty w I zadaniu składowym; d) układ obciążeń paska o szerokości dy w drugim zadaniu składowym.

niemy od metody analizy równowagi konstrukcji w stanie wyboczonym, biorąc jako przykład prostokątną płytę, obciążoną w swej płaszczyźnie środkowej wydatkami normalnymi n_x , n_y i wydatkiem stycznym q (rys. 11.2), przy czym wydatki te mogą być funkcjami x i y .

Zakładając, że pod działaniem tych obciążeń płyta może być w równowadze w postaci wygiętej, zastosujemy tu sposób postępowania opisany w art. 10.5. Wprowadzając jedno-

cześniej dwa obciążenia $+p(x, y)$ i $-p(x, y)$, dobierzemy wartość jednego z nich, np. $-p$ tak, aby pod jego działaniem i działaniem wydatków n_x, n_y, q każdy element płyty pomimo swego wygięcia był w stanie płaskiego dwuwymiarowego stanu naprężeń. Aby taki stan zaistniał, elementarne siły $n_x dy, n_y dx, q dy, q dx$ muszą być styczne do odpowiednich kierunków (rys. 11.2b), a dla zapewnienia równowagi elementu należy dołożyć obciążenie* $-p dx dy$ równoległe do osi z . Zauważając, że wypadkowa rzutów sił $n_x dy$ na oś z wynosi (patrz również rys. 9.1c)

$$n_x dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

i podobnie dla pozostałych

$$n_y dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy, \quad (q dy) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx \right), \quad (q dx) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right),$$

otrzymujemy po napisaniu warunku równowagi:

$$p = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.1)$$

Wydzieliwszy w ten sposób pierwszy stan napięć (rys. 11.2c), przechodzimy do drugiego zadania składowego (rys. 11.2d), w którym obciążenie płyty stanowi $+p$. Aby pod jego działaniem płyta była w równowadze, musi być spełnione równanie (9.8) lub (9.9). Dla $D = \text{const}$ mamy

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (11.2)$$

którego osobliwością jest, że obciążenie, tj. prawa strona równania, zależy od nieznanego na razie ugięcia w .

Rozwiązanie równania (11.2) objaśnimy dla szczególnego przypadku, gdy płyta, podparta przegubowo na czterech brzegach, obciążona jest równomiernie rozłożonym ściskającym wydatkiem $-n_x$ (rys. 11.3), podczas gdy $n_y = q = 0$. Korzystając z art. 9.4, założymy, że powierzchnia ugięcia przy wyboczeniu wyraża się funkcją (9.17a)

$$w = w_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

spełniającą warunki podparcia (brzegowe). Podstawiając tę funkcję do (11.2), po przekształceniach otrzymujemy

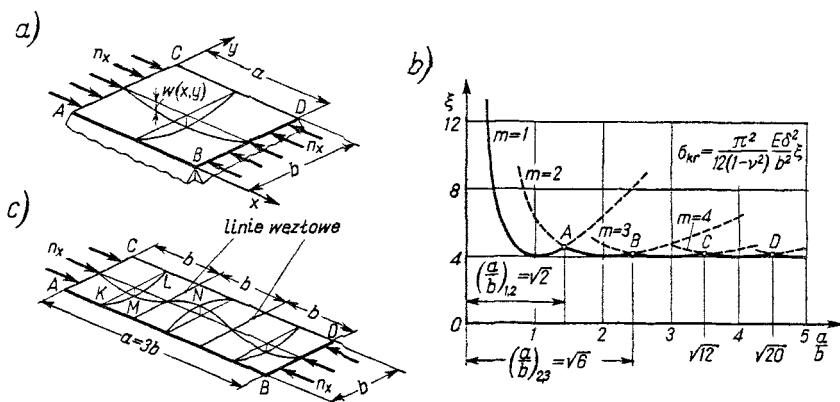
$$\left[-n_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right] w_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

* Podobnie jak w konstrukcjach prętowych tak i tu zakładamy, że ugięcie płyty $w(x, y)$ oraz kąty ugięcia $(\partial w / \partial x)$, $(\partial w / \partial y)$ są bardzo małe. Wynika stąd, że z dokładnością do małych trzeciego rzędu warunki rzutów na osie x i y będą nadal spełnione, pomimo zmiany nachylenia sił $n_x dy, n_y dx, q dy, q dx$.

Stwierdzając, że $\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ nie jest tożsamościowo równe zero, widzimy, że równowaga w postaci wygiętej (tj. $w_{m,n} \neq 0$) będzie istnieć wtedy, gdy wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe zero, a więc gdy ściskający wydatek n_x ma wartość

$$n_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m^2 b}{a} + n^2 \frac{a}{bm^2} \right)^2. \quad (11.3a)$$

Z wszystkich możliwych wartości n_x odpowiadających różnym postaciom ugięcia, tj. różnym n i m , interesuje nas wartość najmniejsza. Ponieważ we wzorze (11.3a) n



Rys. 11.3. Wyboczenie płyty podpartej przegubowo na czterech brzegach
a) geometria; b) wynik analizy; c) obraz odkształceń w przypadku $a > b$.

występuje tylko jeden raz, i to jako czynnik, to wartość n_x będzie najmniejsza*, gdy $n = 1$. Aby prześledzić teraz zależność n_x od stosunku a/b , wykreślimy wartość bezwymiarowego współczynnika ξ

$$\xi = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (11.3b)$$

dla kolejnych wartości $m = 1, 2, \dots$ (rys. 11.3b). Jak widać, dla stosunku (a/b) zbliżonego do liczby naturalnej (1, 2, 3, ...), najniższa wartość ξ , a więc i obciążenia krytycznego n_x , odpowiada postaci wyboczenia z liczbą półfal m równą tej liczbie naturalnej. Oznacza to, że linie węzłowe ($w = 0$) będąc równoległe do osi y dzielą płytę w przybliżeniu na kwadraty. Ugięcie w między dwoma liniami węzłowymi przypomina pagórek lub wgłębienie, następujące kolejno po sobie (rys. 11.3c). Przy stosunku (a/b) równym odciętej takiego punktu, jak np. B (rys. 11.3b), możliwe są dwie różne postacie wyboczenia z liczbą półfal m i $(m+1)$, a o pojawieniu się jednej z nich decyduje charakter odchylenia płyty od idealnego kształtu. Współrzędna $(a/b)_{m,m+1}$ odpowiadająca przecięciu się krzywej ξ dla liczby półfal m , z krzywą ξ dla liczby $(m+1)$, jest określona następująco:

$$(a/b)_{m,m+1} = \sqrt{m(m+1)}$$

* Jeśli ma istnieć ugięcie płyty, to liczba n nie może być równa zero.

i jak łatwo udowodnić

$$m < (a/b)_{m, m+1} < m+1.$$

Dla obliczeń technicznych wartość praktyczną ma oczywiście obwiednia najmniejszych wartości ξ . Widać przy tym, że dla $(a/b) = 1, 2, 3 \dots \xi = 4 = \text{const}$ oraz że dla $(a/b) > 3$ obwiednia ta staje się, praktycznie biorąc, linią poziomą o rzędnej $\xi = 4$. Największe odchylenie od tej wartości dla $(a/b) > 1$ zachodzi w punkcie A , tj. gdy $(a/b) = (a/b)_{1,2} = \sqrt{2}$ i wtedy $\xi \approx 4,5$.

Jeśli płyta jest szersza niż dłuższa, tj. gdy $(a/b) < 1$, wyboczenie płyty zachodzi w postaci jednej półfali w kierunku osi x . W granicznym przypadku, gdy płyta jest znacznie szersza niż dłuższa, we wzorze (11.3b) można (a/b) pominąć w porównaniu do składnika (b/a) i wtedy

$$n_x \approx \frac{\pi^2 D}{a^2},$$

tj. wynik ma postać wzoru Eulera dla pręta o długości a . Jest to zrozumiałe, jeśli zauważyć, że przy takim stosunku (a/b) usztywnienie włókien środkowych, wynikające z podparcia krótszych boków, staje się pomijalne.

W zastosowaniach technicznych operujemy zazwyczaj wielkością ściskających naprężeń krytycznych $\sigma_{kr} = n_x/\delta$. Wprowadzając D (wzór 9.4a) mamy

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \xi E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2. \quad (11.4a)$$

Biorąc dla metali $\nu \approx 0,3$, otrzymujemy

$$\sigma_{kr} \approx 0,90 \xi E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2, \quad (11.4b)$$

gdzie ξ należy brać z wykresu (rys. 11.2b).

Niezależnie od wyników przeprowadzonej analizy, celowe jest zdanie sobie sprawy z przyczyn powodujących, iż w odróżnieniu od giętnego wyboczenia prętów, najbardziej prawdopodobna postać wyboczenia długiej płyty ($a > 3b$) cechuje się liczbą półfal $m > 1$. Odpowiedź na to uzyskamy, jeśli wyobrazimy sobie płytę (rys. 11.3c), jako ruszt wzdluznych i poprzecznych prętów, w których pierwsze są ściskane, drugie natomiast odgrywają rolę sprężystego podłoża dla prętów wzdluznych. Zagadnienie staje się wtedy podobne do rozpatrzonego w art. 10.4 wyboczenia pręta na sprężystym podłożu (rys. 10.11), odpowiedź zaś wynika z analizy członów V_g , V_s i V_p .

Poza opisaną metodą, zagadnienia stateczności płyt bardzo często rozwiązujemy w sposób przybliżony metodą energetyczną, zwłaszcza w przypadkach bardziej złożonych. Biorąc jako punkt wyjścia ogólną zależność (10.4), wyrażamy zarówno ΔV_g jak i ΔV_p przez ugięcie w , przedstawiające bardzo małe wychylenie z pierwotnego położenia równowagi w postaci płaskiej. Korzystając z (9.24a) mamy ΔV_g jako

$$\Delta V_g = \iint_F \frac{D}{2} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (11.5a)$$

Zmianę ΔV_P potencjalnej energii obciążeń zewnętrznych obliczymy uwzględniając wprowadzone fikcyjne obciążenia $+p$ i $-p$ (rys. 11.2). Pierwszemu układowi (rys. 11.2b i c) nie towarzyszy żadna zmiana energii, gdyż układ ten jest w równowadze, tak że całkowita zmiana ΔV_P odpowiada tylko układowi obciążeń $+p$ (rys. 11.2d), a jej wielkość* będzie

$$\Delta V_P = -\frac{1}{2} \iint_F (p \, dx \, dy) w = -\frac{1}{2} \iint_F \left(n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) w \, dx \, dy,$$

a po prostych przekształceniach**

$$\Delta V_P = \frac{1}{2} \iint_F \left[n_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + n_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2q \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx \, dy, \quad (11.5b)$$

gdzie symbol F oznacza całkowanie po całej powierzchni płyty. Spełniwszy w ten sposób postawiony sobie cel, tj. wyraziwszy ΔV_g i ΔV_P przez w , możemy obecnie transponować wszystkie odnośne rozważania art. 10.2, zamieniając jedynie pojęcie siły P przez n_x , n_y lub q , przy czym te ostatnie mogą być funkcjami współrzędnych x i y .

Jako przykład zastosowania metody energetycznej rozwiążmy przypadek wybożenia płyty opartej przegubowo na czterech brzegach, ścinanej równomiernym wydatkiem q . Przewidując, że przy wyboczeniu utworzy się pagórek o maksymalnych rzędnych wzdłuż przekątnej AD (rys. 11.4), dobieramy funkcję ugięcia w

$$w = a_{1,1} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{2,2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$$

spełniającą wszystkie warunki brzegowe. Wstawiając tę funkcję do (11.5a), mamy po wykonaniu całkowania

$$\Delta V_g = \frac{\pi^4 Dab}{8} (a_{1,1}^2 + 16a_{2,2}^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

Podobnie podstawiając do (11.5b) $n_x = 0$, $n_y = 0$ oraz wyrażenia $(\partial w / \partial x)$ i $(\partial w / \partial y)$, mamy po scałkowaniu

$$\Delta V_P = -\frac{32}{9} q a_{1,1} a_{2,2},$$

a warunek (10.2) przyjmie postać

$$-\frac{32}{9} q a_{1,1} a_{2,2} + \frac{\pi^4 Dab}{8} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 (a_{1,1}^2 + 16a_{2,2}^2) = 0.$$

Z wszystkich możliwych wartości parametrów $a_{1,1}$ i $a_{2,2}$ musimy teraz wybrać taką ich kombinację, aby q było najmniejsze, tj.

$$\frac{\partial q}{\partial a_{1,1}} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial a_{2,2}} = 0.$$

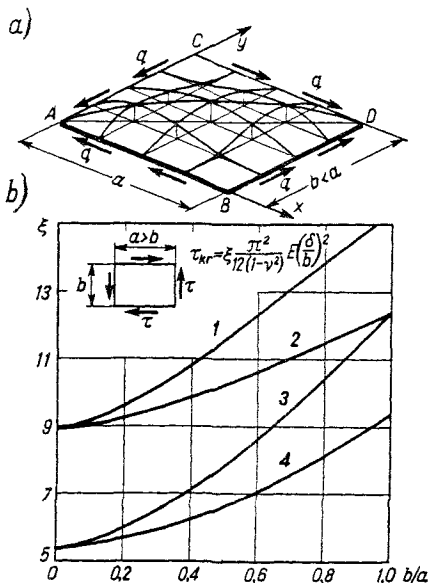
* Współczynnik $1/2$ występuje dlatego, że przy wychylaniu z położenia pierwotnego p narasta stopniowo od zera do swej końcowej, zresztą bardzo małej wartości.

** Przekształcenia polegają na scałkowaniu przez części poszczególnych składników przy $y = \text{const}$, a następnie wykorzystaniu warunków brzegowych i warunków równowagi.

Różniczkując poprzednią zależność raz względem $a_{2,2}$, drugi zaś raz względem $a_{1,1}$ i traktując q jako funkcję $a_{1,1}$ i $a_{2,2}$, mamy po przekształceniach

$$\frac{32}{9}qa_{1,1} - 4\pi^4 D \frac{b}{a^3} (1+\alpha^2)^2 a_{2,2} = 0,$$

$$-\frac{\pi^4 D b}{4a^3} (1+\alpha^2)^2 a_{1,1} + \frac{32}{9}qa_{2,2} = 0,$$



Rys. 11.4. Wyboczenie przy ścinaniu. We wzorze na σ_{kr} wymiar b jest zawsze długością krótszego boku

Krzywe: 1 — wszystkie 4 brzozy płyty zamocowane; 2 — brzozy dłuższe zamocowane, krótsze przegubowo podparte; 3 — brzozy krótsze zamocowane, dłuższe przegubowo podparte; 4 — wszystkie 4 brzozy przegubowo podparte.

gdzie $\alpha = (a/b)$. Powtarzając rozumowanie z art. 10.2, przyrównujemy do zera wyznacznik charakterystyczny tych równań, skąd

$$q_{kr} = \pm \frac{9\pi^4 D}{32b^2} \frac{(1+\alpha^2)^2}{\alpha^3},$$

a naprężenie krytyczne $\tau_{kr} = q_{kr}/\delta$ da się przedstawić

$$\tau_{kr} = \pm \xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{b}\right)^2,$$

gdzie $\xi = 9\pi^2(1+\alpha^2)^2/32\alpha^3$ jest bezwymiarowym współczynnikiem, a znaki plus i minus oznaczają, że wielkość τ_{kr} nie zależy od zwrotu wydatku q .

Dokładność otrzymanego rozwiązania jest niezadowalająca, gdyż np. dla płyty kwadratowej błąd w porównaniu z wartością dokładną jest rzędu 18%. Aby dokładność

poprawić, należy użyć funkcji w z większą liczbą parametrów, jednakże rachunki stają się wtedy żmudne, dlatego też pomijamy je tutaj podając ostateczne wyniki (krzywa 4 na rys. 11.4b). Na tymże wykresie podano również, mające znaczenie praktyczne, rezultaty dla innych przypadków podparcia brzegów.

11.2. Naprężenia krytyczne w płytach. Omówienie wyników

Poza omówionymi przykładowo przypadkami wybooczenia praktyka konstrukcyjna nasuwa szereg innych przypadków, różniących się zarówno warunkami brzegowymi, jak i rodzajem obciążenia. Przy obecnych tendencjach w wielu działach budowy ustrojów możliwie dokładne określenie naprężeń krytycznych staje się kwestią zasadniczą i dlatego w artykule tym zgromadzono dane mające znaczenie w zagadnieniach technicznych.

Wszystkie podane wykresy określają wielkość współczynnika ξ występującego we wzorze (11.4), tj.

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \xi E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2$$

lub dla $\nu = 0,3$

$$\sigma_{kr} \approx 0,90 \xi E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2.$$

Ten sam wzór stosujemy i dla naprężeń stycznych τ_{kr} (rys. 11.4b), przy czym *jako długość b dajemy w przypadku ścinania zawsze wymiar krótszego boku.*

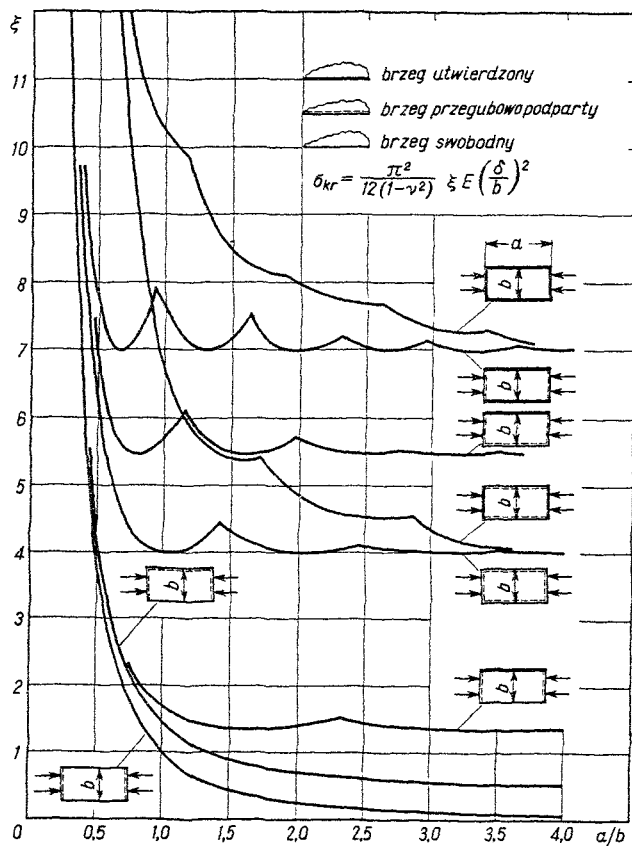
a. *Naprężenia krytyczne przy równomiernym ściskaniu.* Współczynnik ξ zależy od stosunku (a/b) i warunków brzegowych. Podane wykresy (rys. 11.5) wykazują, że dla $(a/b) > 3$ współczynnik ξ ma wartość prawie stałą z wyjątkiem przypadku, gdy obydwa boki wzdłużne są swobodne, który to przypadek, praktycznie biorąc, pokrywa się z wybooczeniem pręta, dla którego przy $(a/b) \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow 0$. Dla płyt szerszych niż dłuższych $(a/b < 1)$ naprężenia krytyczne przy zmniejszaniu się stosunku (a/b) zbliżają się do wartości

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \quad \text{lub} \quad \sigma_{kr} = \frac{4\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{a} \right)^2$$

zależnie od tego, czy sztorce są podparte przegubowo czy utwierdzone. Wynika to stąd, że przy takiej proporcji (a/b) usztywnienie środkowych włókien wzdłużnych, na skutek podparcia boków krótszych, jest stosunkowo nieznaczne (patrz wzór 11.3b). W tym więc przedziale wraz ze zmniejszaniem się stosunku (a/b) wartość ξ zbliża się asymptotycznie do

$$\xi_1 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad \text{lub} \quad \xi_2 = 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2.$$

Przedstawione wyniki (rys. 11.5) zostały obliczone przy założeniu, że brzegi płyty nie mogą się przesuwać prostopadle do płaszczyzny płyty oraz że ściskana wzdłużnie płyta może się swobodnie rozszerzać w kierunku poprzecznym. W praktyce obydwa te warunki nie zawsze są spełnione. Pozostawiając na później omówienie wpływu podatności podpór, rozważymy najpierw wpływ ograniczenia swobody



Rys. 11.5. Naprężenia krytyczne płyty ściskanej przy różnych warunkach brzegowych

odkształceń poprzecznych na skutek istnienia usztywnień poprzecznych (np. żeber). W przypadku żeber sztywno związanych z pokryciem, wpływ ten można oszacować, wprowadzając współczynnik κ

$$\kappa = A_z / a\delta, \quad (11.6)$$

w którym

A_z — pole przekroju żebra,

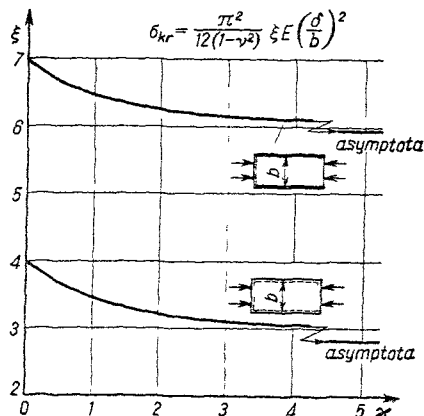
a — rozstaw żeber równy długości płyty.

Podane na rys. 11.6 wykresy dla długich płyt ($a/b > 3$), zamocowanych na bokach wzdłużnych lub przegubowo podpartych, wykazują obniżenie wartości ξ . Fakt ten staje się zrozumiały, jeśli zważyć, że ograniczenie swobody rozszerzania się w kierunku poprzecznym powoduje powstanie w tym kierunku naprężeń ściskających, ułatwiających wyboeczenie płyty.

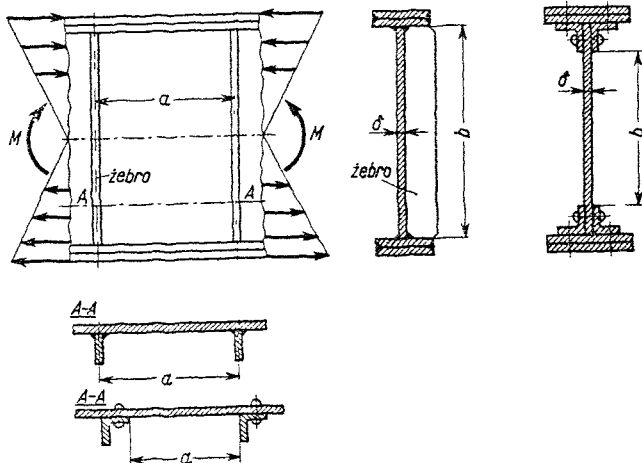
b. Naprężenia krytyczne w ścianie zginanej blachownicy. Cienkościenna ścianka zginanej blachownicy (rys. 11.7) może ulec wyboeczeniu na skutek tego, że część jej włókien pracuje na ściskanie. Stawiając zagadnienie bardziej ogólnie, zbadano stateczność płyty podpartej na czterech brzegach, ściskanej naprężeniami σ_x zmiennymi liniowo wzdłuż współrzędnej y (rys. 11.8), tj.

$$\sigma_x = \sigma \left(1 - \eta \frac{y}{b}\right). \quad (11.7)$$

Zależnie od wartości parametru η mamy różne przypadki. Jeśli na przykład $\eta = 0$, to płyta jest równomiernie ściskana, przy $\eta = 2$ rozkład naprężeń odpowiada czystemu zginaniu, wreszcie przy $\eta = 1$ naprężenia spadają liniowo od wartości σ do zera na przeciwległej krawędzi. Wielkość naprężeń krytycznych $\sigma = \sigma_{kr}$ określamy wzorem (11.4), przy czym wartość współczynnika ξ dla $0,4 \leq a/b \leq 3,0$



Rys. 11.6. Wpływ ograniczonej swobody zwięzienia poprzecznego dla długich płyt ($a/b > 3$)

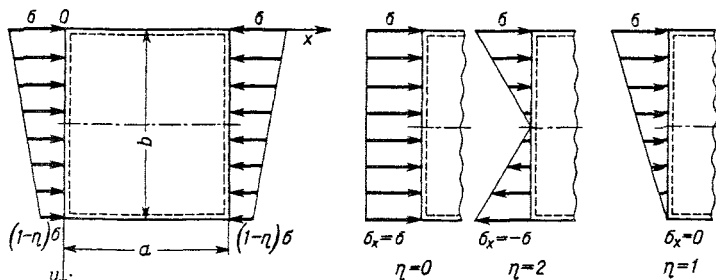


Rys. 11.7. Oznaczenia wymiarów przy analizie stateczności ścianki blachownicy w wykonaniu spawanym lub nitowanym

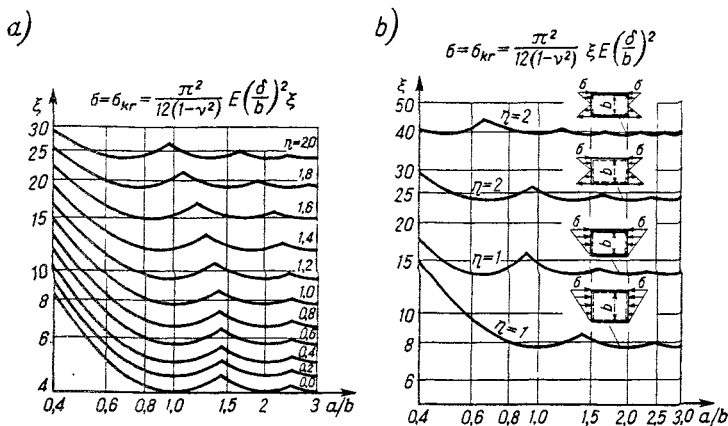
i różnych wartości parametru η podaje rys. 11.9. Jeśli podpory krawędzi wzdłużnych są dostatecznie sztywne na skręcanie, to przypadek ten zbliża się do przypadku idealnego utwierdzenia boków wzdłużnych, dla którego wartość ξ przy $\eta = 1$ i $\eta = 2$ podaje rys. 11.9b. Praktycznie biorąc, jako idealne utwierdzenie można traktować wszystkie te konstrukcje, dla których sztywność C na swobodne skręcanie dla każdego z pasów jest 8-krotnie większa niż sumaryczna sztywność płyty na zginanie, tj. bD .

Dla porównania na tymże wykresie podano z rys. 11.9a wartość ξ odpowiadającą przegubowemu podparciu brzegów.

c. *Wpływ sprężystego utwierdzenia brzegów płyty przy ścinaniu.* Podane na rysunku 11.4b wyniki dotyczą przypadków granicznych, gdy brzegi są przegubowo podparte względnie idealnie utwierdzone. Rzeczywisty sposób podparcia brzegów jest pośredni między tymi przypadkami granicznymi, a stopień



Rys. 11.8. Różne przypadki układu naprężeń liniowo zmiennych. Oznaczenie podparcia brzegów według rys. 11.5



Rys. 11.9. Naprężenia krytyczne dla płyty obciążonej układem liniowo zmiennych naprężeń ścisających

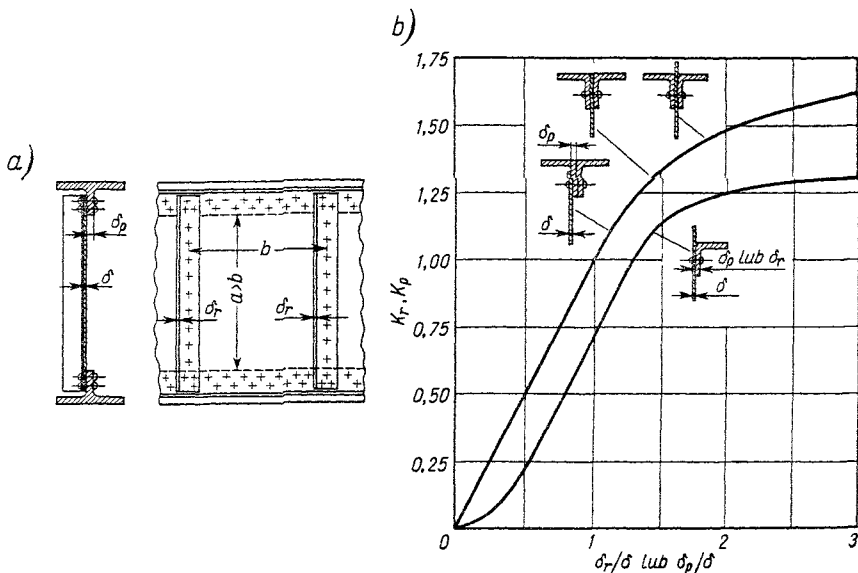
a) płyta podparta na 4 brzegach przegubowo; b) brzegi wzdłużne utwierdzone.

utwierdzenia zależy od grubości δ_p ścianki pasa, grubości δ_r rozpórki (rys. 11.10a) oraz ukształtowania pasów lub rozpórek (pojedynczy względnie podwójny kątownik). Wielkość ścinających naprężeń krytycznych τ_{kr} dla $a > b$ oblicza się ze wzoru

$$\tau_{kr} = \tau_{kro} \left[K_r + \frac{1}{2} (K_p - K_r) \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right], \quad (11.8)$$

gdzie τ_{kro} — ścinające naprężenie krytyczne dla płyty opartej przegubowo na czterech brzegach (rys. 11.4b, krzywa 4), K_r , K_p zaś należy brać z wykresu (rys. 11.10b). Jeśli $a < b$, to we wzorze (11.8) należy zamienić a na b oraz wskaźniki r na p i odwrotnie.

W konstrukcji z cienkościnnymi rozpórkami ($\delta_r < \delta$) może się zdarzyć, że τ_{kr} określone z wzoru (11.8) jest niższe niż τ_{kro} obliczone dla długiej płyty bez usztywnień (tj. gdy $\xi = 5,35$). W takim przypadku do obliczeń należy brać wartość wyższą, tj. τ_{kro} .



Rys. 11.10. Współczynniki sprężystego utwardzenia blachy środknika przy jej ścinaniu
 K_r zależy tylko od stosunku δ_r/δ , K_p tylko od δ_p/δ .

d. *Jednoczesne działanie naprężeń ściskających i ścinających* jest, jak wykazuje analiza teoretyczna i doświadczenie, bardziej niebezpieczne z uwagi na wyboczenie niż każde z tych naprężeń brane osobno. Jeśli σ i τ oznacza bezwzględne wartości ściskających i stycznych naprężeń odpowiadających wyboczeniu przy ich jednoczesnym działaniu, to potwierdzony doświadczalnie warunek wyboczenia ma postać

$$\frac{\sigma}{\sigma_{kr}} = 1 - \left(\frac{\tau}{\tau_{kr}} \right)^2, \quad (11.9)$$

gdzie σ_{kr} , τ_{kr} — krytyczne wartości naprężeń przy działaniu ich każdego z osobna, określone dla danego stosunku (a/b) i danych warunków brzegowych.

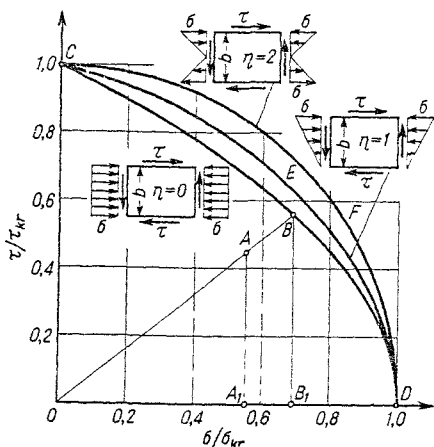
Przedstawiając wzór (11.9) wykreślnie (krzywa *CBD* na rys. 11.11), widzimy potwierdzenie sformułowanego poprzednio zdania. Jeśli na przykład $\tau/\tau_{kr} = 0,5$, to $\sigma/\sigma_{kr} = 0,75$, a więc istnienie naprężeń stycznych niższych niż τ_{kr} zredukowało wartość naprężeń ściskających σ do 75% σ_{kr} .

Omówiony przypadek dotyczył prostego ściskania ($\eta = 0$, według wzoru 11.7) i równomiernie rozłożonego ścinania. Jeśli naprężenia ściskające σ_x zmieniają się liniowo w funkcji y (rys. 11.8), a naprężenia styczne są równomiernie rozłożone, to analogiczne do (11.9) warunki wyboczenia dla $\eta = 1,0$ i $\eta = 2$ podają krzywe *CED* i *CFD* na tymże wykresie. Jako nominalną wartość σ przyjmujemy przy tym, podobnie jak na rys. 11.8, wartość maksymalnych naprężeń ściskających na krawędzi płyty.

W zastosowaniach technicznych jednocześnie ścinanie i liniowo zmienne ściskanie ($\eta \neq 0$) spotyka się przede wszystkim w ścianie belki zginanej siłami poprzecznymi i w takim przypadku, na skutek zmiany momentu zginającego, zmienia się wzdłuż długości a (rys. 11.7) wielkość naprężeń normalnych σ_x . Taki stan naprężeń różni się od rozpatrzonego stanu (rys. 11.8 i 11.9). Aby zagadnienia nie komplikować, jako nominalną wartość σ w złożonym stanie obciążeń przyjmujemy te maksymalne naprężenia ścisające w ścianie, które panują* w poprzecznym środkowym przekroju danego pola bądź w przekroju odległym od zębra o $\frac{1}{2}b$. Również dla uniknięcia komplikacji naprężenia styczne τ w złożonym stanie naprężeń przyjmujemy równe średniej wartości, tj. $(T/h\delta)$, gdzie T maksymalna siła tnąca w danym polu. Naprężenia σ_{kr} i τ_{kr} obliczamy odpowiednio według danych rys. 11.9, względnie wzoru (11.8).

Przedstawione wykresy pozwalają również określić dla danego złożonego stanu naprężeń współczynnik bezpieczeństwa ze względu na wyboczenie. Jeśli na przykład dany złożony stan naprężeń przy ścinaniu i prostym ściskaniu określony jest punktem A, to przy proporcjonalnym wzroście wszystkich obciążeń zewnętrznych punkt ten przesuwa się wzdłuż OA , a stan krytyczny wystąpi w punkcie B. Stosunek $OB : OA = OB_1 : OA_1 = BB_1 : AA_1$ jest szukanym współczynnikiem bezpieczeństwa.

Krytyczne naprężenia ścinające τ i równomiernie rozłożone rozciągające σ przy ich jednoczesnym działaniu określa się nadal ze wzoru (11.9), z tym tylko, że odpowiednia wartość σ wypada jako ujemna. Jeśli na przykład $(\tau/\tau_{kr}) = 2$, to $\sigma = -3\sigma_{kr}$, co oznacza, że przyłożenie naprężenia rozciągającego o 3-krotnej wartości σ_{kr} podnosi dwukrotnie krytyczne naprężenia ścinające.



Rys. 11.11. Wyboczenie płyty przy jednoczesnym ściskaniu i ścinaniu

11.3. Wyboczenie płyt powyżej granicy sprężystości

Określone wzorem (11.4) wartości σ_{kr} lub τ_{kr} otrzymano przy założeniu, że materiał płyty podlega prawu Hooke'a, wobec czego wzór ten stosować można dopóty, dopóki obliczone według niego wartości σ_{kr} (lub τ_{kr}) są niższe od granicy sprężystości materiału: σ_{spr} (lub τ_{spr}). Podstawiając te ostatnie wartości do wzoru (11.4) otrzymujemy w wyniku graniczną wartość $(b/\delta)_{gr}$:

$$(b/\delta)_{gr} = 0,95 \sqrt{\xi E / \sigma_{spr}} \quad \text{lub} \quad (b/\delta)_{gr} = 0,95 \sqrt{\xi E / \tau_{spr}}, \quad (11.10)$$

powyżej której można stosować wzór (11.4). Jak widać, wartość $(b/\delta)_{gr}$ zależy od rodzaju obciążenia jak i od sposobu podparcia brzegów płyty, gdyż te parametry wpływają na ξ .

Dla płyt, w których stosunek $(b/\delta) < (b/\delta)_{gr}$, analizę wyboczenia należy przeprowadzić uwzględniając, podobnie jak w przypadku prętów (art. 10.9), nieliniową zależność $\sigma = f(\epsilon)$.

* Wybieramy ten przekrój, w którym te maksymalne naprężenia są większe.

W odróżnieniu jednak od prętów mamy tutaj do czynienia z zagadnieniem bardziej złożonym, gdyż materiał płyty przestaje być izotropowy (równokierunkowy). Przedstawiając płytę jako ruszt złożony z szeregu prętów ściskanych, skrzyżowanych z drugim szeregiem prętów poprzecznych, zauważmy, że w pierwszym z nich średnie naprężenia $\sigma > \sigma_{spr}$, podczas gdy drugi ma naprężenia zerowe. Posługując się zatem analogią z prętem, możemy stwierdzić, że przy wyboczeniu giętna sztywność pierwszej grupy prętów jest zredukowana w stosunku (E_t/E) (patrz wzór 10.54), podczas gdy druga grupa (poprzeczna) zachowuje sztywność pierwotną odpowiadającą materiałowi sprężystemu. Zauważając, że w równaniu* (11.2), tj.

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

pierwszy składnik po lewej stronie odpowiada zgięciu prętów ściskanych, podczas gdy trzeci przedstawia zgięcie prętów poprzecznych, wpływ przekroczenia σ_{spr} uwzględnimy zmniejszając składnik pierwszy w stosunku $\psi = (E_t/E)$ i zostawiając bez zmiany składnik trzeci. Co się tyczy składnika drugiego, przedstawiającego w głównej mierze wpływ skreślenia (patrz wzory 9.2 i 9.3c), to dla prostoty rachunków możemy w braku doświadczalnych danych założyć, że składnik ten zmniejsza się w stosunku pośrednim między ψ a 1, a mianowicie w stosunku $\sqrt{\psi}$. W wyniku zmodyfikowane równanie (11.2) przedstawia się jako

$$D \left(\psi \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\psi} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (11.11a)$$

a jego rozwiązanie można przeprowadzić według wskazówek podanych w art. 11.1.

Jeśli na przykład płyta jest podparta na czterech brzegach przegubowo, to zakładając postać ugięcia według (9.17a) otrzymujemy w rezultacie

$$n_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \sqrt{\psi} \left(\frac{mb^4 \sqrt{\psi}}{a} + n^2 \frac{a}{bm^4 \sqrt{\psi}} \right)^2, \quad (11.11b)$$

tj. wartość różniącą się od podanej wzorem (11.3a) obecnością współczynnika ψ . Przeprowadzając dyskusję wyniku, najmniejszą wartość n_x określimy zakładając $n = 1$ oraz

$$m = a/b^4 \sqrt{\psi}.$$

Jak widać, liczba półfal przy wyboczeniu poza granicami sprężystości jest większa niż przy wyboczeniu w granicach sprężystości, a linie węzłowe dzielą tym razem płytę na prostokąty, których szerokość b jest większa niż długość $b^4 \sqrt{\psi}$. Wartość naprężeń krytycznych $\sigma_{kr} = n_x/\delta$ wynosi

$$\sigma_{kr} = 4 \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \sqrt{\psi} \quad (11.12)$$

i jest w stosunku $\sqrt{\psi}$ mniejsza niż w przypadku idealnie sprężystej płyty o tych samych wymiarach.

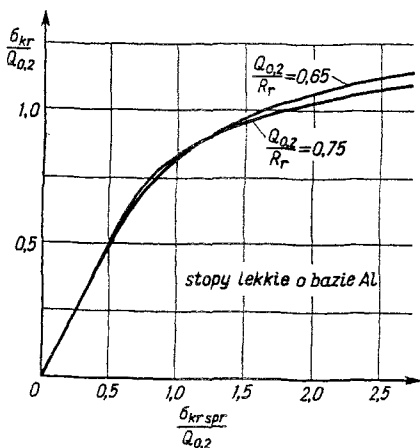
* Po prawej stronie równania zostanie tylko składnik odpowiadający ściskaniu wzdłuż osi x .

Jak wykazuje dodatkowa analiza, ten ostatni wniosek można stosować z bardzo dużą dokładnością również i w innych przypadkach podparcia brzegów ściskanej płyty. Nadając przeto wyrażeniu (11.12) ogólną postać, możemy napisać

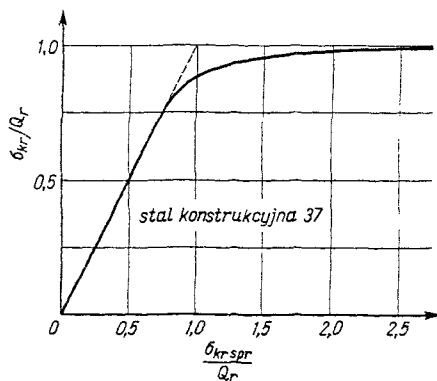
$$\sigma_{kr} = \sigma_{krspr} \sqrt{\psi}, \quad (11.13)$$

gdzie σ_{krspr} — naprężenie krytyczne płyty idealnie sprężystej z tymi samymi warunkami brzegowymi i o tych samych wymiarach co i płyta rzeczywista. Jak wykazują przy tym doświadczenia, rzeczywiste wartości naprężeń krytycznych są nieco wyższe od obliczonych według (11.13), dając tym samym pewien niewielki margines bezpieczeństwa.

Praktyczne wykorzystanie wzoru (11.13) jest możliwe, jeśli znana jest zależność $\sigma = f(\varepsilon)$, co pozwala wyznaczyć wartości $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ (patrz rys. 10.29a). Opierając się na badaniach typowych stopów aluminiowych wyniki przeliczeń według wzoru (11.13) podano na rys. 11.12. Umożliwiają one określenie rzeczywistego σ_{kr} , jeśli tylko znana jest umowna granica plastyczności $Q_{0,2}$ i doraźna wytrzymałość R_r materiału oraz obliczone ze wzoru (11.4a) σ_{krspr} . Analogiczny wykres dla stali 37, znajdującej szerokie zastosowanie



Rys. 11.12. Zależność rzeczywistych σ_{kr} od σ_{krspr} dla ściskanych płyt ze stopów Al



Rys. 11.13. Zależność rzeczywistych σ_{kr} od σ_{krspr} dla ściskanych płyt ze stali 37

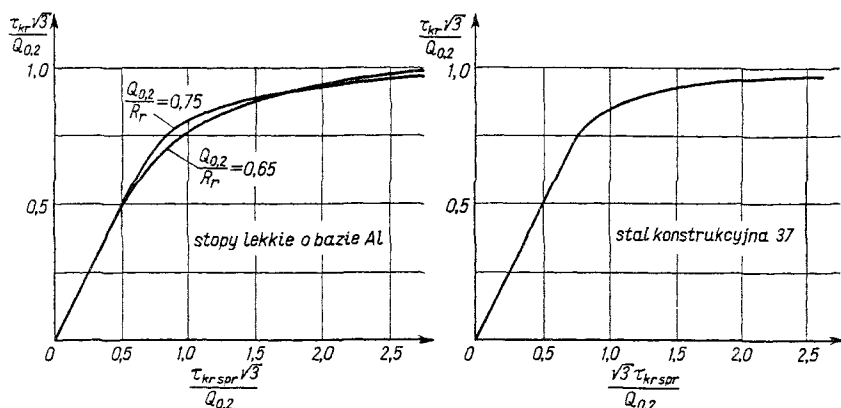
w normalnych konstrukcjach stalowych, podaje rys. 11.13, przy czym jest charakterystyczne, że dla tej stali σ_{kr} nigdy nie może być wyższe od Q_r . Jest to oczywiste, jeśli zważyć, że w odróżnieniu od stopów lekkich stal ta ma wyraźną granicę plastyczności Q_r , tak że przy $\sigma_{kr} \rightarrow Q_r$, $\sqrt{\psi} \rightarrow 0$ i $\sigma_{krspr} = (\sigma_{kr}/\sqrt{\psi}) \rightarrow \infty$.

W przypadku ścinania płyty celowe jest założyć, że materiał zostaje izotropowy i wszystkie sztywności na zginanie i skręcanie redukują się w tym samym stosunku ψ . W takim przypadku równanie (11.2) zostaje niezmienione z tym tylko, że zamiast pierwotnej sztywności D należy wstawić zredukowaną sztywność ψD .

Naprężenia krytyczne τ_{kr} będą więc tym razem zmniejszone w stosunku ψ w porównaniu z wartością τ_{krspr} dla płyty idealnie sprężystej. Wykresy, analogiczne do przedstawionych

poprzednio, są podane na rys. 11.14, przy czym uwzględniono fakt, że granica plastyczności Q_1 przy ścinaniu jest w stosunku $\sqrt{3}$ razy mniejsza od odpowiedniej wartości $Q_{0,2}$ lub Q_r .

Wreszcie w przypadku jednoczesnego działania naprężeń normalnych i stycznych, przekraczających granicę sprężystości, można w przybliżeniu posługiwać się wzorem (11.9) lub wykresem (rys. 11.11) wstawiając rzeczywiste wartości σ_{kr} i τ_{kr} .



Rys. 11.14. Zależność rzeczywistych τ_{kr} od $\tau_{kr\text{ spr}}$ dla płyt ścinanych

11.4. Wyboczenie lokalne prętów

Jak podano w art. 10.3, jedną z możliwych postaci wyboczenia ściskanych krótkich prętów jest lokalna utrata stateczności, charakteryzująca się tym, iż naroża przekroju poprzecznego, w którym spotykają się sąsiadujące ścianki, pozostają nieruchome (rys. 10.5d). W takim przypadku każda ze ścianek profilu stanowi płytę, która na krawędziach wzdłużnych, tj. równoległych do kierunku obciążenia ściskającego, ugina się o takie same kąty jak i sąsiadujące z nią ścianki. Długość półfal dzielących daną ściankę na szereg pagórków i dolin jest przy tym rzędu wymiarów przekroju poprzecznego. W odróżnieniu od innych postaci wyboczenia (giętnego czy skrętno-giętnego) pojawienie się wyboczenia lokalnego powoduje znaczną stratę sztywności pręta, nie musi jednak prowadzić do natychmiastowego zniszczenia pręta (patrz art. 12.2).

Ilościowe ujęcie tej ostatniej postaci wyboczenia prętów, tj. określenie wielkości naprężeń krytycznych, przeprowadzamy najczęściej w sposób przybliżony, zaniedbując współdziałanie sąsiadujących ścianek, tj. zakładając, iż wzdłużne krawędzie rozpatrywanej ścianki podparte są przegubowo. Licząc się ponadto z faktem, że długość nawet bardzo krótkiego pręta jest zazwyczaj znacznie większa niż wymiary poprzeczne przekroju, przy wyznaczaniu σ_{kr} dla poszczególnych ścianek profilu rozpatrujemy każdą ze ścianek jako prostokątną płytę, w której $a/b \geq 4$.

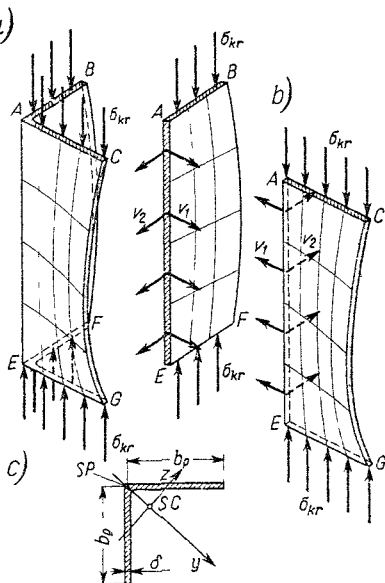
Zastosowanie tych rozważań pokażemy na przykładzie równoramiennego profilu kątownego (rys. 11.15). Traktując każdą z półek kątownika jako płytę podpartą przegubowo na trzech brzegach, a na czwartym brzegu swobodną, zauważmy, że w danym szczególnym przypadku upraszczające założenie o przegubowym podparciu wzdłużnej krawędzi AE jest spełnione ściśle. Obydwie bowiem półki obracają się o ten sam kąt tak, że nie ma między nimi oddziaływań w postaci momentów gnących. Zachowując drugie założenie

upraszczające (tj. $a/b > 4$) σ_{kr} obliczamy ze wzoru (11.4), wstawiając według rys. 11.5: $\xi = 0,456$ oraz $b = b_p$. W wyniku dla $\nu = 0,3$ mamy

$$\sigma_{kr} \approx 0,41E \left(\frac{\delta}{b_p} \right)^2 \quad (11.14)$$

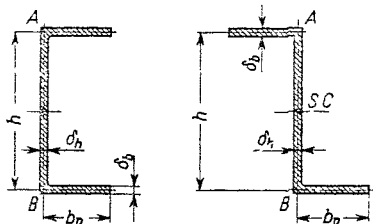
jako wartość naprężeń krytycznych jednakową dla obydwu ścianek. Porównując ten wynik z obliczoną według art. 10.6 wartością σ_s dla przypadku wyboczenia skrętnego*

$$\sigma_s = P_s/A = G \left(\frac{\delta}{b_p} \right)^2 \approx 0,385E \left(\frac{\delta}{b_p} \right)^2$$



Rys. 11.15. Wyboczenie lokalne profilu kątownego

a) obraz odkształceń; b) statyka poszczególnych ścianek; c) układ osi i oznaczenia.



Rys. 11.16. Geometria profili analizowanych na wyboczenie lokalne

widzimy, że obydwa rezultaty są prawie identyczne (różnica wyników $\sim 7\%$). Pamiętając, że wartość σ_s jest wartością przybliżoną, z uwagi na pominięcie własnej sztywności półek na zginanie**, prawidłową wartości σ_{kr} będzie wartość określona wzorem (11.14).

W przypadku profilu ceowego lub zetowego (rys. 11.16), wartość naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego obliczamy traktując ściankę AB jako płytę podpartą przegubowo

* Wartość siły krytycznej obliczamy według (10.35) zauważając, że dla krótkich prętów $P_w \gg P_s$. Wtedy $P_{kr} \approx P_s$, a $\sigma_s = P_s/A = C/I_{SP}$, gdyż dla profilu kątownego sztywność nieswobodnego skręcania $C_s = 0$. Biorąc następnie pod uwagę, że sztywność swobodnego skręcania $C = 2G\delta^3 b_p/3$, a biegunowy moment bezwładności względem SP $J_{SP} = 2b_p^3 \delta/3$ otrzymujemy podany powyżej wynik.

** Gdyby tę sztywność uwzględnić, to według założeń art. 10.6 otrzymalibyśmy dla σ inną wartość wyższą niż σ_{kr} według wzoru (11.14). Tak być zresztą powinno z uwagi na fakt, że metoda art. 10.6 jest przybliżona (założenie nieodkształcalności przekrojów poprzecznych).

na czterech brzegach ($\xi = 4$), półki zaś jako płyty podparte na trzech brzegach przegubowo, a na czwartym brzegu swobodne ($\xi = 0,456$). Średnią wartość $(\sigma_{kr})_{sr}$ określamy ze wzoru

$$(\sigma_{kr})_{sr} = \sum (\sigma_{kr} A)_i / \sum A_i, \quad (11.15)$$

w którym

$(\sigma_{kr})_i$ — naprężenie krytyczne dla danej ścianki, traktowanej jako płyta,

A_i — pole przekroju tej ścianki.

Tak więc w przypadku przekroju ceowego lub zetowego, gdy $\nu = 0,3$, mamy

$$(\sigma_{kr})_{sr} = E \left(\frac{\delta_h}{h} \right)^2 \frac{3,62 + 0,82(\delta_b^3 h / \delta_h^3 b_p)}{1 + 2(b_p \delta_b / h \delta_h)}. \quad (11.16)$$

Stosowalność wzoru (11.16) ograniczona jest warunkiem, aby σ_{kr} dla ścianki AB było wyższe niż σ_{kr} dla pólek; w przeciwnym bowiem przypadku wyoboczenie ścianki AB wywiera tak silny destabilizujący wpływ na półki, że ulegają one wyoboczeniu jednocześnie ze ścianką AB . Tak więc gdy

$$0,456(\delta_p/b_p)^2 > 4(\delta_h/h)^2,$$

tj. $(h\delta_b/b_p\delta_h) > 2,95 \approx 3$, to dla $\nu = 0,3$

$$(\sigma_{kr})_{sr} = 3,62E(\delta_h/h)^2. \quad (11.17)$$

Ścisłe określenie naprężeń krytycznych dla profilu ceowego lub zetowego uwzględnia sprężyste utwierdzenie poszczególnych ścianek przez ścianki sąsiadujące. Wynik tych rozważań podaje wykres (rys. 11.17a), na którym linia kreskowana przedstawia wartości obliczone ze wzoru (11.16) dla $\delta_h = \delta_b$. Jak widać, rozwiązanie przybliżone daje dość dobrą zgodność w zakresie najczęściej stosowanych proporcji $0,3 < (b_p/h) < 0,6$, natomiast gdy $(b_p/h) > 0,6$, rozbieżność jest większa i w tym przedziale wskazane jest posługiwać się wynikami rozwiązania ścisłego.

W przypadku profilu dwuteowego uproszczoną analizę przeprowadzamy stosując wzór (11.15), przy czym obliczając σ_{kr} dla pólek należy oczywiście we wzorze (11.4) jako szerokość b wstawić $b = b_p/2$. W wyniku

$$(\sigma_{kr})_{sr} = E \left(\frac{\delta_h}{h} \right)^2 \frac{3,62 + 3,28(\delta_b^3 h / \delta_h^3 b_p)}{1 + 2(b_p \delta_b / h \delta_h)}. \quad (11.18a)$$

Podobnie jak w przypadku przekroju ceowego ograniczenie stosowalności powyższego wzoru stanowi warunek, aby σ_{kr} dla ścianki było niższe niż σ_{kr} dla pólek, tj. $4 \cdot 0,456(\delta_b/b_p)^2 > 4(\delta_h/h)^2$, co prowadzi do zależności

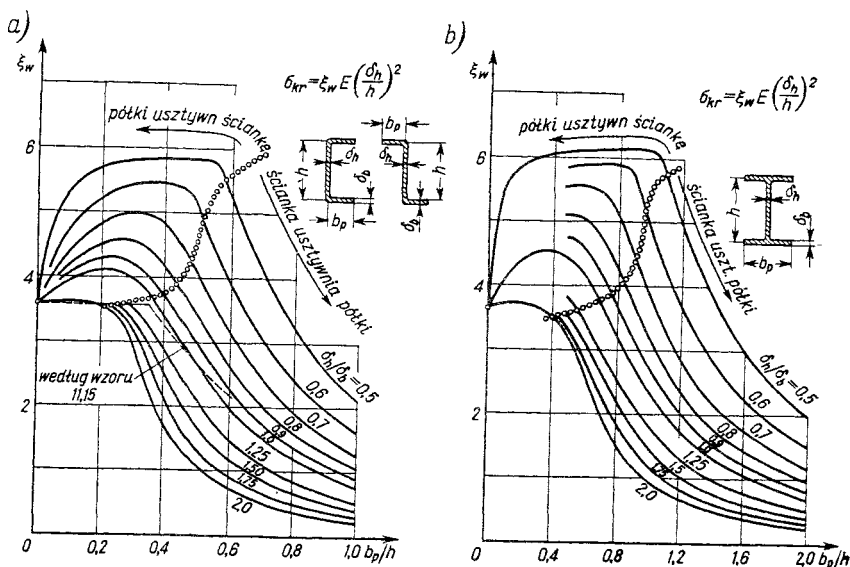
$$h\delta_p/b_p\delta_h > 1,48 \approx 1,5. \quad (11.18b)$$

Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to σ_{kr} obliczamy według wzoru (11.17). Ścisła wartość naprężeń krytycznych, z uwzględnieniem sprężystego utwierdzenia ścianki przez półki i na odwrót, podana jest na rys. 11.17b.

Przy stosowaniu analizy uproszczonej bądź wyników analizy ścisłej (rys. 11.17) należy pamiętać o ograniczeniu wynikającym z niedoskonałej sprężystości materiału. W przy-

padku więc, gdy obliczone σ_{kr} lokalnego wyboczenia są większe niż σ_{spr} , należy zredukować naprężenia według wzoru (11.13) bądź według danych z rys. 11.13 i 11.12.

Praktyczne znaczenie przeprowadzonych rozważań polega na ograniczeniu konstruktora w tendencji do zmniejszenia grubości ścianek w prętach pracujących na ściskanie. Z całej bowiem dotychczasowej analizy (rozdz. 10) wynikało, że niezależnie od postaci



Rys. 11.17. Wyniki analizy wyboczenia lokalnego według rozwiązania ścisłego

wyboczenia powiększenie wymiarów przekroju kosztem pocienienia ścianki podnosi naprężenia krytyczne. Naprężenia krytyczne wyboczenia lokalnego, będąc praktycznie niezależne od długości pręta, dają nieprzekraczalną granicę ścieniania ścianek w tych wszystkich przypadkach, gdy zamierzeniem konstruktora jest niedopuszczenie do utraty stateczności we wszystkich stanach obciążenia.

11.5. Wyboczenie płyty wzmocnionej żebrem

Podniesienie naprężeń krytycznych, pożądane zawsze z uwagi na możliwość lepszego wykorzystania materiału, bądź podniesienie współczynnika bezpieczeństwa jest według wzoru (11.4) możliwe albo przez zwiększenie sztywności płyty na zginanie, bądź przez zmniejszenie wymiaru b . Zwiększenie sztywności płyty przez zwiększenie grubości jest ciężarowo nieekonomiczne, natomiast bardziej prawidłowe rozwiązanie pod postacią konstrukcji warstwowej (rys. 9.4) nie znalazło jeszcze zbyt szerokiego zastosowania głównie z powodu trudności wykonawczych i materiałowych*. W dążeniu zatem do ekonomii

* Główną trudność stanowi tu zagadnienie klejenia okładzin do warstwy środkowej oraz odporność tego połączenia klejonego na obciążenia trwałe i zmęczeniowe przy zwykłych i podniesionych temperaturach.

ciężaru stosujemy drugą metodę polegającą na wzmocnieniu płyty żebrami, dzielącymi pierwotną szerokość b_c na mniejsze odcinki i tak sztywnymi, aby przy wyboczeniu linie styku tych żeber z płytą stały się liniami węzłowymi. Tak na przykład płyta oparta przegubowo na czterech brzegach (rys. 11.18) ma możliwość wyboczyć się, tak jak to pokazuje rys. 11.18b bądź tak jak to pokazuje rys. 11.18c, a cel nasz będziemy uważać za osiągnięty, gdy $\sigma_{kr} < \sigma'_{kr}$. Parametrami decydującymi o tym są względne sztywności żebra na ściskanie $\gamma = A_z/b_c\delta$, a przede wszystkim na zginanie $\beta = EJ_z/b_cD$. Spełnienie postawionego zadania wiąże się ze spełnieniem warunku $\beta > \beta_{gr}$, gdzie graniczna wartość β_{gr} (tabl. 11.1) odgrywa taką samą rolę, jak K_{gr} w przypadku belki z dodatkową podporą sprężystą (art. 10.2, rys. 10.4). Korzyść, którą przy tym osiągamy, wyraża się ~ 4 -krotnym zwiększeniem* σ_{kr} w porównaniu z przypadkiem płyty nie wzmocnionej żebrem, gdyż tym razem szerokość b ulega dwukrotnemu zmniejszeniu.

Analizę zagadnień tego rodzaju pokażemy na przykładzie ściskanej równomiernie płyty z rys. 11.18, zakładając dla uproszczenia, że połączenie żebra z płytą pozwala elementom płyty prostopadłym do AB na swobodny obrót względem osi żebra. Ponadto zakładamy, że moduły sprężystości żebra i płyty są te same, wobec czego podłużne żebro przenosi naprężenia normalne σ równe naprężeniom w płycie.

Posługując się metodą energetyczną (art. 11.1) założymy, że przy wyboczeniu żebro zgina się (rys. 11.18b) i że powierzchnia ugięcia płyty przy jej wychyleniu z położenia równowagi ma postać

$$w = a_{m,1} \sin(m\pi x/a) \sin(\pi y/b_c),$$

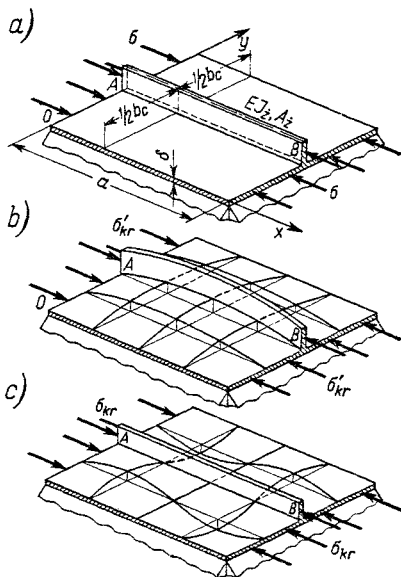
a ugięcie żebra w_z równe ugięciu płyty dla $y = 0,5b_c$ wynosi

$$w_z = a_{m,1} \sin(m\pi x/a).$$

Podstawiając pierwsze z tych wyrażeń do wzoru (11.5a), drugie do wzoru (g) (art. 10.2), po scałkowaniu otrzymujemy przyrost energii ΔV_g w płycie i żebrze

$$\Delta V_g = \left[\frac{\pi^4 Dab_c}{8} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b_c^2} \right)^2 + \frac{\pi^4 m^4 EJ_z}{4a^3} \right] a_{m,1}^2.$$

* To zwiększenie zależy od stosunku a/b_c i od sposobu połączenia żebra z płytą. Jeśli na przykład żebro, niezależnie od sztywności na gięcie, ma dużą własną sztywność na skręcanie i połączone jest w ten sposób, że utwierdza ono sprężystość krawędzi AB zarówno przeciw ugięciu, jak i obrotowi względem tej krawędzi, to warunki podparcia krawędzi AB obu części płyty zbliżają się raczej do idealnego zamocowania, zwiększając tym samym wartość współczynnika ξ z ~ 4 na $\sim 5,5$ (rys. 11.5). Fakt ten wykorzystujemy w konstrukcjach lotniczych (art. 11.6), w innych (np. dźwignicach) pomijamy.



Rys. 11.18. Wyboczenie płyty wzmocnionej żebrem

a) geometria płyty; b) pierwsza forma utraty stateczności; c) druga forma utraty stateczności. Na rys. c) narysowano najbardziej prawdopodobną formę dla proporcji $a \geq 0,7b_c$.

Zmianę energii ΔV_P obciążeń zewnętrznych działających na płytę i żebro* otrzymujemy, całkując, po podstawieniu funkcji na w i w_z , wyrażenie (11.5b) i wyrażenie (i) z art. 10.2

$$\Delta V_P = - \left[\frac{\pi^2 m^2 b_c}{8a} (\sigma \delta) + \frac{\pi^2 m^2}{4a} (\sigma A_z) \right] a_{m,1}^2.$$

Z warunku $\Delta \Pi = \Delta V_g + \Delta V_P = 0$, mamy po uproszczeniach

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{b_c} \right)^2 \frac{\left(m + \frac{1}{m} \alpha^2 \right)^2 + 2\beta m^2}{\alpha^2 (1+2\gamma)}, \quad (11.19a)$$

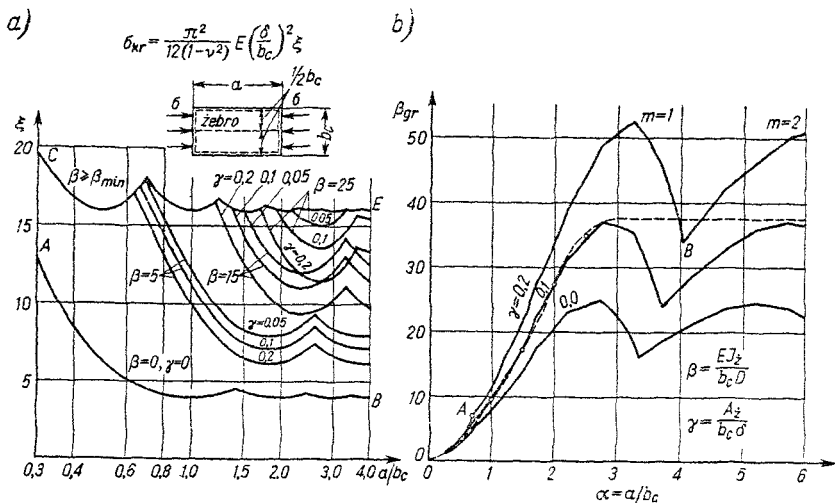
gdzie bezwymiarowe współczynniki

$$\alpha = a/b_c, \quad \beta = EJ_z/b_c D, \quad \gamma = A_z/b_c \delta \quad (11.19b)$$

charakteryzują kształt płyty oraz względną sztywność żebra na zginanie i ściskanie. Jak widać, wartość zależy od liczby półfal m , a najmniejszą wartość osiągamy, gdy

$$m = \alpha / \sqrt{1+2\beta}. \quad (11.19c)$$

Porównując tę ostatnią wartość z wynikami dyskusji wzoru (11.3b) stwierdzamy, że obecność żebra zmniejsza liczbę półfal odpowiadającą minimum siły krytycznej. Tak na przykład jeśli $\alpha = (a/b_c) = 4$, a sztywność żebra EJ_z jest 7,5 raza większa niż cała sztywność płyty $b_c D$ ($\beta = 7,5$), to liczba półfal według (11.19c) jest $m = 2$, a nie $m = 4$, jakby to było w przypadku płyty nie wzmocnionej. Z uwagi na warunki podparcia liczba m musi być oczywiście całkowita, wobec czego gdy ze wzoru (11.19c) wypadnie m niecałkowite, to dla określenia $(\sigma_{kr})_{\min}$ podstawiamy dwie najbliższe wartości naturalne m wybierając następnie tę, która daje niższą wartość σ_{kr} .



Rys. 11.19. Wyniki analizy wyboczenia ściskanej płyty wzmocnionej żebrem wzdłużnym
b) określenie granicznej sztywności, powyżej której najbardziej prawdopodobna jest postać wyboczenia według rys. 11.18c.

Przeprowadzone rozwiązanie (11.19) stanowi jedynie pierwsze przybliżenie. Wynik dokładniejszy otrzymalibyśmy stosując dwuczłonową funkcję w postaci:

$$w = a_{m,1} \sin(m\pi x/a) \sin(\pi y/b_c) + a_{m,3} \sin(m\pi x/a) \sin(3\pi y/b_c).$$

* Należy zauważyć, że $\Delta V_P < 0$ na skutek założenia na rys. 11.18 naprężeń σ jako ściskających tak, że $n_x = -\sigma \delta$.

Okazuje się, że różnice między pierwszym i drugim przybliżeniem są istotne tylko dla płyt krótkich ($\alpha = (a/b_c) < 1,5$). Dla płyt dłuższych różnica staje się nieistotna. Wyniki odpowiednich przeliczeń dla różnych wartości parametrów α , β i γ w postaci współczynnika ξ (wzór 11.4) podaje rys. 11.19a. Jak widać, wykres ten zawiera się w polu między krzywymi AB i CE , z których pierwsza (tj. AB) odpowiada wyboczeniu nie wzmocnionej płyty z jedną półfalą w kierunku osi y , druga (tj. CE), gdy tych półfal jest dwie. Wykres ten, poza bezpośrednią odpowiedzią, tj. określeniem ξ dla danej konstrukcji, pozwala odpowiedzieć również częściowo na drugie pytanie, a mianowicie określa on, jaka jest potrzebna minimalna sztywność żebra, aby żebro zostawało proste, a postać wyboczenia była według rys. 11.18c. Tak na przykład dla $\alpha = 1,2$ i $\gamma = 0,2$ żebro ukształtowane tak, że $EJ_z \geq 15b_c D$ pozwala spełnić ten warunek.

Pełną odpowiedź na to drugie pytanie daje oczywiście przyrównanie σ_{kr} według wzoru (11.19a) do wartości σ_{kr} obliczonej dla płyty podpartej przegubowo na czterech brzegach o szerokości $0,5b_c$, a następnie wyznaczeniu stąd wartości β_{gr} . Przeprowadzając odpowiednie rachunki mamy zależność

$$\beta_{gr} = \frac{2\alpha^2(1+2\gamma)}{m^2} \xi - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2} \right)^2, \quad (11.20)$$

w której ξ — współczynnik z rys. 11.5 dla płyty o bokach a i $0,5b_c$ podpartej przegubowo na czterech brzegach.

Wykiem wzoru (11.20) jest, podany na rys. 11.19b, wykres β_{gr} w zależności od parametru γ i stosunku a/b_c . Każda z krzywych wykazuje przy tym szereg drobnych załamań, wywołanych zmianą liczby półfal na każdej z półpłyt. Tak na przykład punkt A na krzywej dla $\gamma = 0,2$ ma odciętą $\sim 0,7$, tzn. gdy $2a/b_c \approx 1,4$ i gdy postać wyboczenia na półplacie zmienia liczbę półfal z $m' = 1$ na $m' = 2$. Poza tymi drobnymi załomami krzywe wykazują załomy takie jak w punkcie B , odpowiadające zmianie postaci wyboczenia płyty z żebrem. Tak dla $\gamma = 0,2$ i $\alpha = a/b_c < 4$ utrata stateczności w postaci, podanej na rys. 11.18b, następuje przy liczbie półfal $m = 1$, powyżej tej wartości α : przy liczbie $m = 2$.

W podobny sposób można rozwiązać i inne przypadki obciążenia płyty oraz inne warianty jej wzmocnienia, otrzymując w wyniku podobne wykresy jak na rys. 11.19b. Budowa tych wykresów jest jednak dość kłopotliwa, zwłaszcza gdy z uwagi na ich zastosowanie zmniejszymy odstęp między kolejnymi wartościami parametrów γ i β . Z tego powodu w praktyce stosuje się wzory przybliżone, które z techniczną dokładnością oddają rzeczywisty przebieg krzywych. Tak dla β_{gr} zamiast wzoru (11.20) stosujemy:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{gr} &= \alpha^2(7+16\gamma) - \frac{(\alpha^4-1)}{2} + \gamma, & \text{gdy} & \quad \alpha < \sqrt{7+16\gamma}, \\ \beta_{gr} &= \frac{1}{2}(7+16\gamma)^2 + \frac{1+2\gamma}{2}, & \text{gdy} & \quad \alpha > \sqrt{7+16\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

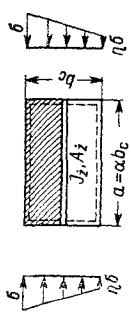
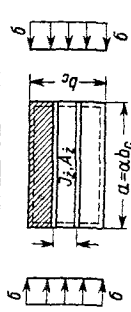
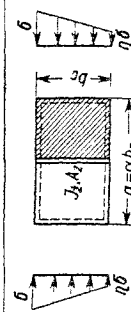
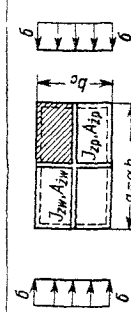
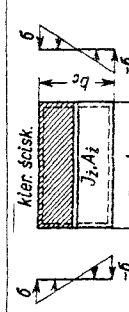
Przebieg krzywych wyrażonych zależnościami (11.21) podany jest przykładowo (dla $\gamma = 0,1$) linią przerywaną na rys. 11.19b. Jak widać, zgodność jest bardzo dobra z tym, że w drugim przedziale całkowicie świadomo upraszczamy zagadnienie, stosując obwiednię wierzchołków rzeczywistego przebiegu $\beta_{gr} = f(a/b_c)$.

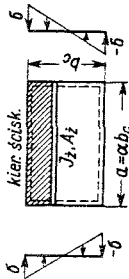
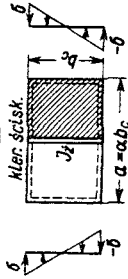
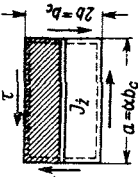
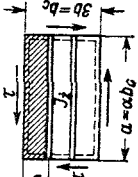
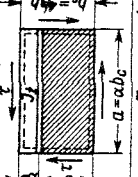
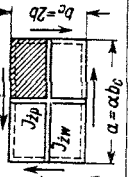
Wyniki rozwiązań dla innych przypadków w postaci takich właśnie uproszczonych wzorów dla β_{gr} podane są w tabl. 11.1 z oznaczeniami według wzorów (11.19b). Wielkość naprężeń krytycznych σ_{kr} , τ_{kr} określamy ze wzoru (11.4) traktując wszystkie cztery brzegi płyty zakreskowanej jako przegubowo podparte*, a jako wymiar b wstawiając jej szerokość. Przy ścinaniu wymiar b oznacza zawsze długość krótszego boku płyty otrzymanej z podziału płyty pierwotnej.

Tablica 11.1 określa β_{gr} tylko dla przypadków prostych obciążeń. Przy jednoczesnym działaniu naprężeń σ i τ minimalną wymaganą sztywność $(EJ_z)_{\min}$ żebra obliczamy w sposób przybliżony ze wzoru

$$(EJ_z)_{\min} = (EJ_z)\sigma \frac{n}{n_\sigma} + (EJ_z)\tau \frac{n}{n_\tau}, \quad (11.22)$$

* Tego rodzaju uproszczenie robimy w stalowych konstrukcjach dźwigni. W konstrukcjach lotniczych zjawisko analizujemy dokładnie (art. 11.6).

Polożenie żebra i rodzaj obciążenia		Zakres stosowności	Graniczna sztywność żebra
Liniowo zmienne wzdłuż szerokości naprężenia ściskające			
1	Żebro wzdłużne pośrodku szerokości płyty $b_c = 2b$	 $1 \leq \alpha \leq 0$	$\beta_{gr} = (0,53 + 0,47\eta) \left[\alpha^2(7 + 16\gamma) - \frac{\alpha^4}{2} + \frac{1 + 2\gamma}{2} \right]$ $\beta_{gr} = (0,53 + 0,47\eta) \left[\frac{1}{2}(7 + 16\gamma)^2 + \frac{1 + 2\gamma}{2} \right]$
2	2 jednakowe żebra wzdłużne rozstawione równomiernie $b_c = 3b$	 $\alpha < \sqrt{17 + 54\gamma}$ $\alpha > \sqrt{17 + 54\gamma}$	$\beta_{gr} = \frac{2\alpha^2}{3} (17 + 54\gamma) - \frac{\alpha^4}{3} + \frac{1 + 3\gamma}{3}$ $\beta_{gr} = \frac{\alpha^2}{3} (17 + 54\gamma)^2 + \frac{1 + 3\gamma}{3}$
3	Żebro poprzeczne pośrodku długości płyty $b_c = b$	 $0,4 \leq \alpha \leq 1,4$ $1 \leq \alpha \leq 0$	$\beta_{gr} = \frac{4 \left(\frac{4}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{4} \right)}{\pi^2 \alpha \left(1 - \frac{\pi^2 \alpha^4}{12 \alpha^4 - 48} \right)}$
4	2 żebra dzielące płytę na 4 jednakowe części* $b_c = 2b$	 $0,9 \leq \alpha \leq 1,1$	$\beta_{gr} = \frac{(1 + \alpha^2)^2 (3 + 8\gamma_w)}{2(1 + \alpha \alpha^3)}$ gdzie $\gamma_w = \frac{A_{żw}}{b_c \delta}$; $\alpha = \frac{J_{żp}}{J_{żw}}$.
Czysto zginanie w płaszczyźnie płyty			
5	1 żebro wzdłużne pośrodku płyty $b_c = 2b$		$\beta_{gr} = 1,3$

6	1 żebro wzdłużne na $\frac{1}{4}$ szerokości płyty od kra- wędzi ścisłanoj $b_c = 4b$		$\alpha \leq 0,5$	$\beta_{gr} = 2,4 + 18,4\gamma$
7	1 żebro poprzeczne po- środku długości płyty $b_c = b$		$\alpha > 0,5$	$\beta_{gr} = (12 + 92\gamma)(a - 0,3)$ jednak nie więcej niż $(\beta_{gr})_{max} = 16 + 200\gamma$
			$0,6 < \alpha < 0,93$	$\beta_{gr} = 6,2 - 12,7a + 6,5a^2$
			$\alpha > 0,93$	Żebro praktycznie nie ma znaczenia
Napężenia styczne rozłożone równomiernie				
8	1 żebro pośrodku płyty		$0,5 \leq \alpha \leq 2$	$\beta_{gr} = 5,4a^2(2a + 2,5a^2 - a^3 - 1)$
9	2 jednakowe żebra roz- stawione równomiernie		$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$	$\beta_{gr} = 12,1a^2(4,4a - 1)$
10	1 żebro na $\frac{1}{4}$ długości boku		$0,75 \leq \alpha \leq 2$	$\beta_{gr} = 7,2a^2(1 - 3,3a + 3,9a^2 - 1,1a^3)$
11	2 krzyżujące się żebra dzielące płytę na 4 jedna- kowe części*		$1 \leq \alpha \leq 2$	$(\beta_{gr})_p = \frac{EJ_{zp}}{b_c D}$; $(\beta_{gr})_w = \frac{EJ_{zw}}{b_c D}$ są związane zależnościami: $(\beta_{gr})_w + (\beta_{gr})_p a^2 = 6(1 + a^2)^2$

* Obydwa żebra na skrzyżowaniu mają pełną swą sztywność na zginanie.

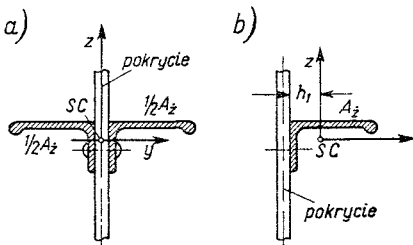
gdzie

$(EJ_z)_\sigma, (EJ_z)_\tau$ — minimalne wymagane sztywności żebra, określone z tabl. 11.1, przy oddzielnym działaniu naprężeń σ lub τ ;

$n_\sigma = \sigma_{kr}/\sigma, n_\tau = \tau_{kr}/\tau$ — współczynniki bezpieczeństwa z uwagi na wyboczenie kreskowanej części płyty przy oddzielnym działaniu σ i τ ;

n — współczynnik bezpieczeństwa przy jednoczesnym działaniu σ i τ , określony z rys. 11.11 jako stosunek $OB : OA = OB_1 : OA_1$ (art. 11.2).

Z zastosowaniem zarówno wyprowadzonych wzorów jak i wyników podanych w tablicy wiąże się kwestia prawidłowego określenia sztywności żebra na ściskanie i zginanie. Jeśli zebro ustawione jest



Rys. 11.20. Określenie parametrów żebra wzmacniającego

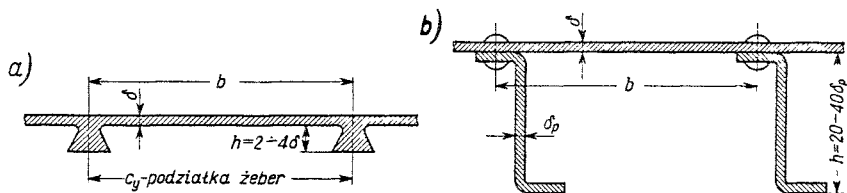
względem pokrycia symetrycznie (rys. 11.20a), to jako A_z oraz J_z bierzemy pole przekroju obu profili oraz ich sumaryczny moment bezwładności względem osi symetrii (z). W przypadku jednostronnego żebra (rys. 11.20b), przy jego wygięciu, pomiędzy pokryciem a samym profilem pojawiają się naprężenia styczne, wciągające pokrycie do współpracy. Innymi słowy przy zginaniu takiego żebra pokrycie stanowi jak gdyby jedną z jego pólek. Ponieważ środek ciężkości takiego łączonego przekroju znajduje się bardzo blisko powierzchni pokrycia, przeto przy obliczaniu J_z należy wziąć moment bezwładności przekroju żebra względem osi pokrywającej się z zewnętrzną powierzchnią pokrycia, tj.

$$J_z = J_z + A_z h_z^2.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że sztywności żeber wzmacniających, określone przez β_{gr} , są stosunkowo niewielkie. W praktyce zazwyczaj dajemy żebra mocniejsze, tj. $\beta_{rzecz} \geq \beta_{gr}$, zmierzając tym samym w kierunku zwiększenia pewności, że najmniejsza wartość σ_{kr} lub τ_{kr} odpowiadać będzie tej postaci wyboczenia, przy której żebra zostaną proste.

11.6. Wyboczenie płyt gęsto żebrowanych

W zależności od ukształtowania analiza wyboczenia takich płyt dzieli się na dwa przypadki. Pierwszy z nich obejmuje te rozwiązania konstrukcyjne, w których żebra mają niewielką wysokość (np. 3 δ), przy dużej ich szerokości* (rys. 11.21a), drugi, gdy usztyw-



Rys. 11.21. Ukształtowanie płyt żebrowanych

a) konstrukcje trawione; b) konstrukcje z nitowanymi (lub zgrzewanymi) profilami cienkoscinnymi.

* Tego rodzaju postać mają konstrukcje, w których żebra otrzymujemy przez trawienie.

niającymi żebrami są cienkościenne, na ogół otwarte profile (rys. 11.21b) o znacznej sztywności na zginanie w płaszczyźnie prostopadłej do pokrycia.

Analizę wyboczenia konstrukcji pierwszego typu przeprowadzamy zastępując rzeczywistą konstrukcję przez płytę jednorodną, podobnie jak to zrobiono w art. 9.7. Korzystając z wszystkich podanych tam uwag oraz z faktu, że wielkość p (wzór 11.1) nie zależy od ukształtowania płyty, jeśli tylko jest ona jednorodna, otrzymujemy po podstawieniu wyrażenia (11.1) do (9.34) zależność:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (11.23)$$

w której sztywności D_x , D_y , H określone są wzorami (9.35).

Rozwiązanie równania (11.23) przeprowadzamy identycznie jak dla płyty równokierunkowej (art. 11.1). Tak przy równomiernym ściskaniu płyty podpartej przegubowo na czterech brzegach (rys. 11.2) po wstawieniu identycznej funkcji (9.17a) otrzymujemy wartość wydatku n_x równą

$$n_x = \frac{\pi^2}{m^2 b^2} \left[D_x m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 2H m^2 n^2 + D_y n^4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (11.24)$$

Analiza tego wyniku daje najmniejszą wartość n_x , gdy liczba półfal w kierunku poprzecznym $n = 1$. Po przekształceniach mamy

$$n_x = \frac{\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2} \xi, \quad (11.25a)$$

gdzie bezwymiarowy współczynnik ξ

$$\xi = m^2 \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right)^2 + \frac{1}{m^2} \left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)^2 + 2 \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} \quad (11.25b)$$

jest sumą składnika zależnego tylko od sztywności płyty (składnik trzeci) i dwóch składników, na które ma wpływ stosunek a/b oraz liczba półfal m . Na rysunku 11.22 podany jest przebieg dwóch pierwszych składników, tj. $\xi_1 = \xi - (2H/\sqrt{D_x D_y})$, mający podobny charakter jak girlandowa krzywa (rys. 11.3b). Jak widać, współczynnik ξ_1 osiąga minimalną wartość $(\xi_1)_{\min} = 2$, gdy zmienna $(a \sqrt[4]{D_y/b} \sqrt[4]{D_x})$ jest liczbą całkowitą. Jeśli płyta jest szersza niż dłuższa, tj. $a/b \ll 1$, w wyrażeniu (11.25b) można zaniedbać drugi i trzeci składnik w porównaniu z pierwszym. W wyniku wydatek n_x

$$(n_x)_{kr} \approx \frac{\pi^2 D_x}{a^2} \quad (11.25c)$$

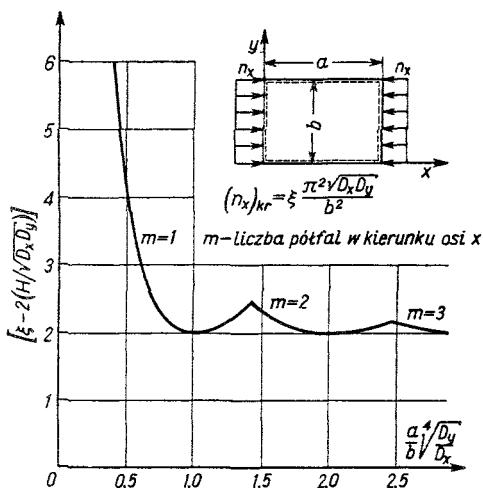
odpowiada sile eulerowskiej dla pręta o długości a i jednostkowej szerokości. Wynik powyższy jest zrozumiały, jeśli zważyć, że przy tych proporcjach usztywnienie wzdłużnych włókien środkowych, wynikające z podparcia krótszych boków płyty, jest bez znaczenia i włókna te pracują jak szereg równoległych prętów.

W podobny sposób jak w art. 11.2 można rozwiązać przypadek ścinania płyty żebrowanej (rys. 11.23a) otrzymując w wyniku wielkość q_{kr}

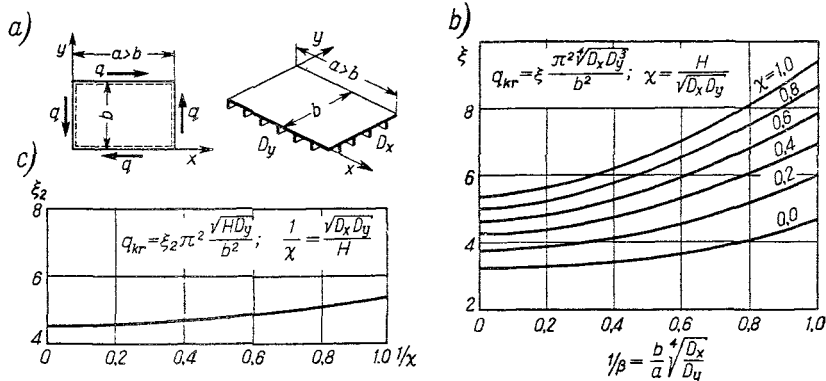
$$q_{kr} = \pi^2 \xi \sqrt[4]{D_x D_y^3 / b^2}, \quad (11.26)$$

gdzie D_y — sztywność zginania w kierunku krótszego boku płyty b . Wartość współczynnika ξ zależy przy tym od tych samych parametrów co poprzednio:

$$\beta = (a/b) \sqrt[4]{D_y/D_x}, \quad \chi = H/\sqrt{D_x D_y},$$



Rys. 11.22. Krytyczne wydatki ściskanej płyty zębrowanej podpartej przegubowo na 4 brzegach. Oznaczenia sztywności D_x , D_y i H według wzoru (9.35).



Rys. 11.23. Wyboczenie ścinanej płyty zębrowanej podpartej przegubowo na 4 brzegach
b) przypadek $\chi \leq 1$; c) przypadek $\chi > 1$.

a) jej przebieg dla wartości $\chi \leq 1$, w przypadku przegubowego podparcia brzegów, podaje rys. 11.23b. Przypadek $\chi > 1$ jest znacznie radszy, niemniej dla pełności obrazu podano również przebieg współczynnika ξ_2 (rys. 11.23c), występującego we wzorze

$$q_{kr} = \xi_2 \pi^2 \sqrt{H D_y} / b^2 \quad (\chi > 1), \quad (11.27)$$

ograniczając się tylko do płyty nieskończenie długiej ($\beta \rightarrow \infty$).

Wreszcie w przypadku jednoczesnego ściskania i ścinania wartość obciążeń krytycznych n_x i q wyznaczamy ze wzoru (11.9), wstawiając te obciążenia zamiast σ i τ , a zamiast σ_{kr} i τ_{kr} — wartości wydatków $(n_x)_{kr}$ i q_{kr} według wzorów (11.25) i (11.26) lub (11.27).

Wszystkie podane powyżej wzory można zastosować również w przypadku płyt żebrowanych jednokierunkowo lub w przypadku blach falistych, określając sztywność D_x , D_y i H odpowiednio z wzorów (9.36) ÷ (9.38). Jedynym warunkiem ograniczającym jest, aby w przypadku blach falistych podziałka blachy (c_x na rys. 9.14) była drobna ($c_x/\delta < 60$). To ostatnie ograniczenie zabezpiecza przed wyboczeniem lokalnym poszczególnych pasków składających się na blachę falistą (art. 11.4).

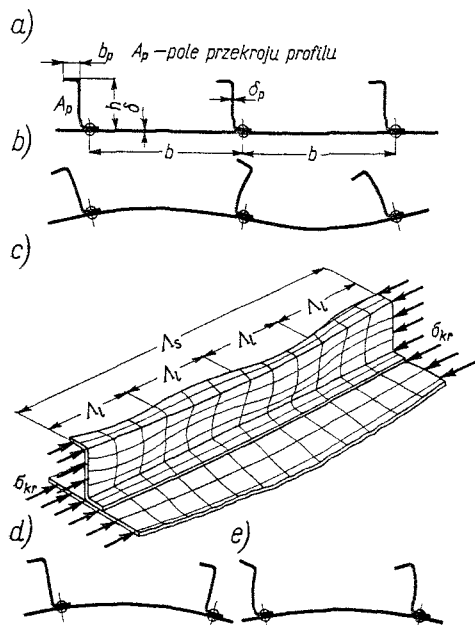
Analiza wyboczenia płyt żebrowanych drugiego rodzaju (rys. 11.21b) jest bardziej złożona z uwagi na możliwość pojawienia się innej formy utraty stateczności. Gdyby bowiem zastosować otrzymane wzory, np. (11.25), to otrzymane naprężenia krytyczne byłyby bardzo wysokie, głównie z powodu bardzo dużej sztywności giętnej profili usztywniających. Tymczasem, z uwagi na małą sztywność skrętną C profili izolowanych od pokrycia jak i ich cienkościennność, możliwa jest druga forma wyboczenia, przy której pasek pokrycia między dwoma kolejnymi profilami zachowuje się jak płyta ze sprężystości utwierdzonymi brzegami wzdłużnymi. Ponieważ sztywność profili na zginanie w kierunku prostym do pokrycia jest w porównaniu z sztywnością pokrycia bardzo duża, a ich długość określona rozstawem żeber poprzecznych stosunkowo niewielka*, możemy przy tej postaci wyboczenia założyć, że krawędzie wzdłużne paska pokrycia zostają proste. Sztywne połączenie profili z pokryciem powoduje, że wyboczenie pokrycia pociąga za sobą skrócenie profili z jednoczesną deformacją ich przekroju poprzecznego (rys. 11.24b). Źródłem tej ostatniej jest cienkościennność profili, na skutek czego każdy z ściskanych boków profilu (np. pionowa ścianka o wysokości h) może się wyboczyć w postaci odpowiadającej wyboczeniu płyty o wymiarach boku (art. 11.4). W rezultacie odkształcenia profilu stanowią superpozycję odkształcenia skrętnego o długości półfali A_s i odkształceń lokalnych o długości półfali A_l (rys. 11.24c); przy czym A_s jest znacznie większe** niż A_l ($A_s = 5 \div 10 A_l$). Ta zasadnicza różnica w długości półfali jak i postaci odkształceń powoduje, że w zależności od proporcji geometrycznych dominować będzie postać, w której odkształcenia profilu mają charakter bądź wyłącznie skrętny, bądź czysto lokalny*** (rys. 11.24d, e). Fakt ten nie oznacza jednak, iż nie dominujące odkształcenia nie mają wpływu na wielkość σ_{kr} . Okazuje się bowiem, że σ_{kr} , odpowiadające złożonej postaci odkształcenia, jest zawsze niższe od wartości odpowiadającej wyboczeniu czysto skrętnemu bądź czysto lokalnemu.

* Zazwyczaj smukłość (l/i) jest rzędu $40 \div 60$, przy czym i — promień bezwładności, odpowiadający osi równoległej do pokrycia, $l = a$ — rozstaw żeber.

** Potwierdzeniem słuszności tego sformułowania jest, rozpatrzony w art. 10.7, przykład liczbowy wyboczenia giętno-skrętnego (rys. 10.23), w którym długość $A = A_s$, odpowiadająca $(\sigma_{kr})_{\min}$, jest ~ 30 cm, podczas gdy długość półfali A_l będzie rzędu $1 \div 2h$, a więc średnio 4 cm. Należy tu jednak zauważyć, że dane liczbowe tego przykładu odbiegają od stosowanych obecnie proporcji. W szczególności wartość b/δ jest w realizowanych konstrukcjach mniejsza, co powoduje zwiększenie K_ϕ , a to z kolei zmniejsza A_s odpowiadające $(\sigma_{kr})_{\min}$.

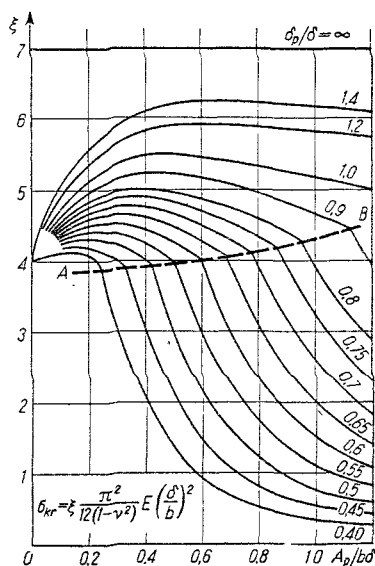
*** Ze zjawiskiem podobnym spotykaliśmy się przy omawianiu wyboczenia giętno-skrętnego prętów (art. 10.6), gdzie w miarę wzrostu długości półfali (identycznej z długością l pręta) wyboczenie przechodzi od postaci czysto skrętnego do giętnego, a siła krytyczna zbliża się do wartości P_s względnie P_v lub P_w , będąc jednak zawsze niższa od najmniejszej z tych trzech wartości (patrz dyskusja równania 10.37).

Szczegółowa analiza liczbową zagadnienia jest bardzo żmudna i z tego powodu ograniczymy się tylko do podania wyników dla najczęściej spotykanego przypadku, gdy profilami usztywniającymi są zetowniki. Przedstawione na wykresie krzywe (rys. 11.25) obliczone zostały dla konstrukcji, w której krawędzie sztorcowe są podparte przegubowo, konstrukcja ma swobodę rozszerzania poprzecznego ($\nu = 0$, wzór 11.6), a przekroje końcowe profili nie mogą się skręcać, mogą się jednak swobodnie pacyć (patrz dysku-



Rys. 11.24. Typowy obraz wyboczenia płyty żebrowanej profilami cienkościennymi

b) obraz odkształceń przekroju poprzecznego; c) odkształcenia profilu, A_s – długość półfali wyboczenia giętno-skrętnego, A_l – wyboczenia lokalnego; d), e) rozdział postaci wyboczenia na giętno-skrętne i lokalne.



Rys. 11.25. Wyboczenie płyty żebrowanej zetownikami

Oznaczenia według rys. 11.24a. Zakres stosowności $b_p/h = 0,25 \div 0,35$, $h/\delta_p = 20 \div 30$.

sja równania 10.25). Parametry geometryczne (rys. 11.24a) są przy tym: $b_p/h = 0,3$, $h/\delta_p = 25$, $a/b \geq 3$, wyniki mogą być jednak stosowane z techniczną dokładnością, gdy $b_p/h = 0,25 \div 0,35$, $h/\delta_p = 20 \div 30$ pokrywając w ten sposób zakres najczęściej spotykanych proporcji. Jeśli $a/b < 3$, to σ_{kr} są nieco wyższe od podanych na wykresie, tak że stosując i do tego przypadku dane wykresu (rys. 11.25) jesteśmy po stronie bezpiecznej.

Odkształcenia profili usztywniających mają zasadniczo postać podaną na rys. 11.24b z tym, że powyżej linii AB (rys. 11.25) dominuje odkształcenie lokalne, poniżej skrętne. Jest rzeczą oczywistą, że w zastosowaniach praktycznych staramy się tak dobrać parametry geometryczne, aby znaleźć się powyżej tej linii, tym bardziej że przy proporcjach,

powodujących znalezienie się poniżej linii AB , osiągnięciu naprężeń krytycznych może towarzyszyć bezpośrednio zniszczenie konstrukcji.

Przytoczone wyniki oparte są na założeniu idealnej sprężystości materiału. W przypadku gdy określone z wykresu (rys. 11.25) σ_{kr} są wyższe niż granica sprężystości materiału, wynik taki redukujemy według wskazówek art. 11.3, posługując się danymi wykresów (rys. 11.12 lub 11.13).

Omawiając postacie wyboczenia pominęliśmy możliwość wyboczenia giętnego profilu stwierdzając, że krawędzie wzdłużne zostają proste. Do jakiego stopnia jest to słuszne, dowodzą wyniki analizy opisanej konstrukcji przeprowadzone przy: $a/b = 4$ i $a/b = 6$ oraz $\delta_p/\delta = 0,4$ lub $\delta_p/\delta = 0,8$. Okazuje się, iż odkształcenie giętne profilu staje się dominującą postacią wyboczenia, gdy parametr $A_p/b\delta$ ma graniczne wartości (tabl. 11.2) bardzo niskie, nie mające praktycznego znaczenia.

GRANICZNA WARTOŚĆ ($A_p/b\delta$) W KONSTRUK-

CJI Z RYS. 11.24a

Tablica 11.2

$\delta_p/\delta \backslash a/b$	4	6
0,4	0,25	0,40
0,8	0,08	0,15

W konstrukcji wzmocnionej profilami zamkniętymi (rys. 11.26a) sztywność profilu na skręcanie jest tak duża, że wyboczenie skrętne jest wykluczone (art. 10.5). Ponieważ ponadto σ_{kr} wyboczenia giętnego są również bardzo wysokie (rzędu Q_r), przeto jedyną formą odkształcenia się ścianek profilu przy wyboczeniu paska pokrycia jest postać odkształceń lokalnych (rys. 11.26b). Ścisłe rozwiązanie takiego zagadnienia, aczkolwiek znacznie prostsze niż w przypadku profilu otwartych, jest pomimo wszystko zbyt złożone i dlatego posługujemy się przybliżeniem wprowadzając współczynnik utwierdzenia κ wzdłużnych brzegów paska pokrycia

$$\kappa = 2 \left(\frac{b}{b_1} \right) \left[1 + \left(\frac{\delta_p}{\delta} \right)^3 \frac{b_1(1+2\psi)}{s(1+2\chi)} \right], \quad (11.28)$$

gdzie

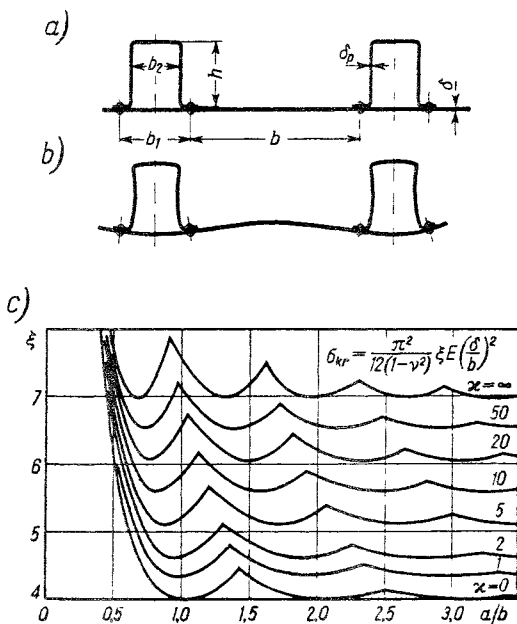
$$\psi = h/3b_2, \quad \chi = (b_2 - b_1)/s, \quad s = 2h + b_1.$$

Mając wartość κ , współczynnik ξ (wzór 11.4) określamy z wykresu (rys. 11.26).

Stosowalność tego sposobu postępowania jest ograniczona warunkiem, aby żadne z naprężeń krytycznych dla boków profilu, rozpatrywanych jako płyty przegubowo podparte, nie były niższe niż σ_{kr} określone według danych z rys. 11.26.

Do jakiego stopnia uwzględnienie rzeczywistych warunków pracy konstrukcji jest ważne, dowodzi tego przykład liczbowy, w którym: $a/b = 3$, $\delta_p = 0,8\delta$, $h = b_2 = 2b_1/3$, $b_1 = b/3$. Obliczając κ według (11.28), otrzymujemy $\kappa \approx 7,4$ i przez interpolację dla $a/b = 3$ mamy z rys. 11.26: $\xi \approx 5,4$, a więc o 30% więcej niż w przypadku, gdybyśmy założyli przegubowe podparcie paska pokrycia o szerokości b .

Łatwo przy tym sprawdzić, że warunek stosowności sposobu postępowania jest zachowany, gdyż dla pionowego boku profilu $h/\delta_p = 0,278b/\delta$ i σ_{kr} dla tego boku, przy $\xi = 4$, jest znacznie wyższe niżeli σ_{kr} dla paska pokrycia o szerokości b i współczynniku $\xi = 5,4$.



Rys. 11.26. Wyboczenie płyty żebrowanej omegówkami. Współczynnik α według wzoru (11.28)

11.7. Wyboczenie powłoki cylindrycznej przy ściskaniu

Zagadnienia wyboczenia powłok, stanowiących poza płytami podstawowy element konstrukcji cienkościennych, są zagadnieniami znacznie bardziej złożonymi aniżeli dotychczas rozpatrywane. Z tego powodu ograniczymy się do analizy tylko najprostszego przypadku: osiowo symetrycznego wyboczenia równomiernie ściskanej powłoki cylindrycznej (rys. 11.27), przy czym zagadnienie rozwiążemy metodą energetyczną. W tym celu, korzystając ze wzoru (i) (art. 10.2), określamy zmianę ΔV_p energii potencjalnej obciążeń zewnętrznych

$$\Delta V_p = -\frac{(2\pi R \delta \sigma)}{2} \int_0^l (w')^2 dx,$$

gdzie $w(x)$ — przemieszczenie promieniowe włókna wzdłużnego (rys. 11.27b).

Zmianę energii sprężystej ΔV określimy zauważając, że jest ona sumą dwóch składników. Pierwszy z nich określa energię zgięcia pasków wzdłużnych powłoki i wynosi*.

* Traktując pasek powłoki jako element płyty, energię zgięcia określamy ze wzoru (11.5a), w którym:

$$dy = R da, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = d^2 w / dx^2 = w'', \quad \partial^2 w / \partial y^2 = 0, \quad \partial^2 w / \partial x \partial y = 0.$$

$$\Delta V_g = \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{D}{2} (w'')^2 dx R da = \pi D R \int_0^l (w'')^2 dx,$$

podczas gdy drugi przedstawia energię zgromadzoną w powłoce na skutek wydłużenia się elementarnych pierścieni (rys. 11.27c). Ponieważ przy zwiększeniu się promienia R o wielkość w powstają w takim pierścieniu naprężenia $\sigma_1 = E\varepsilon = Ew/R$, to energia zgromadzona w elementarnym pierścieniu o przekroju $dx\delta$ jest

$$\frac{\sigma_1^2}{2E} 2\pi R dx \delta = \frac{\pi E w^2 \delta}{R} dx,$$

a całkowita jej wartość ΔV_r wynosi

$$\Delta V_r = \frac{\pi E \delta}{R} \int_0^l w^2 dx.$$

Jeśli powłoka podparta jest na obydwu sztorcach przegubowo tak, że

$$(w)_{x=0} = (w)_{x=l} = 0,$$

$$(w'')_{x=0} = (w'')_{x=l} = 0,$$

to spełnienie tych warunków osiągniemy, obierając funkcję w postaci

$$w = w_1 \sin(m\pi x/l),$$

gdzie w_1 — amplituda wychylenia z położenia pierwotnej równowagi.

Po podstawieniu tego wyrażenia do zasadniczego warunku (10.1), tj.

$$\Delta II = \Delta V_p + \Delta V_g + \Delta V_r = 0,$$

po wykonaniu całkowań i przekształceniach otrzymujemy tę wartość σ , przy której możliwa jest równowaga w postaci wyboczonej

$$\sigma = \frac{\pi^2 D}{\delta A^2} + \frac{1}{\pi^2} \frac{EA^2}{R^2},$$

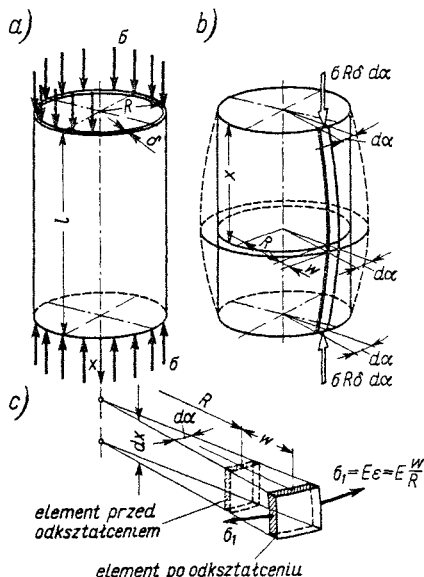
gdzie $A = l/m$ — długość półfali.

Minimalną wartość σ otrzymujemy dla

$$A = \pi \sqrt[4]{\frac{DR^2}{E\delta}} = \pi \sqrt[4]{\frac{R^2 \delta^2}{12(1-\nu^2)}} \quad (11.29a)$$

i jest ona

$$\sigma_{kr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \left(\frac{\delta}{R} \right). \quad (11.29b)$$

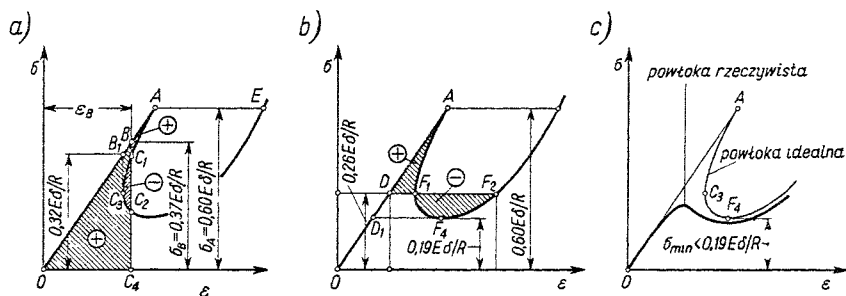


Rys. 11.27. Osiowo symetryczne wyboczenie ściskanej powłoki cylindrycznej

W szczególnym przypadku, gdy $\nu = 0,3$, mamy

$$\sigma_{kr} \approx 0,6E \frac{\delta}{R}. \quad (11.29c)$$

Otrzymane wyrażenie dla σ_{kr} przedstawia tę wartość, której osiągnięcia należałoby oczekiwać w przypadku idealnie wykonanej powłoki oraz prawidłowo przeprowadzonego doświadczenia. Zagadnienie jednak jest znacznie bardziej złożone. Okazuje się bowiem z analizy dużych odkształceń, gdy w jest rzędu δ , że ściskana cylindryczna powłoka posiada zależność $\sigma(u)$ (u — skrócenie powłoki) innego rodzaju aniżeli wszystkie dotychczas rozpatrywane



Rys. 11.28. Warianty przeskoku ściskanej powłoki cylindrycznej
 a) przeskok na maszynie sztywnej; b) przeskok na maszynie obciążnikowej.

przypadki wyboczenia prętów i płyt. Charakterystyka ta, tj. zależność σ od ϵ ($\epsilon = u/l$), odpowiadająca idealnemu quasistatycznemu przeprowadzeniu doświadczenia (rys. 11.28a, krzywa $OAC_1C_2C_3E$), wykazuje duże podobieństwo do krzywej z rys. 10.2b, z tym tylko, że jest wielowartościowa* zarówno względem zmiennej σ , jak i ϵ . Ta podwójna wielowartościowość powoduje, w odróżnieniu od opisanego w art. 10.1 przebiegu, możliwość powstawania przeskoku zarówno przy $\sigma = \text{const}$ jak i $\epsilon = \text{const}$. Jeśli na przykład badamy powłokę na urządzeniu (maszynie) z blokowaniem odkształceniem**, to na skutek jakiegoś zewnętrznego zakłócenia (np. o charakterze dynamicznym) powłoka może przeskoczyć z położenia B w położenie C_2 , nie osiągnąwszy statycznie idealnej wartości σ_{kr} według wzoru (11.29). Jeśli przy tym założyć, że proces przeskoku zachodzi bez strat energii, to energia odkształcenia przed przeskakiem, gdy powłoka znajduje się w stanie B , i po prze-

* Charakterystyka z rys. 10.2b jest wielowartościowa względem P , tzn. że jednej wartości P odpowiada kilka (trzy) wartości f , natomiast jest jednowartościowa względem f , tj. danej wartości f odpowiada tylko jedna siła P .

** Najprostszym przykładem tego typu urządzeń jest imadło, w którym ściskamy próbkę. Jeśli taka ściśnięta próbka ulega wyboczeniu, to szeregki imadła zostają w miejscu niezależnie od tego, czy siła ściskająca ulega zmianie, czy nie. Do tego typu maszyn zbliżają się maszyny o napędzie hydraulicznym. Drugim typem są maszyny obciążnikowe, w których stały ciężar działa na próbkę bezpośrednio lub przez układ dźwigni. W tej drugiej kategorii zmiana ϵ , np. na skutek wyboczenia, nie powoduje zmian siły obciążającej.

skoku, gdy znajduje się ona w stanie C_2 , musi zostać bez zmiany. Ponieważ ilość energii jest równa pracy obciążeń zewnętrznych, to

$$\frac{1}{2} \sigma_B \varepsilon_B = F_{OAC_1C_3C_2C_4O}$$

lub jeszcze inaczej

$$F_{ABC_1} = F_{C_1C_2C_3}.$$

Warunek powyższy określa położenie punktu B , a szczegółowe przeliczenia dają przy $\nu = 0,3$

$$\sigma \approx 0,37E\delta/R.$$

Jeszcze niższą wartość naprężenia krytycznego otrzymamy, gdy zgodnie z rzeczywistością założymy, że przy przeskoku zachodzą nieodwracalne zmiany związane z pochłanianiem energii. Wtedy najwyższą możliwą wartością naprężenia będzie σ_{B_1} odpowiadająca przeskokowi do C_3 i wynosząca

$$\sigma_{B_1} \approx 0,32E\delta/R. \quad (11.30)$$

Jeśli teraz badamy powłokę na maszynie typu obciążnikowego, to przeskok przy stałym σ (rys. 11.28b) pojawi się, gdy włożona z zewnątrz praca pewnych dodatkowych obciążeń w pierwszej fazie przeskoku (tj. pole F_{DAF_1}) zostanie zwrócona z powrotem w drugiej fazie procesu (tj. pole $F_{F_1F_4F_2}$). Wynikająca stąd równość pól $F_{DAF_1} = F_{F_1F_4F_2}$ określa σ_D , a szczegółowe przeliczenia dają

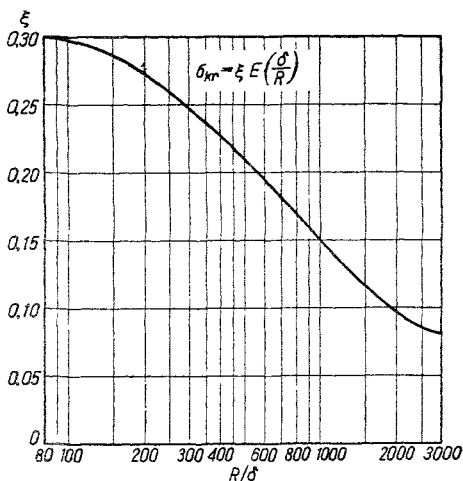
$$\sigma_D \approx 0,26E\delta/R.$$

Podobnie jak poprzednio, gdy założymy, że przeskokowi towarzyszy pochłonięcie energii w postaci nieodwracalnych zmian, to najniższa wartość σ , przy której już może zajść przeskok, odpowiada punktowi D_1 i wynosi

$$\sigma_{D_1} \approx 0,19E\delta/R. \quad (11.31)$$

Z rozważań tych wynika, że w przypadku ściskanej powłoki cylindrycznej nie można mówić o naprężeniach krytycznych w dotychczasowym sensie, tj. jako o wartości, przy której następuje łagodne przejście z jednej postaci równowagi w drugą, gdyż przejście to ma charakter przeskoku. Ponadto wartości niebezpiecznych naprężeń zależą, nawet przy idealnym przeprowadzeniu doświadczenia, od właściwości urządzenia obciążającego. W praktyce większość obciążeń należy do drugiego typu z rozpatrzonych powyżej, skąd wynika, że dla idealnie wykonanej powłoki wartość naprężeń według wzoru (11.31) należy przyjmować jako górną granicę, powyżej której należy liczyć się z możliwością jej wyboczenia.

Rzeczywiste powłoki są bardzo dalekie od ideału. Istnienie wstępnych niedokładności przejawia się przy tym nie tylko w ułatwieniu zjawiska przeskoku, lecz również w obniżeniu naprężeń, przy których ten przeskok zachodzi (rys. 11.28c). Z tego powodu licząc się z realnym wykonaniem powłok jak również z faktem, że bardziej grubościennie powłoki (mniejsze R/δ) można wykonać dokładniej niż cienkościennie, obniżamy wartość liczbowego współczynnika we wzorze (11.31), i to tym znacznie, im większy jest stosunek R/δ (rys. 11.29).



Rys. 11.29. Naprężenia przeskoku (krytycznej) ściskanej powłoki cylindrycznej nieusztynionej
Krzywa oparta na średnich z wyników doświadczeń.

11.8. Naprężenia krytyczne w powłokach. Omówienie wyników

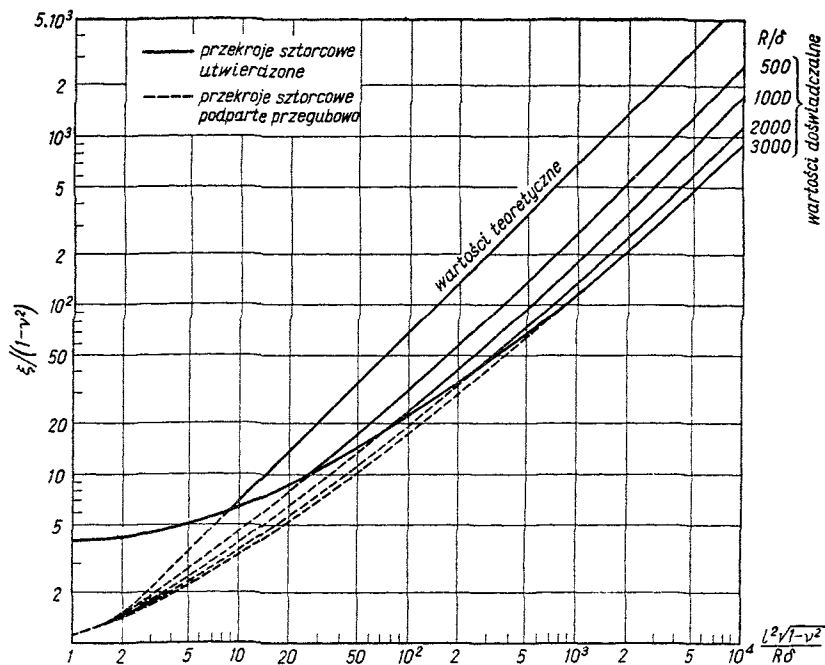
Utrata stateczności powłoki cylindrycznej, najczęściej spotykanej w zagadnieniach praktycznych, może zachodzić również przy innych obciążeniach aniżeli ściskanie. Ograniczając się tutaj tylko do omówienia wyników prac teoretycznych jak i doświadczalnych, rozpatrzmy najprzód przypadek powłoki cylindrycznej nieusztynionej, a następnie przypadek odcinka powłoki. Ten ostatni jest zresztą z punktu widzenia zastosowań praktycznych znacznie częściej spotykany niż przypadek pierwszy.

a. *Wpływ skończonej długości powłoki na wielkość naprężeń krytycznych przy równomiernym ściskaniu* przejawia się szczególnie jaskrawo dla powłok krótkich, gdy długość l powłoki jest rzędu λ (wzór 11.29a). W takim przypadku powłoka zachowuje się jak szereg równoległych prętów o długości l i przekroju prostokątnym o wysokości δ . Z tego powodu naprężenia krytyczne przedstawiamy w postaci

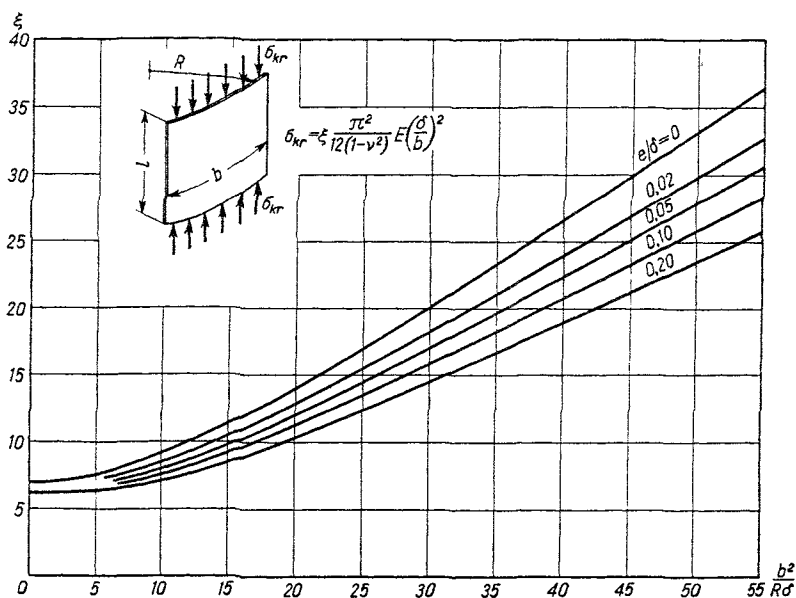
$$\sigma_{kr} = \xi E (\delta/l)^2, \quad (11.32)$$

gdzie wartość współczynnika $\xi/(1-\nu^2)$ w funkcji parametru $l^2\sqrt{1-\nu^2}/R\delta$ podana jest na rys. 11.30.

b. *Wyboczenie odcinka powłoki przy ściskaniu.* W porównaniu z prostokątną płytą o tych samych wymiarach, ściskany odcinek powłoki, na skutek istnienia krzywizny, wykazuje wyższe naprężenia krytyczne. Podobnie jednak jak i dla pełnej powłoki cylindrycznej zjawisko przeskoku, przyspieszone istnieniem wstępnych odchyłeń, pojawia się i w tym przypadku, powodując niemożność osiągnięcia wartości σ_{kr} określonej według teorii małych pomieszczeń. Oparty na wynikach doświadczeń wykres dla odcinka powłoki z zamocowanymi brzegami (rys. 11.31) definiuje wartość σ_{kr} jako odpowiadającą przeko-



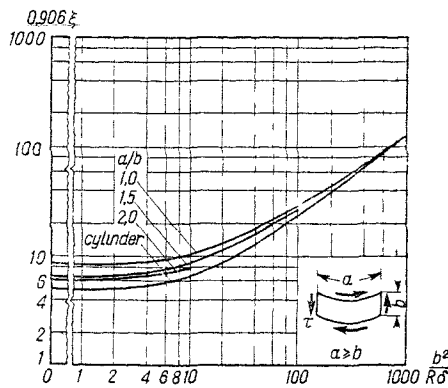
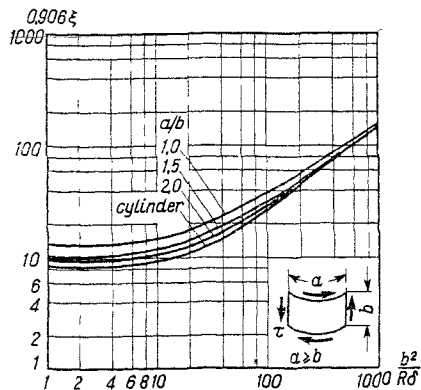
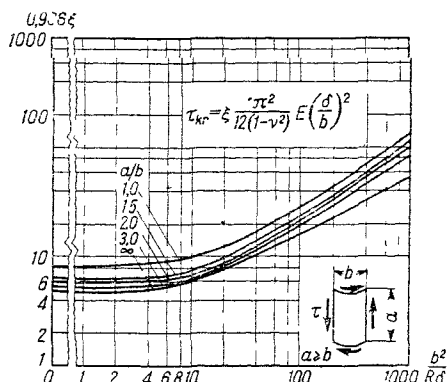
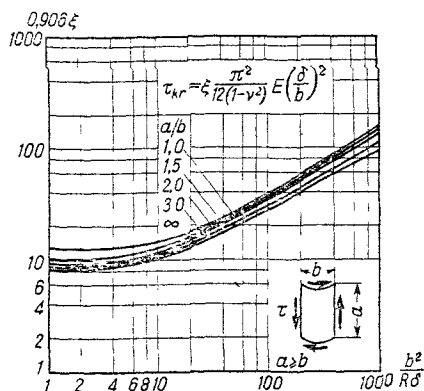
Rys. 11.30. Uwzględnienie skończonej długości ściskanej powłoki cylindrycznej (przypadek małej długości)
Dane oparte na wynikach doświadczeń.



Rys. 11.31. Współczynnik wyboeczenia odcinka ściskanej powłoki z zamocowanymi brzegami wzdłużnymi z uwzględnieniem wpływu odchyleń (e) od idealnego kształtu
Długość odcinka $l > 3b$.

kowi w maszynie z blokowanym odkształceniem (punkt B_1 na rys. 11.28). Na wykresie tym wartość współczynnika ξ (wzór 11.4) uzależniona jest od bezwymiarowego parametru $(b^2/R\delta)$ i od wstępnych niedokładności wykonania powłoki. Te ostatnie scharakteryzowane są wielkością maksymalnego wstępnego wgłębienia e powierzchni powłoki, mierzonego na umownym odcinku b dowolnej tworzącej. Długość b jest przy tym równa szerokości odcinka powłoki mierzonej po obwodzie (rys. 11.31).

c. *Wyboczenie ściskanych powłok żebrowanych* obejmuje podobnie jak w płytach (art. 11.6) dwa przypadki, gdy usztywniające profile są niskie a szerokie (rys. 11.21a) i gdy są



Rys. 11.32. Współczynniki ξ przy wyboczeniu ściskanego odcinka powłoki podpartej przegubowo na czterech brzegach.

Rys. 11.33. Współczynniki ξ przy wyboczeniu ściskanego odcinka powłoki idealnie utwardzonego na czterech brzegach.

one cienkościennie (rys. 11.21b). Z tych dwóch przypadków ważniejszy jest drugi, dla którego, gdy $b^2/R\delta < 15$, σ_{kr} liczymy według wzoru (11.4), wstawiając za ξ wartość według wykresu (rys. 11.25) bądź według rys. 11.26 z pominięciem wpływu krzywizny.

d. *Wyboczenie odcinka powłoki przy ścinaniu*, w zależności od kształtu i warunków brzegowych w funkcji parametru $(b^2/R\delta)$ podają rys. 11.32–11.33, przy czym we wzorze dla τ_{kr} wymiar b oznacza zawsze długość krótszego boku.

e. *Jednoczesne działanie naprężeń ściskających i stycznych* na odcinek powłoki cylindrycznej ujmujemy w obliczeniach, posługując się wzorem (11.9) lub wykresem (rys. 11.11). Z uwagi jednak na zjawisko przeskoku i związany z tym rozrzut wyników, tak obliczone wartości należy traktować jako wartości średnie. Granicę natomiast dolną stanowi, jak wynika z doświadczeń, liniowa zależność między (σ/σ_{kr}) a (τ/τ_{kr}) , tj. prosta łącząca punkty C i D (rys. 11.11), którego równanie brzmi

$$\frac{\sigma}{\sigma_{kr}} = 1 - \frac{\tau}{\tau_{kr}}. \quad (11.33)$$

W przypadku jednoczesnego rozciągania i ścinania posługujemy się wzorem (11.9), przy czym, podobnie jak w art. 11.2, naprężenia rozciągające traktujemy jako ujemne.

f. *Wpływ nieliniowej zależności σ od ε* występuje w przypadkach, gdy (R/δ) jest małą wielkością ($R/\delta < 100$). Wpływ ten uwzględniamy w sposób przybliżony transponując wyniki analogicznych rozważań dla płyt, a mianowicie w przypadku ściskania redukujemy wartości naprężeń krytycznych obliczonych dla idealnie sprężystego materiału, według danych na rys. 11.12 i 11.13, w przypadku ścinania — według danych na rys. 11.14.

11.9. Zadania

1. Stalowa płyta ($E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,27$) o $D = \text{const}$ i wymiarach $a = 2,2b = 100$ cm ściskana jest wydatkami $n_x = 400$ kG/cm (rys. 11.3a). Jaka ma być grubość δ płyty, aby miała ona 2,5-krotny współczynnik bezpieczeństwa na wyboeczenie?

2. Duralowa płyta ($E = 7,2 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu = 0,33$) o $D = \text{const}$, długości $a = 50$ cm, $\delta = 2,5$ mm ściskana jest wydatkami $n_x = 12,5$ kG/cm. Jaka może być maksymalna szerokość b płyty, aby miała ona 1,5-krotny współczynnik bezpieczeństwa na wyboeczenie, jeśli oba brzegi wzdłużne są utwierdzone?

3. Podparta przegubowo na czterech krawędziach kwadratowa płyta o $D = \text{const}$ (rys. 11.2a) ściskana jest stałymi wydatkami n_x i n_y . Stosując podstawienie $w(x, y)$ według wzoru (9.17a) sformułować zależność między n_x i n_y , przy których nastąpi wyboeczenie płyty. Podać w układzie współrzędnych n_x , n_y wykreślną interpretację otrzymanego wyniku.

4*. Rozszerzyć zadanie 3 na przypadek, gdy jeden z wydatków daje rozciąganie a nie ściskanie. Z badać przypadek, gdy $|n_x| = |n_y|$ i uzasadnić różnicę otrzymanego wyniku w porównaniu z wynikiem dla czystego ścinania (krzywa 4 na rys. 11.4).

Wskazówka. Dyskusję prowadzić przy różnych wariantach, np. $m = n = 1$; $m = 2$, $n = 1$; $m = 1$, $n = 2$; itd. Wyniki interpretować wykreślnie w układzie współrzędnych n_x i n_y .

5. Stosując metodę energetyczną i podstawienie $w(x, y) = a_{m,1} \sin(m\pi x/a)[1 - \cos(2\pi y/b)]$ obliczyć przybliżoną krytyczną wartość ściskających σ_x w prostokątnej płycie utwierdzonej na brzegach wzdłużnych i przegubowo podpartych na sztorcach. Wynik porównać z podanym na rys. 11.5.

6. Zachowując funkcję ugięcia $w(x, y)$ (str. 479), powtórzyć obliczenie krytycznych obciążeń dla kwadratowej płyty (rys. 11.4a), jeśli poza wydatkami stycznymi q działają jednocześnie wydatki ściskające n_x .

7. Kwadratowa płyta o $D = \text{const}$ podparta przegubowo na wszystkich krawędziach obciążona jest liniowo zmiennymi naprężeniami σ_x (rys. 11.8), przy czym $\eta = 1$. Zakładając powierzchnię ugięcia $w(x, y) = a_{1,1} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) + a_{1,2} \sin(\pi x/a) \sin(2\pi y/a)$, obliczyć krytyczną wartość σ i porównać z wynikiem ścisłym (rys. 11.9).

8. Stalowa płyta ($E = 2,03 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,31$) o wymiarach 100×80 cm i grubości $\delta = 0,8$ cm podparta przegubowo na dłuższych bokach a utwierdzona na krótszych, ścinana jest naprężeniami; $\tau = 800$ kG/cm² i równomiernie ściskana naprężeniami $\sigma = 500$ kG/cm² równoległe do boku krótszego. Jaki jest współczynnik bezpieczeństwa tej płyty na wyboeczenie, o ile przy wzroście obciążeń σ i τ narastają jednocześnie proporcjonalnie?

9. Jaki jest współczynnik bezpieczeństwa na wyboeczenie płyty z zad. 8 jeśli przy wzroście obciążeń naprężenie σ pozostaje bez zmiany, a zmienia się tylko τ (proporcjonalnie do obciążeń)?

10. Jak zmieniają się wyniki zad. 8 i 9, jeśli naprężenia σ nie są stałe, lecz zmieniają się liniowo od $\sigma = 500$ kG/cm² na jednej krawędzi do $\sigma = 0$ na drugiej?

11*. Prostokątna podparta przegubowo na czterech brzegach kwadratowa płyta (rys. 11.3a) składa się z połówek o wymiarach $a \times 0,5a$ łączonych ze sobą wzdłuż dłuższego boku biegnącego równoległe do osi x . Grubość jednej połówki jest 1,5 raza większa od grubości drugiej. Zakładając powierzchnię ugięcia jak w zad. 7 obliczyć przybliżoną wartość krytyczną rozłożonych równomiernie naprężeń σ_x .

12. Utwierdzona na wzdłużnych i przegubowo podparta na poprzecznych bokach płyta duralowa ($E = 7,2 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu = 0,33$, $Q_{0,2} = 28$ kG/mm², $R_r = 43$ kG/mm²) o wymiarach $a = 4b = 48$ cm $\delta = 3$ mm ściskana jest równomiernie rozłożonymi naprężeniami $\sigma_x = 15$ kG/mm² równoległe do boków wzdłużnych. Jaki jest rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa na wyboeczenie?

13. Powtórzyć zad. 12 przy założeniu, że płyta ścinana jest naprężeniami $\tau = 5$ kG/mm².

14. Określić rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa płyty (zad. 12) przy jednoczesnym działaniu naprężeń ściskających $\sigma_x = 12$ kG/mm² i stycznych $\tau = 6$ kG/mm², jeśli przy wzroście obciążeń oba naprężenia rosną proporcjonalnie.

15. Obliczyć ścisłą wartość σ_{kr} lokalnego wyboeczenia stalowej ceówki ($E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,3$) o wymiarach $h = 120$ mm, $b_p = 50$ mm, $\delta_h = \delta_b = 1,5$ mm (patrz rys. 11.16).

16. Ceówka z zad. 15 utwierdzona jednym końcem a na drugim swobodna ma długość $l = 80$ cm i jest obciążona siłą ściskającą przyłożoną na końcu swobodnym. Uwzględniając wynik zad. 15 orzec, która postać wyboeczenia (lokalna czy giętno skrętna) jest bardziej prawdopodobna.

17. Jak zmieni się wynik zad. 15, jeśli półki ceówki zostały pogrubione do $\delta_b = 2,5$ mm (np. przez przyspawanie taśm o grubości $\delta' = 1,0$ mm)?

18. Ceówka z zad. 15 jest wykonana ze stali 37. Jaką grubość ścianek i półek ($\delta_h = \delta_b$) należałoby dać, aby rzeczywiste σ_{kr} wyboeczenia lokalnego było $0,9 Q_r$ ($Q_r = 2400$ kG/cm²)?

19*. W płycie (rys. 11.18a) brzegi $y = 0$ i $y = b$ są utwierdzone a pozostałe przegubowo podparte. Przeprowadzić analizę wpływu zębra na naprężenia krytyczna przyjmując dla wyboeczenia według rys. 11.18b $w(x, y) = a_{m,1} \sin(m\pi x/a)[1 - \cos(\pi y/b_c)]$, a dla wyboeczenia według rys. 11.18c wykorzystując wyniki z rys. 11.5 (trzy brzegi przegubowo podparte, jeden wzdłużny utwierdzony).

20. Prostokątna, podparta przegubowo na czterech brzegach płyta ma trawione zębra o przekroju prostokątnym (rys. 11.21a) tworzące kwadratowy ruszt o podziałce $b = 30\delta = 45$ mm. Wymiary zęber $h = 3,5$ mm, szerokość 7 mm, wymiary płyty $a = 2b = 45$ cm, materiał dural ($E = 7 \cdot 10^5$ kG/cm², $\nu = 0,33$). Obliczyć krytyczną wartość naprężeń ściskających płytę równoległe do dłuższego boku. Jaka musiałaby być grubość płyty gładkiej o tych samych wymiarach a i b przenoszącej to samo obciążenie krytyczne i jaki byłby stosunek ciężarów obu płyt?

21. Wzmocniona zetownikami płyta (rys. 11.24a) ($b = 100$ mm, $\delta = 1,5$ mm, $h = 40$ mm, $b_p = 14$ mm, $\delta_p = 1$ mm) ściskana jest równoległe do osi zetowników. Zakładając stosowność wykresu (rys. 11.25) obliczyć σ_{kr} , jeśli $E = 7,2 \cdot 10^5$ kG/mm², $\nu = 0,35$. Określić dominującą przy wyboeczeniu postać odkształceń.

22. Dwa rurowe krótkie słupy o jednakowym polu przekroju A , lecz różnych grubościach i promieniach $R_1 = 2R_2 = 500$ mm, $2\delta_1 = \delta_2 = 2$ mm ściskane są wzdłuż osi. Wyznaczyć stosunek sił, które spowodują utratę stateczności ścianek rur.

23. Rurowy cienkościenny maszt wykonany ze stali 37 ma obydwą przekroje sztorcowe zamknięte krótkimi powłokami stożkowymi i dodatkowymi przeponami (rys. 11.34). Grubość ścianki rury masztu dobrana tak, aby przy ściskaniu siłami $P = 20$ t maszt miał dwukrotny współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie giętne. Jaki jest współczynnik bezpieczeństwa rury na wyboczenie lokalne? $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,3$, $Q_r = 24$ kG/mm².



Rys. 11.34.

24. Z blachy stalowej 37 o grubości $\delta = 2,5$ mm zwinięto dwie krótkie rury: kwadratową o boku $a = 320$ mm i kołową o średnicy $2R = 400$ mm tak, że pola przekrojów są prawie równe. Jaki jest stosunek ściskających sił, przy których następuje utrata stateczności ścianki w jednym i drugim przypadku?

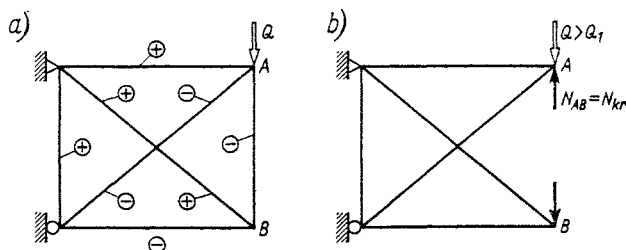
Wskazówka. W rurze kwadratowej każda ze ścianek pracuje jak płyta podparta przegubowo ze wszystkich krawędziach.

25. Odcinek stalowej ($E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,28$) cienkościennej rury o promieniu 2 m, i grubości $\delta = 5$ mm, szerokości mierzonej po obwodzie $b = 600$ mm i długości 1,8 m ściskany jest naprężeniami $\sigma = 600$ kG/cm² i ścinany naprężeniami $\tau = 500$ kG/cm². Uwzględniając, że wszystkie brzozy odcinka są utwierdzone i że przewidywane odchyłki od idealnego kształtu są rzędu $e/\delta = 0,2$ obliczyć średnią i dolną wartość współczynnika bezpieczeństwa na wyboczenie. $Q_r = 24$ kG/mm².

12. PRACA KONSTRUKCJI PO UTRACIE STATECZNOŚCI

W odróżnieniu od konstrukcji statycznie wyznaczalnych, w których utrata stateczności jednego elementu powoduje zniszczenie całości, konstrukcje statycznie niewyznaczalne (prętowe lub cienkościenne) mogą pracować nawet wtedy, gdy niektóre elementy utracą stateczność.

W przypadku kratownicy zagadnienia te rozwiązujemy zakładając, że w *wyboconym* pręcie siła wzdłużna jest praktycznie stała i niezależna od zbliżenia końców pręta*. Jeśli zatem przy narastaniu obciążenia Q pręt AB kratownicy (rys. 12.1a) ulega jako pierwszy wyboczeniu (gdy $Q = Q_1$), to dalsza praca ustroju przy $Q > Q_1$ (rys. 12.1b) odbywa się



Rys. 12.1. Praca kratownicy po częściowej utracie stateczności

tak, jak gdyby zamiast pręta AB działała stała siła $N_{AB} = N_{kr}$. Zniszczenie tak zmodyfikowanej statycznie wyznaczalnej konstrukcji nastąpi wtedy, gdy przy dalszym wzroście obciążenia powyżej Q_1 najsłabszy pręt rozciągany ulegnie zerwaniu lub gdy wyboczy się następny pręt ściskany.

Aczkolwiek opisane postępowanie, które można rozszerzyć i na kratownice wielokrotnie statycznie niewyznaczalne, odpowiada fizycznej stronie zjawisk, to jednak nie znalazło dotąd szerszego zastosowania. W konstrukcjach kratowych zadowalamy się obliczeniem umownego współczynnika bezpieczeństwa, określonego jako stosunek Q , lub σ_{kr} do rzeczywistej wartości naprężeń przy obciążeniach dopuszczalnych.

Podobnym przybliżeniem zadowalamy się w konstrukcjach cienkościennych niektórych działów budowy maszyn (np. w dźwignicach). Zupełnie jednak inaczej przedstawia się sytuacja w budowie płatowców, gdzie dokładniejsze określenie obciążeń niszczących, związanych najczęściej z pracą konstrukcji po częściowej utracie stateczności, jest kwestią

* Gdy $P > P_{kr}$ (rys. 10.2a), wtedy dP/df jest tak małe, że można przyjąć $P = \text{const} = P_{kr}$.

bardzo ważną. Z tego powodu rozważania niniejszego rozdziału ograniczymy tylko do konstrukcji płatowcowych, aczkolwiek należy liczyć się z ich szerszym zastosowaniem i w innych działach budowy ustrojów nośnych.

12.1. Praca ściskanej płyty lub odcinka powłoki po utracie stateczności

W odróżnieniu od ściskanego pręta, charakterystyka ściskanej, podpartej na brzegach płyty ma, jak pokazują doświadczenia, postać według rys. 12.2a. Przekroczeniu obciążenia $P_{kr} = \sigma_{kr} b \delta$ towarzyszą dwa zjawiska. Jednym z nich jest zmniejszenie pierwotnej sztywności ($E b \delta$) płyty, wyrażające się zmianą nachylenia charakterystyki $P = f(u)$,

drugim zmiana rozkładu naprężeń z równomiernego, gdy $P \leq P_{kr}$, na nierównomierny. Maksymalne naprężenia ściskające $\sigma_0 = \sigma_b = \sigma_{\max}$ pojawiają się przy tym na wzdłużnych brzegach, podczas gdy minimalne $\sigma_{\min} = \sigma_{b/2}$ działają w środku płyty (rys. 12.2b). Jeśli, jak to zazwyczaj bywa, podparcie wzdłużnych brzegów stanowią profile usztywniające połączone z płytą, to w przypadku jednakowego materiału płyty i profili $\sigma_0 = \sigma_b = \sigma_{\max}$ jest jednocześnie naprężeniem ściskającym te profile. Przy wzroście całkowitego obciążenia P płyty powyżej P_{kr} , $\sigma_{\max}$ zawsze rośnie, podczas gdy $\sigma_{b/2}$, osiągnąwszy przy $P = P_{kr}$ ekstremalną wartość $(\sigma_{b/2})_{\text{ekstr}} \approx \sigma_{kr}$, zachowuje ją, gdy $P < 2P_{kr}$, a następnie gdy $P > 2P_{kr}$, spada i może nawet przejść na rozciąganie. Ten przebieg $\sigma_{b/2}$ powoduje, że jednakowym przyrostom obciążenia ΔP towarzyszy z początku ($P < 2P_{kr}$) liniowy, a potem ($P > 2P_{kr}$) nieliniowy przyspieszony wzrost $\sigma_0 = \sigma_b = \sigma_{\max}$. W tym drugim bowiem przedziale ($P > 2P_{kr}$) przyrost $\sigma_{\max}$ musi wyrównać nie tylko przyrost siły ΔP , lecz pokryć również spadek σ we włóknach środkowych. Jak wykazują doświadczenia, niezależnie od tego czy brzeg wzdłużne są utwierdzone, czy przegubowo podparte, dla obciążeń* $P_{kr} < P < 2P_{kr}$ rozkład naprężeń σ wzdłuż szerokości płyty b można z techniczną dokładnością przedstawić wzorem

$$\sigma = 0,5(\sigma_{\max} + \sigma_{kr}) + 0,5(\sigma_{\max} - \sigma_{kr}) \cos(2\pi y/b). \quad (12.1)$$

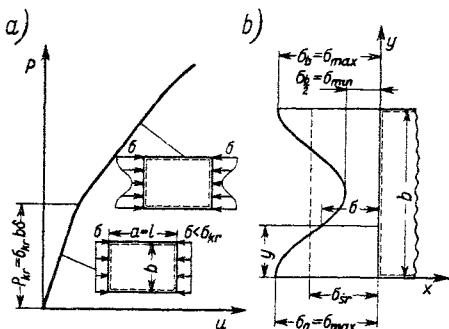
Powyższa zależność określa średnią wartość naprężeń ściskających

$$\sigma_{sr} = 0,5(\sigma_{\max} + \sigma_{kr}) \quad (P_{kr} < P < 2P_{kr}) \quad (12.2)$$

oraz nachylenie charakterystyki dP/du , które otrzymamy podstawiając** do (12.2): $\sigma_{sr} =$

* Od warunków brzegowych zależy natomiast wartość P_{kr} .

** Wzdłużne krawędzie płyty zostają przy wyboczeniu proste, wobec czego na tej krawędzi panuje stan prostego ściskania naprężeniami $\sigma = \sigma_{\max} = E\epsilon = Eu/a$.



Rys. 12.2. Charakterystyka ściskanej płyty i rozkład σ po przekroczeniu σ_{kr}

Symbol u — skrócenie płyty w kierunku działania naprężeń σ .

$= P/b\delta$, $\sigma_{\max} = Eu/a$. Po zróżniczkowaniu mamy:

$$\frac{dP}{du} = E \frac{b\delta}{a} \frac{d\sigma_{sr}}{d\sigma_{\max}} = \frac{1}{2} \left(\frac{b\delta}{a} E \right) \quad (P_{kr} < P \leq 2P_{kr}). \quad (12.3)$$

Zważywszy, że $(E b \delta / a)$ jest nachyleniem charakterystyki, gdy $P < P_{kr}$, wynik (12.3) oznacza dwukrotne zmniejszenie sztywności płyty na ściskanie po przekroczeniu P_{kr} . Ze wzoru (12.2) wynika również

$$\chi = d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max} = 0,5 \quad (\sigma_{kr} < \sigma_{\max} < 3\sigma_{kr}), \quad (12.4)$$

co wskazuje, że przyrostowi $\Delta\sigma_{sr}$ towarzyszy 2-krotnie większy wzrost $\Delta\sigma_{\max}$.

Otrzymane wyniki dotyczą płyty, która w swej płaszczyźnie ma swobodę rozszerzenia poprzecznego i gdy podpory wzdłużnych krawędzi płyty są na tyle sztywne, że nie ulegają wygięciu zarówno w kierunku prostym do powierzchni płyty, jak i w płaszczyźnie samej płyty. Przyczyna tendencji tego drugiego wygięcia ma swe źródło w tym, że przy wyboczeniu płyty odległość KL zmieni się inaczej aniżeli MN (rys. 11.3c) i przy bardzo wiotkim w tym kierunku profilu usztywniającym krawędzie AB i CD przyjmą w płaszczyźnie płyty postać linii falistej. Charakter rozkładu naprężeń σ (wzór 12.1) nie ulega przy tym zmianie, natomiast zmniejsza się χ (wzór 12.4), przyjmując w tym granicznym przypadku wartość $\chi = 0,41$.

Drugim czynnikiem wpływającym na zachowanie się płyty jest działanie usztywnień poprzecznych (współczynnik α , wzór 11.6). Jak pamiętamy, obecność usztywnień poprzecznych zmniejszała wartość σ_{kr} (patrz rys. 11.6). Po przekroczeniu P_{kr} usztywnienia poprzeczne odgrywają rolę pozytywną podnosząc wartość χ , tj. zmniejszając tempo wzrostu $\sigma_{\max}$. Szereg wartości $\chi = d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max}$ podaje tabl. 12.1 w dwóch granicznych przypadkach,

WARTOŚĆ $\chi = d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max}$ DLA DŁUGICH ($a \geq 3b$) PŁYT PODPARTYCH
PRZEGUBOWO NA 4 BRZEGACH

Tablica 12.1

α	0	0,25	0,5	1	2	4	∞	α według (11.6)
χ	0,41	0,46	0,49	0,54	0,59	0,61	0,68	swoboda sfałowania w płaszcz. płyty
χ	0,50	0,55	0,58	0,62	0,67	0,70	0,75	brak swobody

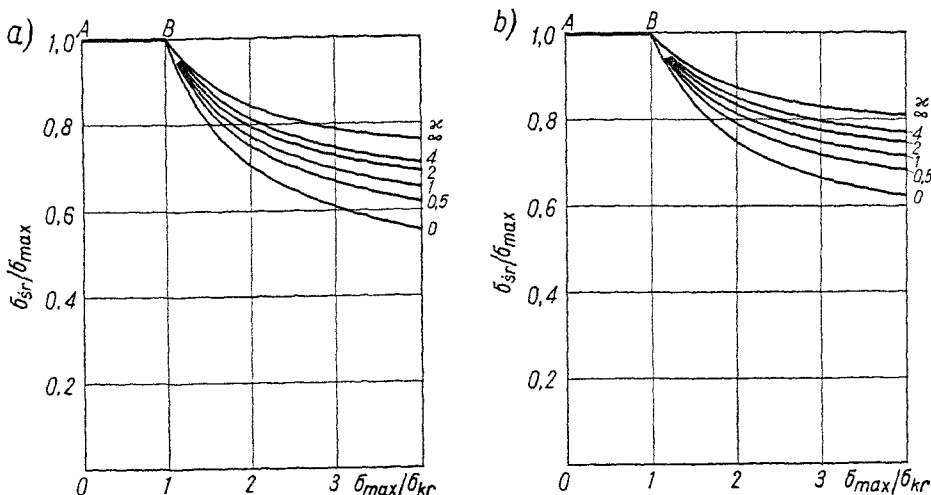
gdy istnieje swoboda odkształcania się krawędzi wzdłużnych w płaszczyźnie płyty, względnie gdy jej nie ma.

Znając wartość χ możemy określić wartość σ_{sr} z zależności

$$(\sigma_{sr} - \sigma_{kr}) = \chi(\sigma_{\max} - \sigma_{kr}), \quad (12.5)$$

gdzie σ_{kr} jest dane w funkcji α na wykresie (rys. 11.6). Przeliczenia przedstawiające tę zależność dla przypadku płyty opartej przegubowo na czterech brzegach, z dozwoloną

względnie usuniętą swobodą sfałowania krawędzi w płaszczyźnie płyty, podaje rys. 12.3. Odcinek AB na tych wykresach odpowiada pracy płyty przed utratą stateczności, kiedy to rozkład naprężeń jest równomierny i $\sigma_{\max} = \sigma_{sr}$. Te same wykresy można wykorzystać dla płyty o brzegach wzdłużnych utwierdzonych.



Rys. 12.3. Zależność σ_{sr} od $\sigma_{\max}$ dla płyty podpartej przegubowo na 4 brzegach ($a \geq 3b$).

a) krawędzie wzdłużne mają swobodę sfałowania w płaszczyźnie płyty; b) krawędzie wzdłużne nie mają swobody sfałowania w płaszczyźnie płyty. Współczynnik α według wzoru (11.6).

W przypadku posiadającym obecnie mniejsze praktyczne znaczenie*, gdy $P > 2P_{kr}$, przestają obowiązywać liniowe zależności (12.1÷12.4). Przyczyna tego tkwi głównie w zachodzącej stopniowo wraz ze wzrostem obciążenia zmianie kształtu powierzchni ugięcia płyty. Szczegółowa analiza zagadnienia dla kwadratowej płyty podpartej przegubowo na czterech brzegach wykazuje, że wzory (12.2÷12.4) należy zastąpić przez

$$\sigma_{sr} = 0,19\sigma_{\max} + 0,81\sqrt{\sigma_{kr}\sigma_{\max}}, \quad (12.6)$$

$$\frac{d\sigma_{sr}}{d\sigma_{\max}} = 0,19 + 0,405\sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}}} = \frac{a}{Eb\delta} \frac{dP}{du} \quad (P > 2P_{kr}). \quad (12.7)$$

Dla długiej płyty ($a/b > 3$) z wzdłużnymi brzegami utwierdzonymi sprężyscie, przy pełnej swobodzie rozszerzenia poprzecznego (według wzoru 11.6, $\alpha = 0$) i uniemożliwieniu sfałowania krawędzi wzdłużnych w płaszczyźnie płyty, odpowiednikami wzorów (12.2÷12.4) są ($P > 2P_{kr}$)

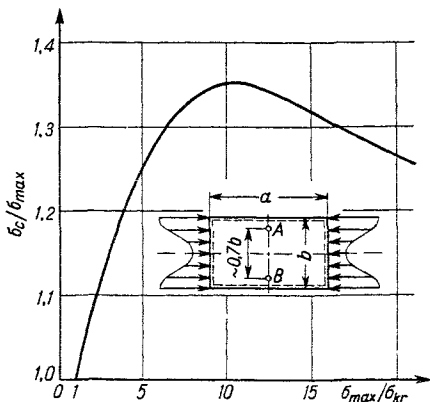
$$\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{\max}} = \left[1,2 - 0,65 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}} \right)^{0,4} + 0,45 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}} \right)^{0,8} \right] \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}} \right)^{0,4}, \quad (12.8)$$

$$\frac{d\sigma_{sr}}{d\sigma_{\max}} = \left[0,72 - 0,13 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}} \right)^{0,4} - 0,09 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}} \right)^{0,8} \right] \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{\max}} \right)^{0,4} = \frac{a}{Eb\delta} \frac{dP}{du}, \quad (12.9)$$

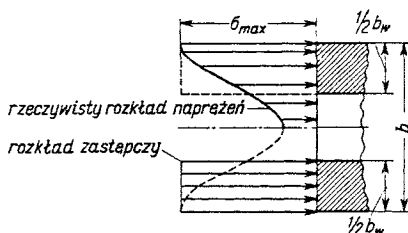
gdzie σ_{kr} — naprężenie krytyczne odpowiadające danemu utwierdzeniu brzegów i w przypadku usztywnienia konstrukcji zetownikami określone z rys. 11.25, a dla profili omagowych z rys. 11.26.

* W nowoczesnych konstrukcjach przez zmniejszenie b podnosimy σ_{kr} do tego stopnia, że wartość $3\sigma_{kr} \geq Q_{0,2}$. Ponieważ jak zobaczymy, średnie naprężenia niszczące konstrukcję są z reguły niższe od $Q_{0,2}$, to analiza zjawisk, gdy $P > 2P_{kr}$, straciła na swym znaczeniu w porównaniu z okresem lat 1935÷1940, gdy stosowano pokrycia stosunkowo cienkie ($b/\delta > 70$).

W pracującej po utracie stateczności płycie, poza naprężeniami ściskającymi rozłożonymi równomiernie wzdłuż grubości δ płyty, pojawiają się naprężenia od zginania, zwiększając w ten sposób sumaryczne naprężenia w jednej z warstw skrajnych. Z analizy teoretycznej wynika, że maksymalne sumaryczne naprężenia σ_c pojawiają się w punktach A i B, a ich zależność od $(\sigma_{\max}/\sigma_{kr})$ podaje rys. 12.4. Jeśli na przykład $\sigma_{kr} = 0,16Q_{0,2}$, a $\sigma_{\max} = 5\sigma_{kr}$, to jak wynika z tego wykresu $\sigma_c = Q_{0,2}$, a więc materiał w tych punktach zacznie płynąć. Przy dalszym, zresztą już bardzo małym, wzroście obciążenia ta strefa plastyczności rozszerza się powodując zmianę rozkładu naprężeń ściskających. Ponieważ rzeczywista płyta ma zawsze odchylenia od idealnego kształtu, to ten proces zmiany rozkładu



Rys. 12.4. Maksymalne naprężenia sumaryczne σ_c w funkcji $(\sigma_{\max}/\sigma_{kr})$



Rys. 12.5. Definicja szerokości współpracującej

jest przyspieszony, a tempo wzrostu całkowitej siły P znacznie zwolnione. Stwierdzono na przykład doświadczalnie, że gdy $\sigma_{kr} \geq 0,75Q_{0,2}$, to charakterystyka płyty upodabnia się do charakterystyki pręta, czyli praktycznie biorąc P_{kr} jest jednocześnie obciążeniem niszcącym P_n dla płyty (patrz art. 12.3).

Przy obliczaniu obciążeń niszczących konstruje, zachowanie się odcinka pokrycia (płyty) opisujemy często, wprowadzając pojęcie szerokości współpracującej b_w , jako sumarycznej szerokości dwóch wzdłużnych pasków (rys. 12.5), które pracując przy naprężeniach $\sigma = \sigma_{\max}$ przenoszą to samo obciążenie, co i cały rzeczywisty odcinek pokrycia. Z definicji tej wynika, że $P = b_w \delta \sigma_{\max} = b \delta \sigma_{sr}$, skąd

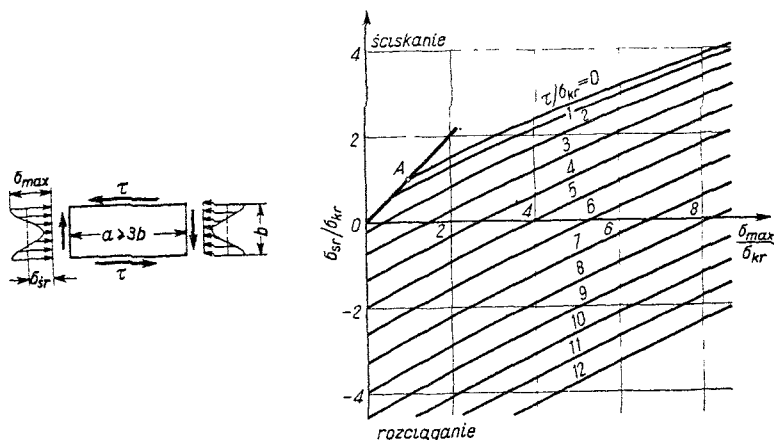
$$b_w = b(\sigma_{sr}/\sigma_{\max}), \quad (12.10)$$

a przebieg b_w/b podaje rys. 12.3.

Obecność naprężeń stycznych poza naprężeniami ściskającymi modyfikuje opisane zależności redukując wartość σ_{sr} , a więc i b_w , natomiast nie zmieniając prawie wartości $\chi = \sigma_{sr}/\sigma_{\max}$. Pełen obraz tego wpływu podaje rys. 12.6, w którym punkty położone powyżej osi odcinają odpowiadają ściskaniu, poniżej — rozciąganiu. Jeśli na przykład $\tau/\sigma_{kr} = 5$, to σ_{sr} staje się ściskające dopiero wtedy, gdy $\sigma_{\max} \geq 4\sigma_{kr}$, natomiast poniżej

tej wartości naprężenia rozciągające w środkowych włóknach płyty są tak duże, że σ_{sr} jest rozciągające. Odcinek OA odpowiada stanom przed utratą stateczności.

Zachowanie się ściskanego odcinka powłoki, gdy $P > P_{kr}$, jest w porównaniu z zachowaniem płyty znacznie bardziej złożone, gdyż jego przykładowo podana charakterystyka (rys. 12.7) przypomina omówiony w art. 11.7 przypadek wyboczenia powłoki cylindrycznej.

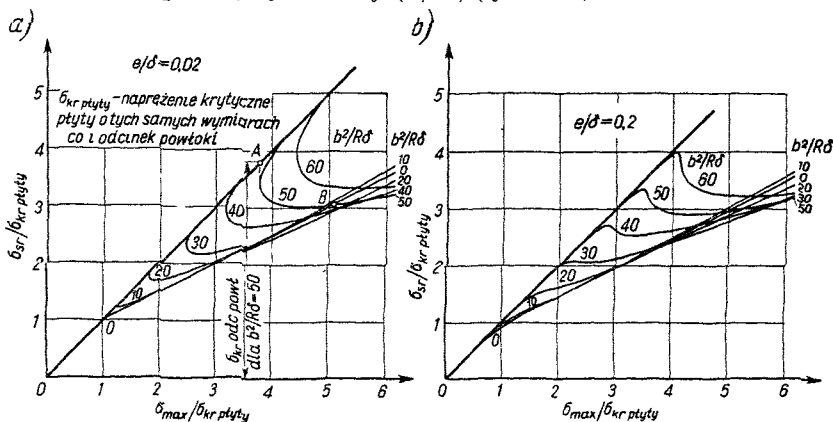


Rys. 12.6. Wpływ naprężeń stycznych na zachowanie się ściskanego długiej płyty po wyboczeniu.

Brzozy płyty podparte przegubowo

Współczynnik $\alpha = \infty$ (wzór 11.6). σ_{kr} - naprężenie krytyczne dla płyty przy prostym ścisnieniu.

Jak już podano w art. 11.8 jako ξ , określające naprężenia krytyczne, wzięto wartość odpowiadającą przeskokowi przy $u = \text{const}$ (punkt A na rys. 12.7a), otrzymując w ten sposób regularność przebiegu ξ w funkcji $(b^2/R\delta)$ (rys. 11.31). Przekroczenie odkształceń



Rys. 12.7. Charakterystyka ściskanego odcinka powłoki z zamocowanymi brzegami wzdłużnymi po przekroczeniu σ_{kr}

a) odchylenie od kształtu idealnego ($e/d = 0,02$); b) $e/d = 0,2$, w przypadkach pośrednich odchyleni można stosować interpolację liniową, definicja e patrz objaśnienie do rys. 11.31.

odpowiadających wartości P_{kr} powoduje najpierw raptowny spadek siły P , a dopiero potem stopniowy wzrost obciążenia, znacznie jednak powolniejszy aniżeli w przypadku płyty ($b^2/R\delta = 0$). Drugim ciekawym objawem jest to, że w porównaniu z płytą odcinek powłoki o tych samych wymiarach ulega wyboczeniu przy wyższych σ , w miarę jednak wzrostu obciążenia okazuje się, że przy tych samych σ_{max} płyta może przenosić wyższe obciążenie*. Tak na przykład dla $b^2/R\delta = 50$ oraz $e/\delta = 0,02$ fakt ten ma miejsce, gdy $\sigma_{max} > 5\sigma_{kr}$ płyty.

Jak widać z przebiegu charakterystyk, analityczne ujęcie przebiegu pracy odcinka powłoki, gdy $P > P_{kr}$, jest trudne. W przeważającej jednak większości zagadnień technicznie ważnych wartość parametru $b^2/R\delta < 15$ i wtedy z zadowalającą dokładnością rozważanie odcinka powłoki można zastąpić rozważaniem płyty o tych samych wymiarach**.

12.2. Obciążenia niszczące płyt i powłok żebrowanych. Uwagi ogólne

Opisane w art. 12.1 zachowanie odcinka pokrycia przeprowadzone było przy założeniu, iż profile podłużne są bardzo sztywne i poza skróceniem nie ulegają żadnym godnym uwagi dodatkowym odkształceniom. W konstrukcjach nowoczesnych to ostatnie założenie nie jest spełnione, gdyż odkształcenia pokrycia już przy wyboczeniu silnie wpływają na zachowanie się profili usztywniających (patrz rys. 11.24). Wpływ ten wzmaga się jeszcze po przekroczeniu σ_{kr} , komplikując bardzo analizę rachunkową. Z tego powodu rozważania nasze, odnoszące się do zachowania się takich konstrukcji przy $\sigma > \sigma_{kr}$, ograniczamy tylko do zagadnienia mającego największe znaczenie, a mianowicie wyznaczenia obciążeń niszczących.

W zależności od proporcji geometrycznych, postać odkształceń przy zniszczeniu może mieć różne formy. Jeśli profile (rys. 11.21b) są wysokie tak, że σ_{kr} obliczone jak dla anizotropowej jednorodnej płyty (wzór 11.25) są znacznie wyższe niż σ_{kr} określone z rys. 11.25, to odkształcenia przy zniszczeniu mają charakter lokalno-skrętny.

Jeśli ponadto przy wyboczeniu dominują skrętne odkształcenia profilu (konstrukcje poniżej linii AB na rys. 11.25), to po przekroczeniu σ_{kr} narastają one lawinowo tak, że między obciążeniem niszczącym a obciążeniem krytycznym istnieje niewielka tylko różnica. *W takim przypadku obciążenia krytyczne traktujemy jako niszczące.*

Inaczej przedstawia się sytuacja, gdy przy wyboczeniu paska pokrycia dominują lokalne odkształcenia profilu (konstrukcje powyżej linii AB na rys. 11.25). Jeśli przy tym σ_s skrętnego wyboczenia izolowanego profilu są znacznie wyższe niż σ_{kr} dla paska pokrycia, to wzrost obciążeń pociąga za sobą zwiększenie się prawie wyłącznie odkształceń lokalnych dopóty, dopóki nie nastąpi zniszczenie nie połączonej z pokryciem półki profilu. W takim przypadku osiągnięcie σ_{kr} przez pasek pokrycia nie jest równoznaczne ze zniszczeniem konstrukcji i różnica między obciążeniem krytycznym (tj. odpowiadającym σ_{kr}) a nisz-

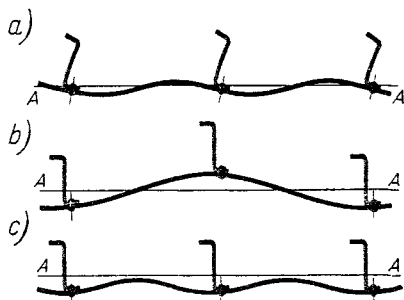
* Aczkolwiek krzywe z rys. 12.7 przedstawiają wyniki doświadczeń, słuszność tego stwierdzenia budzi pewne wątpliwości wymagając dalszych badań laboratoryjnych.

** Przy takim zastąpieniu σ_{kr} liczymy jak dla płyty (patrz art. 11.6 i 11.8).

czącym może być duża. Analityczne ujęcie tego rodzaju zagadnienia dotychczas nie istnieje i dlatego ten rodzaj zniszczenia, nazywany odąd *lokalnym*, ujmujemy na podstawie danych empirycznych (art. 12.3).

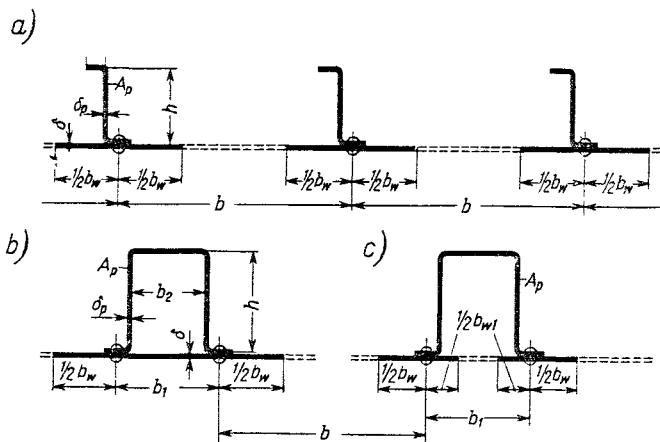
Poza opisanym przebiegiem zniszczenia I rodzaju, charakteryzującym się stopniowym lub lawinowym narastaniem tylko tego typu odkształceń, jakie pojawiają się w chwili wybożenia pokrycia, istnieje II rodzaj zniszczenia możliwy tylko wtedy, gdy odkształcenie profilu w momencie wybożenia pokrycia ma charakter wybitnie lokalny. Ten drugi przebieg polega na nagłym pojawieniu się wtórnych giętno-skrętnych odkształceń profilu z jednoczesnym zniszczeniem konstrukcji. Charakterystyczne jest przy tym, że pierwotna postać odkształcenia pokrycia (rys. 11.24b) może ulec radykalnej zmianie, przeskakując w postać antysymetryczną (rys. 12.8a, b).

Analityczne ujęcie tego drugiego przebiegu (art. 12.4 ÷ 12.5) przeprowadzone zostało przy zastąpieniu rzeczywistej konstrukcji szeregiem prętów (rys. 12.9), z których każdy składa się z profilu i współpracującego z profilem paska pokrycia o łącznej szerokości b_w (wzór 12.10). Reszta pokrycia spełnia rolę sprężystego utwardzenia przekroju pręta przeciwko obrotowi i przemieszczeniu prostokątnemu do pokrycia. Obliczenie naprężeń krytycznych zastępczego pręta z uwzględnieniem tych



Rys. 12.8. Postacie wybożenia płyty żebrowanej profilami cienkościennymi

- a) antysymetryczne wybożenie giętno-skrętne i lokalne;
 b) czysto giętne antysymetryczna postać wybożenia;
 c) czysto giętne symetryczna postać wybożenia.



Rys. 12.9. Zastępcza konstrukcja w analizie przebiegu zniszczenia drugiego rodzaju

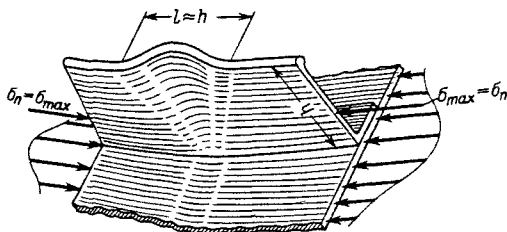
- a) konstrukcja zastępcza przy profilach otwartych; b) konstrukcja zastępcza przy profilach zamkniętych, gdy tylko odcinek b utracił stateczność; c) stateczność utraczona na odcinkach b i b_1 .

utwierdzeń przeprowadzamy według metod rozdz. 10 przy prymitywnym założeniu, iż rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym jest równomierny.

Wszystkie dotychczasowe uwagi dotyczyły płyt żebrowanych. mogą one jednak być stosowane również i do żebrowanych powłok, jeśli tylko parametr $b^2/R\delta < 15$ (oznaczenia patrz rys. 11.31). Jedyna różnica pojawia się w przebiegu II rodzaju zniszczenia, gdzie może wystąpić bardzo silne utwierdzenie zastępczego pręta przez pokrycie (patrz art. 12.4).

12.3. Lokalne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych

Opisane w art. 12.2 lokalne zniszczenie konstrukcji (przebieg I rodzaju) charakteryzuje się tym, iż odcinek, w którym następuje szczególnie silne stopniowe narastanie odkształceń profilu usztywniającego, stanowi tylko niewielką część jego długości między poprzecznymi żebrowaniami (rys. 12.10). *Wielkość*



Rys. 12.10. Typowy obraz zniszczenia lokalnego

naprężeń niszczących σ_l działających w profilu nie zależy przy tym od rozstawu żebrowań i jak pokazują doświadczenia dla zetowych i ceowych profili może być określona jako wyższa z dwóch wartości:

$$\sigma_l = \psi Q_{0,2} (\sigma_{kr}/Q_{0,2})^{0,25}, \quad (12.11)$$

$$\sigma_l = 1,04\sigma_{kr} \quad (12.12)$$

gdzie

$Q_{0,2}$ — umowna granica plastyczności przy trwałym wydłużeniu 0,2%,

σ_{kr} — naprężenie krytyczne, odpowiadające wyboczeniu paska pokrycia i określone według danych rys. 11.25 z ewentualnym uwzględnieniem ograniczonej sprężystości materiału (patrz art. 11.3);

ψ — współczynnik; dla walcowanych profili ceowych lub zetowych ($h/\delta_p \leq 25$) $\psi = 0,8$ natomiast dla tychże profili zaginanych z blachy ψ określa się z tabl. 12.2.

WSPÓŁCZYNNIK ψ (WZÓR (12.11)) DLA ZETOWNIKÓW
ZAGINANYCH Z BLACHY

Tablica 12.2

h/δ_p	20	30	40	50	60
ψ	0,90	0,82	0,75	0,72	0,70

Dla profili o innym kształcie niż zetowniki lub ceowniki jako σ_l można przyjmować

$$\sigma_l = 0,8\sigma_{krl}, \quad (12.13)$$

gdzie σ_{krl} — naprężenia krytyczne przy lokalnym wyboczeniu izolowanego profilu z ewentualnym uwzględnieniem ograniczonej sprężystości materiału (art. 11.3). Współczynnik 0,8 uwzględnia przy tym destabilizujący wpływ wybozonego uprzednio paska pokrycia.

Mając σ_l możemy następnie wyznaczyć średnią wartość ściskającego wydatku n_l (kG/cm), odpowiadającą tej postaci zniszczenia konstrukcji jako

$$n_l = \sigma_l (A_p + b_w \delta) / b, \quad (12.14)$$

gdzie b_w — szerokość współpracująca ze wzoru (12.10) przy $\sigma_{\max} = \sigma_l$.

Opisaną metodę można stosować również dla żebrowanych powłok, jeśli tylko $b^2/R\delta < 15$.

Przykład. Wyznaczyć niszącą wartość n_l wydatku ściskającego duralową konstrukcję żebrowaną zetownikami zaginanyymi z blachy (rys. 12.9), jeśli $b = 80$ mm, $\delta = 1,5$ mm, $h = 30$ mm, $\delta_p = 1,2$ mm, $b_p = 10$ mm, $A_p = 0,60$ cm², $E = 7,0 \cdot 10^3$ kG/mm², $Q_{0,2} = 31,5$ kG/mm², $\nu = 0,3$.

Rozwiązanie. Obliczając parametry: $A_p/b\delta = 0,50$, $\delta_p/\delta = 0,8$, otrzymujemy z wykresu (rys. 11.25) $\xi = 4,94$, a ponadto stwierdzamy, że punkt reprezentujący rozważaną konstrukcję leży powyżej linii AB . Oznacza to, że w momencie wybożenia paska pokrycia, gdy

$$\sigma = \sigma_{kr} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \xi E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 = 11,0 \text{ kG/mm}^2,$$

odkształcenia profilu mają charakter lokalny. Pozwala to zastosować opisaną w tym artykule metodę. Stosując dane tabl. 12.2, otrzymujemy według wzoru (12.11)

$$\sigma_l = 0,86 \cdot 31,5 \sqrt{\frac{11,0}{31,5}} = 20,8 \text{ kG/mm}^2,$$

podczas gdy z rys. 11.17a, rys. 11.12 i wzoru (12.13) otrzymujemy $\sigma_l \approx 23,5$ kG/mm². Biorąc zatem jako σ_l wyższą z tych dwóch wartości, obliczamy* z (12.2) σ_{sr} , wstawiając $\sigma_{\max} = \sigma_l$, w wyniku czego otrzymujemy

$$\sigma_{sr} = 16,7 \text{ kG/mm}^2.$$

Przekształcając wzór (12.14) przy uwzględnieniu (12.10), mamy

$$n_l = (\sigma_l A_p / b) + (\sigma_{sr} \delta) \approx 425 \text{ kG/cm}$$

jako odpowiedź na postawione pytanie.

Jeśli by w rozpatrywanej konstrukcji zmienić grubość profili zetowych na $\delta_p = 0,6$ mm, to stosując nadal dane z rys. 11.25 (aczkolwiek $h/\delta_p > 30$) mamy $\xi = 3,80$, a σ_{kr} spada do $\sigma_{kr} = 8,4$ kG/mm². Ponieważ ponadto punkt reprezentujący zmodyfikowaną konstrukcję leży poniżej linii AB , to w momencie wybożenia odkształcenia profilu mają charakter skrętny. Zgodnie zatem z uwagami art. 12.2 oznacza to, że σ_{kr} są jednocześnie naprężeniami niszącymi i w wyniku wydatek niszący n_n :

$$n_n = \sigma_{kr} (A_p + b\delta) / b \approx 158 \text{ kG/cm}.$$

Tak znaczna i niepożądana redukcja ($\sim 62\%$) średniego wydatku niszącego unaocznia wartość zalecenia (art. 11.6), aby przy projektowaniu dobierać parametry geometryczne, pozwalające umieścić punkt reprezentujący konstrukcję powyżej linii AB (rys. 11.25). Najłatwiej osiągnąć to, stosując $\delta_p \approx \delta$ lub $\delta_p > \delta$.

12.4. Giętne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych

Wprowadzając w II rodzaju zniszczenia konstrukcji pojęcie pręta zastępczego (rys. 12.9), musimy liczyć się z giętno-skrętnym wybożeniem takiego pręta. W przypadku, gdy przekrój pręta zastępczego ma oś symetrii prostopadłą do pokrycia, możliwa jest czysto-giętna postać zniszczenia, przy której przekroje poprzeczne doznają jedynie przemieszczeń w płaszczyźnie symetrii (rys. 12.8b,c). W konstrukcji z niesymetrycznymi profilami założenie czysto-giętnej postaci zniszczenia pręta zastępczego jest jedynie przybliżeniem, mającym rację bytu tylko wtedy, gdy σ_s wybożenia skrętnego tego pręta jest znacz-

* Wzór (12.2) możemy stosować, gdyż $\sigma_{\max} < 3\sigma_{kr}$.

nie większe niż σ_w odpowiadające jego wyboczeniu giętnemu. Taki stosunek obu naprężeń krytycznych zachodzi zawsze w przypadku profili zamkniętych (patrz art. 10.5), w przypadku natomiast profili otwartych ma on miejsce, gdy rozstaw a żeber jest duży*.

Naprężenia krytyczne σ_w , odpowiadające giętnemu wyboczeniu pręta zastępczego obliczamy ze wzoru Eulera zakładając, że podparcie końców pręta jest przegubowe. W wyniku

$$\sigma_w = \frac{\pi^2(EJ)_{\text{zast}}}{A_{\text{zast}}l^2}, \quad (12.15)$$

gdzie

A_{zast} — pole przekroju zastępczego pręta, złożonego z pola przekroju profilu A_p i pola blachy współpracującej (rys. 12.9);

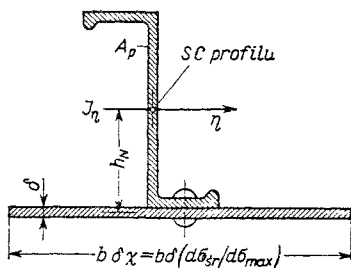
l — długość półfali, równa w zasadzie rozstawowi a żeber;

$(EJ)_{\text{zast}}$ — sztywność przekroju pręta zastępczego względem osi równoległej do pokrycia, przechodzącej przez środek ciężkości przekroju pręta.

Praktyczne zastosowanie wzoru (12.15) utrudnia fakt, że A_{zast} i $(EJ)_{\text{zast}}$ zależą** od σ_w . Dla A_{zast} wpływ ten wyraża się prosto i np. dla konstrukcji (rys. 12.9a)

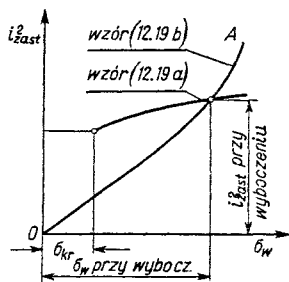
$$A_{\text{zast}} = A_p + b_w \delta = A_p + (b \delta \sigma_{sr} / \sigma_{\max}), \quad (12.16)$$

gdzie $\sigma_{\max} = \sigma_w$. Dla $(EJ)_{\text{zast}}$ wpływ σ_w jest bardziej złożony, gdyż musimy uwzględnić, że chwilowa sztywność dP/du paska współpracującego pokrycia nie jest $(b_w \delta E/a)$, lecz według wzoru (12.3) wynosi



Rys. 12.11. Oznaczenia przy określaniu J_{zast}

J_{η} — moment bezwładności samego profilu względem osi η .



Rys. 12.12. Wykreślna metoda wyznaczania naprężeń niszczących przy czysto giętnym postaci zniszczenia

ona $(Eb\delta/a)(d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max}) = (Eb\delta/a)\chi$. Ponieważ wielkość siły krytycznej zależy od sztywności, to przy określaniu J_{zast} należy uwzględnić pasek o polu przekroju

$$b\delta(d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max}) = b\delta\chi, \quad (12.17)$$

co w rezultacie daje (rys. 12.11)

$$J_{\text{zast}} = J_{\eta} + k_N^2 \frac{A_p b \delta \chi}{A_p + b \delta \chi}, \quad (12.18)$$

gdzie $\chi = d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max}$ wyznaczone jest z tabl. 12.1 bądź przy wyższych wartościach $\sigma_{\max} = \sigma_w$ ze wzorów (12.7) lub (12.9).

* Potwierdzeniem tego jest przykład (rys. 10.23), z którego wynika, że przy dużym $A\sigma_{kr} \approx \sigma_w$, gdzie σ_w odpowiada właśnie wyboczeniu giętnemu w płaszczyźnie $x\chi$.

** Zgodnie z rozważaniami art. 12.1 wielkość $\sigma_w = \sigma_{\max}$ wpływa na b_w (wzór 12.10). Należy przy tym pamiętać, że w zależności od $\sigma_w = \sigma_{\max}$ w stosunku do σ_{kr} , σ_{sr} określa się wzorem (12.2), (12.6) bądź (12.8).

Wpływ σ_w na sztywność $(EJ)_{zast}$ wyraża się również w zmianie wielkości modułu E . Jeśli bowiem σ_w przekracza granicę sprężystości materiału, to zgodnie z art. 10.9 zamiast E należy wstawić E_t .

Jak widać z tych rozważań, bezpośrednie wyznaczenie σ_w ze wzoru (12.12) może być przeprowadzone jedynie metodą kolejnych przybliżeń. Trudność tę omijamy wyznaczając ze wzorów (12.18) i (12.16), dla szeregu dowolnie obranych wartości σ_w , kwadrat promienia bezwładności i_{zast}^2

$$i_{zast}^2 = J_{zast}/A_{zast} \quad (12.19a)$$

oraz ze wzoru (12.12)

$$i_{zast}^2 = \sigma_w A l^2 / \pi^2 E_t. \quad (12.19b)$$

Nanosząc z tych wzorów i_{zast}^2 jako funkcję σ_w otrzymamy dwie krzywe (rys. 12.12), których przecięcie daje szukaną odciętą σ_w . Krzywa OA (zależność 12.19b) jest w swym początku linią prostą ($E_t = E = \text{const}$) i ulega zakrzywieniu dopiero przy wyższych wartościach σ_w , gdy $E_t < E$.

Rozpatrzony przypadek zniszczenia czysto-giętnego odpowiadał symetrycznej postaci wybożenia (rys. 12.8c), przy której można zaniedbać sprężyste utwardzenie zastępczego pręta. W przypadku antysymetrycznej postaci (rys. 12.8b), oddziaływanie pokrycia na zastępczy pręt można w przybliżeniu określić dzieląc pokrycie na poprzeczne paski i traktując każdy z nich jak belkę obciążoną szeregiem jednakowych sił działających na przemian do góry i do dołu (rys. 12.13). Wielkość tych sił q związana jest z ugięciem w zależnością znaną z kursu Wytrzymałości Materiałów

$$w = \frac{qb^3}{48E\delta^3},$$

skąd można określić sztywność utwardzenia K (patrz rys. 10.11) jako

$$K = q/w = 4E(\delta/b)^3. \quad (12.20)$$

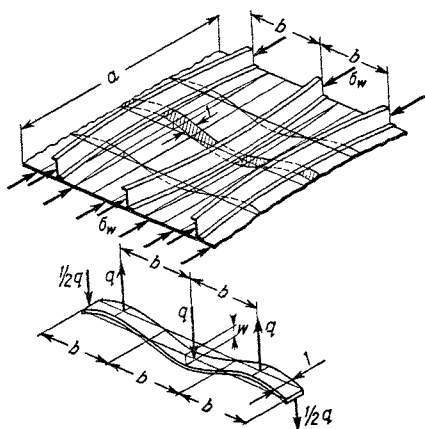
Wstawiając powyższą wartość do wzoru (10.14) przy wprowadzeniu oznaczeń: $A = l/n$, $EJ = (EJ)_{zast}$, $\sigma_w = P_{kr}/A_{zast}$, A_{zast} według wzoru (12.16) mamy wartość σ_w naprężenia, odpowiadającego giętnemu wybożeniu antysymetrycznemu, równą

$$\sigma_w = \frac{\pi^2(EJ)_{zast}}{A_{zast}l^2} + K \frac{A^2}{A_{zast}} \quad (12.21a)$$

lub po wprowadzeniu i_{zast}^2 według (12.19a)

$$i_{zast}^2 = \frac{\sigma_w A^2}{\pi^2 E_t} - \frac{K}{\pi^2 E_t} \frac{A^4}{A_{zast}}. \quad (12.21b)$$

Metoda rozwiązania równania (12.21b), tj. wyznaczenia σ_w jest podobna do opisanej dla przypadku wybożenia symetrycznego (wzory 12.19). Obierając mianowicie szereg wartości σ_w wyznaczamy według (12.19a) i_{zast}^2 , tj. lewą stronę równania (12.21b). Przy określeniu prawej strony równania (12.21b) należy rozważyć kilka wariantów, gdy kolejno $A = a$, $A = a/2$, $A = a/3$ itd. Nanosząc, podobnie jak poprzednio (rys. 12.12), w funkcji σ_w oddzielnie wartości lewej, oddzielnie zaś wartości prawej strony równania (12.21b), otrzymujemy w punktach przecięcia dla poszczególnych A odpowiednie wartości σ_w , z których wybieramy najniższą.



Rys. 12.13. Określenie sprężystego utwardzenia przy giętnym wybożeniu antysymetrycznym

W podobny sposób określamy σ_w wyboczenia giętnego dla płyt zakrzywionych, jeśli tylko parametr $b^2/R\delta < 15$. Należy jednak przy tym rozróżnić dwie możliwości, a mianowicie przypadek, gdy giętno wyboczenie zastępczego pręta zachodzi w kierunku do środka krzywizny powłoki i przypadek, gdy zachodzi ono na zewnątrz od środka. W przypadku pierwszym* wszystkie dotychczasowe rozważania tego artykułu dla żebrowanych płyt płaskich można stosować bez żadnych zmian. Jeśli jednakże z pewnych przyczyn pierwszy przypadek jest uniemożliwiony, to naprężenia σ_w są znacznie wyższe. Powodem tego jest pojawienie się wydatków obwodowych, które przy ugięciu w zastępczego pręta wynoszą $n_t = (E\delta w/R)$ i które na szerokości b między kolejnymi profilami dają do środka oddziaływanie q o wielkości

$$q = (n_t/R)b = (Eb\delta/R^2)w.$$

Oddziaływanie to jest więc identyczne z istnieniem utwierdzenia o sztywności K

$$K = q/w = E\delta b/R^2 \text{ kG/cm}^2, \quad (12.22)$$

a wyznaczenie σ_w przeprowadzamy jak w przypadku antysymetrycznego wyboczenia płyty, wstawiając do równania (12.21b) zamiast poprzedniej wartości K (wzór 12.20) wartość znalezioną obecnie. Podobnie jak i w przypadku pręta (art. 10.4), utwierdzenie sprężyste pręta zastępczego powoduje zmniejszenie długości λ półfali, która stanowić może mały ułamek rozstawu a żebier poprzecznych.

Przykład. Dla konstrukcji rozpatrywanej w art. 12.3 wyznaczyć σ_w , zakładając rozstaw żebier $a = 50$ cm i biorąc wykres $\sigma = f(\varepsilon)$ według rys. 10.29a.

Rozwiązanie. Obliczając wartości pomocnicze: $J_\eta = 0,81 \text{ cm}^4$, $A_p = 0,60 \text{ cm}^2$, $b\delta = 1,20 \text{ cm}^2$, $h_N = 1,63$ cm, mamy po wstawieniu do (12.18) $J_{\text{zast}} = 1,53 \text{ cm}^4$. Założono przy tym, iż żebra są w sposób wlotki połączone z profilami ($\kappa = 0$ według wzoru 11.6), a same profile dają swobodę sfałowania krawędzi wzdłużnych w płaszczyźnie płyty. Przy tych założeniach oraz uwzględnieniu, że $a/b = 5 > 3$, mamy według tabl. 12.1: $\chi = d\sigma_{sr}/d\sigma_{\max} = 0,41$ i wartość ta jest stała dopóty, dopóki $\sigma_{\max} < 3\sigma_{kr}$. Wyznaczając następnie z wykresu (rys. 12.3a) dla $\kappa = 0$ szereg wartości $\sigma_{sr}/\sigma_{\max} = b_w/b$, mamy po wstawieniu do (12.16) i (12.19a):

σ_w/σ_{kr}	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	
A_{zast}	1,80	1,56	1,35	1,27	1,23	cm ²
i_{zast}^2	0,85	0,99	1,12	1,20	1,24	cm ²
$\sigma_w = \sigma_{\max}$	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	kg/mm ²

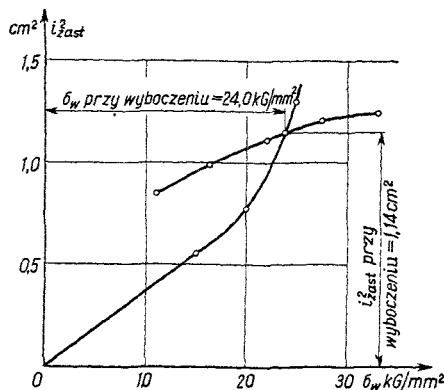
przy czym uwzględniono, że według danych z poprzedniego art. $\sigma_{kr} = 11,0$ kG/mm².

Przechodząc teraz do wyznaczenia zależności (12.19b), w której $\lambda = a = 50$ cm, korzystamy z danych wykresu (rys. 10.29a). Dla szeregu wartości σ_w otrzymujemy:

σ_w	15	20	25	kG/mm ²
E_t	$7,0 \cdot 10^3$	$6,6 \cdot 10^3$	$4,8 \cdot 10^3$	kG/mm ²
i_{zast}^2	0,55	0,77	1,31	cm ²

* Z możliwością pierwszego przypadku należy się zawsze liczyć w powłokach skrzydeł, gdy zgięcie skrzydła jako całości daje w górnej ściskanej powierzchni tendencję do giętnego wyboczenia zastępczego pręta w kierunku do środka krzywizny poprzecznego przekroju skrzydła. To samo dotyczy cylindrycznego kadłuba nie posiadającego kabiny ciśnieniowej. W konstrukcjach, w których powłoka stanowiąc powierzchnię wypukłą ma podwójną krzywiznę (np. bardzo wydłużoną elipsoide), przypadek pierwszy jest wykluczony.

Budując obecnie wykres (rys. 12.14) analogiczny do wykresu na rys. 12.12, wyznaczamy punkt przecięcia o współrzędnych $\sigma_w = 24,0 \text{ kg/mm}^2$, $i_{zast}^2 = 1,14 \text{ cm}^2$. W wyniku obciążenie niszczące, przenoszone przez pręt zastępczy o polu przekroju $A_{zast} \approx 1,32 \text{ cm}^2$, wynosi $P_w = \sigma_w A_{zast} \approx 3,2 \text{ t}$, a średni wydatek $n_w = P_w/b = 395 \text{ kg/cm}$. Jak widać, ta ostatnia wartość jest nieco niższa niż otrzy-



Rys. 12.14. Wykresne rozwiązanie przykładu liczbowego

mana poprzednio dla tej samej konstrukcji i gdyby istniały tylko dwie możliwości zniszczenia: czysto giętne lub lokalne, to zniszczenie przybrałoby postać zniszczenia giętnego. Jak przekonamy się jednak, innym formom zniszczenia odpowiadają obciążenia niższe (patrz art. 12.6).

12.5. Skrętne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych

Obliczone w art. 12.4 naprężenie σ_w jest ostateczną odpowiedzią określającą zniszczenie konstrukcji z profilami zamkniętymi. W przypadku profili otwartych (np. teowych) konieczne jest rozpatrzenie również skrętnej względnie skrętno-giętnej postaci zniszczenia zastępczych prętów, na jakie została podzielona rzeczywista konstrukcja (rys. 12.9). Biorąc pod uwagę, że powiązanie tych prętów z pokryciem uniemożliwia przemieszczenia pótek profili w płaszczyźnie pokrycia, mamy właściwie powtórzenie zagadnienia rozpatrzonego ogólnie w art. 10.7. Jeśli założymy na razie, że profil jest symetryczny, a oś symetrii prostopadła do pokrycia, to wyboczenie skrętne zachodzi niezależnie od giętnego, a siła krytyczna P_s działająca na sam profil, określona jest wzorem (10.44b). Wyznaczając stąd $\sigma_s = P_s/A_s$, mamy*:

$$\sigma_s = \frac{1}{J_N} \left[C_{sN} \frac{\pi^2}{\Lambda^2} + C + K_\phi \frac{\Lambda^2}{\pi^2} \right], \quad (12.23)$$

gdzie, poza znanymi już ze wzoru (10.44b) oznaczeniami, $\Lambda = a/n \text{ cm}$ — długość półfali przy wyboczeniu (n — liczba naturalna); $J_N = A_p r_N^2 \text{ cm}^4$ — biegunowy moment bezwładności przekroju profilu względem punktu N (patrz rys. 10.22).

* W odróżnieniu od przypadku wyboczenia giętnego przy wyboczeniu skrętnym jako P_s oznaczamy siłę działającą w samym tylko profilu, na który oddziałuje pokrycie dając utwierdzenie tego profilu przeciwko obrotowi. Nie należy jednak zapominać, że całkowita siła w zastępczym profilu jest sumą

$$P_s + b_w \delta \sigma_s.$$

Przy stosowaniu wzoru (12.23) istotną rzeczą jest, bardziej wnikliwe w porównaniu z art. 10.7, określenie sztywności K_ϕ . Sztywność ta bowiem zależy nie tylko od postaci wyboczenia (symetryczne według rys. 11.24b lub antysymetryczne według rys. 12.8a), lecz również od deformacji poprzecznego przekroju profilu oraz sztywności samego połączenia (nitowego, zgrzewanego lub klejonego). Nie wchodząc w zbytnie szczegóły ostateczny wynik podajemy w postaci

$$1/K_\phi = (1/K_{\phi b}) + (1/K_{\phi n}) + (1/K_{\phi p}), \quad (12.24)$$

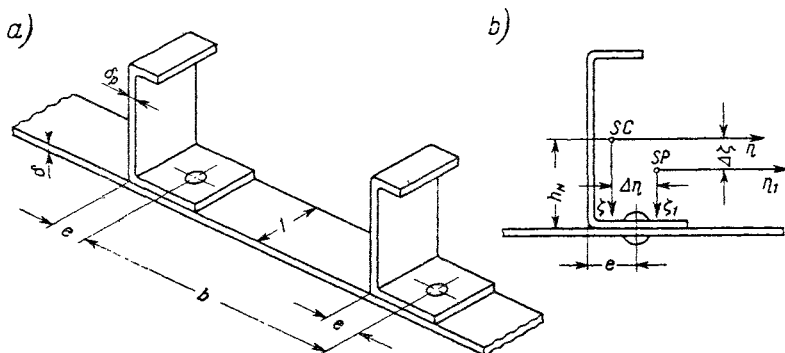
w którym $K_{\phi b}$, $K_{\phi n}$, $K_{\phi p}$ uwzględniają odpowiednio sztywność pokrycia, sztywność połączenia nitowego (średnica nita d , podziałka t) oraz sztywność samego profilu. Sztywności tę przy oznaczeniach z rys. 12.15 są:

$$K_{\phi b} = \begin{cases} E\delta^3/3b & \text{— wyboczenie symetryczne} \\ E\delta^3/b & \text{— wyboczenie antysymetryczne} \end{cases} \quad (12.25a)$$

$$K_{\phi n} = E d^3/20 (\delta_p + \delta) t, \quad (12.26)$$

$$K_{\phi p} = E\delta_p^3/[12e + 6(h_N - \Delta\zeta)]. \quad (12.27)$$

Dokładniejsza analiza wykazuje, że sztywność $K_{\phi b}$ przy symetrycznym wyboczeniu (rys. 11.24b) zależy od naprężeń ściskających σ_s , działających w profilu. Powodem tego jest, że wybozione między



Rys. 12.15. Oznaczenia do wzorów (12.25) ÷ (12.27)

profilami pokrycie przedstawia w przekroju wzdłużnym jak gdyby blachę falistą, której sztywność jest większa niż $E\delta^3/12$. Wynikiem analizy jest, iż przy wyboczeniu symetrycznym

$$K_{\phi b} = -\frac{E\delta^3}{3b} \left(1 + 0,6 \frac{\sigma_s - \sigma_{kr}}{\sigma_{kr}} \right), \quad (12.25c)$$

gdzie σ_{kr} — naprężenie krytyczne paska pokrycia między kolejnymi profilami.

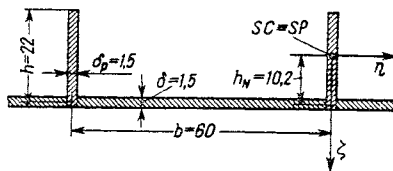
Porównując wzory (12.25b) i (12.25c) widzimy, że sztywność utwierdzenia przy wyboczeniu antysymetrycznym $(K_{\phi b})_A$ staje się mniejsza od sztywności $(K_{\phi b})_S$ przy wyboczeniu symetrycznym, gdy $\sigma_s > 4,3\sigma_{kr}$. Ponieważ pozostałe sztywności $K_{\phi n}$ i $K_{\phi p}$ zostają niezmienione, warunek powyższy daje granicę $(\sigma_s/\sigma_{kr} \approx 4)$, powyżej której niższą wartość naprężeń niszczących σ_s daje antysymetryczna postać wyboczenia skrętnego. Przypadek taki, zachodzący, gdy profile są dość solidne ($\delta_p = 1,5 \div 2\delta$) i rzadko rozstawione (niskie σ_{kr}), ma dziś mniejsze znaczenie praktyczne.

Mając wartość K_ϕ , możemy wyznaczyć σ_s ze wzoru (12.23), przy czym rozstaw a zeber jest wielokrotnością długości λ półfali. W przypadku antysymetrycznego wyboczenia jest to proste, gdyż K_ϕ nie zależy od σ_s . Biorąc zatem kolejno $\lambda = a, a/2, a/3, \dots$ wyznaczamy odpowiadające σ_s , wybierając z nich wartość najmniejszą. W przypadku wyboczenia symetrycznego, gdzie K_ϕ zależy od σ_s , równanie (12.23) należałoby rozwiązywać metodą kolejnych przybliżeń; wystarczającą jednak dokładność otrzymujemy przyjmując $K_\phi = \text{const}$ odpowiadającą spodziewanej wartości σ_s .

Wszystkie dotychczas rozważania odnosily się do materiału idealnie sprężystego. Rozwiązanie równania (12.23), gdy σ_s przekracza granicę sprężystości, jest raczej żmudne, wymagające stosowania metody kolejnych przybliżeń. W takim przypadku zadowalamy się przybliżeniem, obliczając $(\sigma_s)_{spr}$ dla materiału idealnie sprężystego i redukując następnie tę wartość w stosunku E_t/E . Ponieważ według tego samego prawa redukowaliśmy naprężenia krytyczne przy ścinaniu płyt (patrz art. 11.3), to, wprowadzając na wykresie (rys. 11.14) zamiast $(\tau_{kr spr} \sqrt{3})$ i $(\tau_{kr} \sqrt{3})$ odpowiednio $(\sigma_s)_{spr}$ i $(\sigma_s)_{rzecz}$, możemy bezpośrednio korzystać z tego wykresu. Tak na przykład, gdy $(\sigma_s)_{spr} = Q_{0,2}$ to dla stopu aluminiowego, w którym $Q_{0,2}/R_t = 0,65$, otrzymujemy z tego wykresu $\sigma_s = 0,76 Q_{0,2}$ jako wartość rzeczywistego naprężenia niszczonego konstrukcję przy skrętnej postaci wyboczenia zastępczego pręta.

Wszystkie opisane rozważania dotyczą również powłok, jeśli tylko $b^2/R\delta < 15$.

Przykład. Obliczyć σ_s dla duralowej konstrukcji integralnej (rys. 12.16), jeśli rozstaw $a = 30$ cm, moduł $E = 7,2 \cdot 10^3$ kG/mm², $Q_{0,2}/R_t \approx 0,7$, $Q_{0,2} = 28$ kG/mm², $E/G = 2,6$.



Rys. 12.16. Dane przykładu liczbowego

Rozwiązanie. Traktując jako usztywniający profil całe pionowe żebro, obliczamy wielkości pomocnicze: $C_s = 0$, $EJ_z = Eh\delta_p^3/12 = 1055$ kGcm², $h_N = 1,02$ cm,

$$\Delta_s^* = 0, \quad C = Gh\delta_p^3/3 \approx 16,25 \text{ kGcm}^2, \quad J_N = (h\delta_p/12)(h^2 + \delta_p^2) + h_N^2 h\delta_p = 0,64 \text{ cm}^4.$$

Stwierdzając następnie, że w konstrukcji integralnej $K_{\phi n} = \infty$ i zakładając $\sigma_s \approx 1,5\sigma_{kr}$, mamy dla symetrycznej postaci wyboczenia według wzorów (12.25a) i (12.27):

$$K_{\phi b} = (E\delta^3/3b)[0,4 + 0,6(\sigma_s/\sigma_{kr})] = 175 \text{ kGcm/cm rad},$$

$$K_{\phi p} = E\delta_p^3/6h_N = 935 \text{ kGcm/cm rad},$$

skąd według (12.24): $K_{\phi} = 147 \text{ kGcm/cm rad}$.

Wstawienie powyższych wartości do (12.23), daje:

$$\sigma_s = (16300/A^2) + 2540 + 23,4A^2 \text{ (kG/cm}^2\text{, gdy } A \text{ w cm)}.$$

Podstawiając z kolei $A = 30$ cm, 15 cm, 10 cm, ..., najmniejszą wartość $\sigma_s = 3770$ kG/cm² otrzymujemy dla $A = 5$ cm. Ponieważ otrzymana przy założeniu idealnej sprężystości wartość σ_s jest wyższą od $Q_{0,2}$, to obliczając $(\sigma_s)_{spr}/Q_{0,2} \approx 1,35$, otrzymujemy z wykresu (rys. 11.14) dla odciętej 1,35 — rzędną 0,85, skąd wynika

$$(\sigma_s)_{rzecz} = 0,85 Q_{0,2} = 2380 \text{ kG/cm}^2.$$

Wartość tę należy porównać z σ_t lokalnej formy zniszczenia (art. 12.3). Traktując żebro jako płytę o trzech brzegach przegubowo podpartych a czwartym swobodnym, mamy dla idealnie sprężystego materiału przy $A = 5$ cm i $b_2 = h - (\delta/2) = 2,12$ cm:

$$\sigma_{kr spr} \approx \xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{b_2} \right)^2 = 3760 \text{ kG/cm}^2,$$

przy czym $\xi = 0,65$ określono z rys. 11.5 dla $A/b_2 \approx 2,4$. Redukując powyższą wartość według rys. 11.12, otrzymujemy $\sigma_{krl} = 0,92 Q_{0,2} = 2570$ kG/cm², jako rzeczywistą wartość naprężenia, przy którym następuje wyboczenie lokalne żebra. Biorąc następnie pod uwagę destabilizujący wpływ wyboczonego uprzednio pokrycia, musimy według wzoru (12.13) zredukować dodatkowo powyższą wartość i w rezultacie

$$\sigma_t = 0,8\sigma_{krl} = 2060 \text{ kG/cm}^2.$$

Porównując obydwie wartości widać, że $\sigma_l < (\sigma_s)_{\text{rzecz.}}$. Aczkolwiek wzór (12.13) określa σ_l z pewnym niewielkim zapasem bezpieczeństwa, to jednak, chcąc być po stronie bezpiecznej, tę ostatnią wartość bierzemy jako podstawę do dalszych obliczeń. Jeśli na przykład chcemy wyznaczyć obciążenie niszczące, to obliczając według wzoru (11.4) σ_{kr} dla paska pokrycia otrzymujemy* dla $\xi = 4,0$: $\sigma_{kr} = 1630$ kG/cm². Stosując następnie wzór (12.2), w którym w $\sigma_{\max} = \sigma_l$, mamy $\sigma_{sr} = 1850$ kG/cm², a niszczący wydatek n_l

$$n_l = (\sigma_l A_p / b) + \sigma_{sr} \delta \approx 390 \text{ kG/cm}.$$

Interesującym jest przeprowadzenie dodatkowego porównania tej wartości z wartością odpowiadającą giętnej postaci zniszczenia. Zostawiając przeprowadzenie szczegółowych rachunków** według poprzedniego artykułu czytelnikowi, podajemy tu wynik, a mianowicie zniszczenie giętne zachodzi przy $\sigma_w \approx 22$ kG/mm², a więc prawie przy tej samej wartości co i zniszczenie lokalne. *Tak dobraną konstrukcję, w której wszystkie postaci zniszczenia zachodzą przy mniej więcej tej samej wartości naprężeń, należy uważać za prawidłową, gdyż jest ona ekonomiczna pod względem ciężarowym.*

12.6. Giętno-skrętne zniszczenie płyt i powłok żebrowanych

Kontynuując analizę zniszczenia II rodzaju dla żebrowanych płyt i powłok ($b^2/R\delta < 15$) (patrz art. 12.2), musimy w przypadku profili o niesymetrycznym przekroju (np. zetowniki) rozważyć możliwość wyboczenia giętno-skrętnego prętów zastępczych (rys. 12.9a). Traktując profil jako pręt, na który oddziałuje wyboczone uprzednio pokrycie, transponujemy wszystkie rozważania art. 10.7. Wielkość naprężeń σ_{ws} odpowiadającą tej postaci zniszczenia określimy jako mniejszy pierwiastek równania (10.46), które po podzieleniu przez A_p^2 przyjmuje postać

$$\sigma_{ws}^2(r_N^2 - \Delta\eta^2) - \sigma_{ws}[(\sigma_w + \sigma_s)r_N^2 + 2h_{SP}\Delta\eta\sigma_{\eta\zeta}] + (\sigma_w\sigma_s r_N^2 - \sigma_{\eta\zeta}h_{SP}^2) = 0, \quad (12.28)$$

gdzie poza oznaczeniami h_{SP} i $\Delta\eta$ (patrz rys. 12.17), wprowadzono:

σ_w — naprężenie giętnego wyboczenia pręta zastępczego w płaszczyźnie prostopadłej do pokrycia, określone wzorem (12.15) według wskazówek art. 12.4;

σ_s — naprężenie skrętnego wyboczenia określone wzorem (12.23) według wskazówek art. 12.5;

$\sigma_{\eta\zeta} = \pi^2 E J_{\eta\zeta} / A_p L^2$ — przekształcony wzór (10.45c) w którym $J_{\eta\zeta}$ — moment odśrodkowy samego tylko profilu względem osi centralnych η, ζ ;

r_N — biegunowy promień bezwładności przekroju samego tylko profilu względem punktu N przecięcia osi ζ_1 z linią środkową pokrycia (rys. 12.17);

$L = a/n$ — długość półfali giętno-skrętnego wyboczenia równa lub mniejsza od rozstawu a żeber poprzecznych (n — liczba naturalna).

Postępując podobnie jak w art. 10.7, wartości pomocnicze $\sigma_w, \sigma_s, \sigma_{\eta\zeta}$ wyznaczamy obierając szereg wartości L , które niekoniecznie muszą spełniać warunek $nL = a$. Obliczenie σ_w wymaga przy tym powtórzenia dla każdego obranego L wykreślonej konstrukcji podanej na rys. 12.12. Co się tyczy obliczenia σ_s , to w przypadku symetrycznego wyboczenia jest ona funkcją nieznanego σ_{ws} na skutek zależności (12.25c). Trudność tę omijamy zakładając pewną stałą wartość $K_{\phi b}$ dla ocenionej na oko wartości σ_{ws} . Obliczenie pozostałych wartości wyjściowych nie nasuwa specjalnych trudności***.

* W rzeczywistości σ_{kr} jest nieco wyższe z uwagi na sprężyste zamocowanie wzdłużnych krawędzi paska pokrycia. Zauważając, iż sens fizyczny współczynnika κ według wzoru (11.28) jest w obecnych oznaczeniach $\kappa = C/bD = 1,33$, otrzymujemy z wykresu (rys. 11.26) $\xi = 4,4$, a więc $\sigma_{kr} \approx 18$ kG/mm².

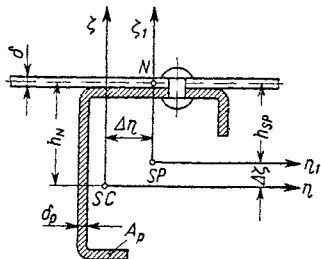
** Przy obliczaniu według (12.19b) zależność E_t od σ można brać według rys. 10.29a.

*** W niektórych pracach zalecana jest analiza wyboczenia skrętnego jak i giętno-skrętnego dla pręta zastępczego (rys. 12.9), z uwzględnieniem współpracującego paska pokrycia. Pomijając merytoryczne zastrzeżenia, przemawiające przeciwko przyjęciu tego zalecenia, należy stwierdzić, że pociąga ono za sobą ogromne komplikacje rachunkowe, zmuszając do stosowania metody kolejnych przybliżeń. Okazuje się ponadto, że różnice w wynikach tej metody i metody podanej w tej książce są praktycznie bez znaczenia.

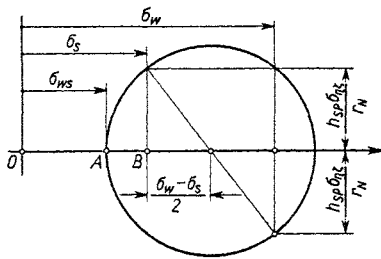
W przypadku profili zetowych SC i SP pokrywają się ze sobą, $\Delta\eta = 0$, i wtedy wzór ostateczny dla σ_{ws} jest

$$\sigma_{ws} = \frac{\sigma_w + \sigma_s}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_w - \sigma_s}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_{SP}}{r_N} \sigma_{\eta\zeta}\right)^2}. \quad (12.29)$$

Wynik (12.29) można otrzymać wykreślić jako odcietą punktu A (rys. 12.18) konstrukcji podobnej do koła Mohra. Konstrukcja ta dobitnie wykazuje, że σ_{ws} jest zawsze mniejsze zarówno od σ_w jak i σ_s .



Rys. 12.17. Oznaczenia w profilu otwartym



Rys. 12.18. Wykreślnie wyznaczenie σ_{ws} w przypadku $\Delta\eta = 0$ (rys. 12.17)

Ponadto widać, że przy stałej wartości $(h_{SP}\sigma_{\eta\zeta}/r_N)$ odcinek AB , przedstawiający obniżenie σ_{ws} w stosunku do mniejszej wielkości (np. σ_s) jest największy, gdy $\sigma_w = \sigma_s$. W tym szczególnym przypadku

$$\sigma_{ws} = \sigma_w - (\sigma_{\eta\zeta} h_{SP}/r_N). \quad (12.30)$$

Wyznaczywszy przebieg σ_{ws} w funkcji A , otrzymujemy wykres podobny do podanego na rys. 10.23, a następnie dobieramy taką wartość A , aby spełniając warunek $\alpha = A/n$ otrzymać najmniejszą wartość σ_{ws} .

W nowoczesnych, silnie obciążonych konstrukcjach wartość σ_{ws} może przekraczać granicę sprężystości materiału i wtedy prawidłowe wyznaczenie σ_{ws} jest żmudne. Z tego powodu stosujemy metodę uproszczoną, obliczając najpierw σ_w , σ_s , $\sigma_{\eta\zeta}$ jak również σ_{ws} przy założeniu idealnej sprężystości materiału. Tak otrzymaną wartość σ_{ws} redukujemy w stosunku E_t/E , korzystając najczęściej z wykresu (rys. 11.14), w którym $(\tau_{kr spr}/\sqrt{3})$ i $(\tau_{kr}/\sqrt{3})$ zastępujemy odpowiednio przez $(\sigma_{ws spr})$ i σ_{ws} . Ta ostatnia przedstawia rzeczywistą wartość naprężenia przy giętno-skrętnej postaci zniszczenia.

Wartość siły N_{ws} , niszczącej zastępczy profil, określamy ze wzoru

$$N_{ws} = \sigma_{ws}(A + b_w \delta), \quad (12.31)$$

gdzie b_w – współpracująca szerokość pokrycia, odpowiadająca $\sigma_{max} = \sigma_{ws}$.

Przykład 1. Wyznaczyć wielkość naprężenia σ_{ws} niszczącego przy wyoboczeniu giętno-skrętnym konstrukcję duralową (rys. 12.19) rozpatrywaną poprzednio w art. 12.3 i 12.4.

R o z w i ą z a n i e. Analizę zagadnienia rozpoczniemy od ustalenia, że wyoboczenie giętno-skrętne rozważanej konstrukcji będzie miało postać symetryczną (rys. 11.24d). Do powyższego stwierdzenia uprawnia nas fakt, że spodziewana wartość σ_{ws} , będąc na pewno niższa od $\sigma_w = 24,0 \text{ kG/mm}^2$ (art. 12.4), przekraczać będzie tylko ~ 2 razy $\sigma_{kr} = 11,0 \text{ kG/mm}^2$ dla paska pokrycia, a zatem $(K\phi\delta)_S < (K\phi\delta)_A$ (patrz art. 12.6).

Ustaliwszy w ten sposób postać zniszczenia, obliczamy wartość pomocniczą σ_s według wzoru (12.23). Wyznaczając najpierw sztywność $K\phi$ utwierdzenia profilu, zakładamy dla obliczenia $K\phi\delta$ (12.25c) $(\sigma_{ws})_{sr} = 1,5 \sigma_{kr} = 16,5 \text{ kG/mm}^2$. Podstawiając następnie do wzorów (12.25c), (12.26), (12.27) wartości z rys. 12.19, mamy

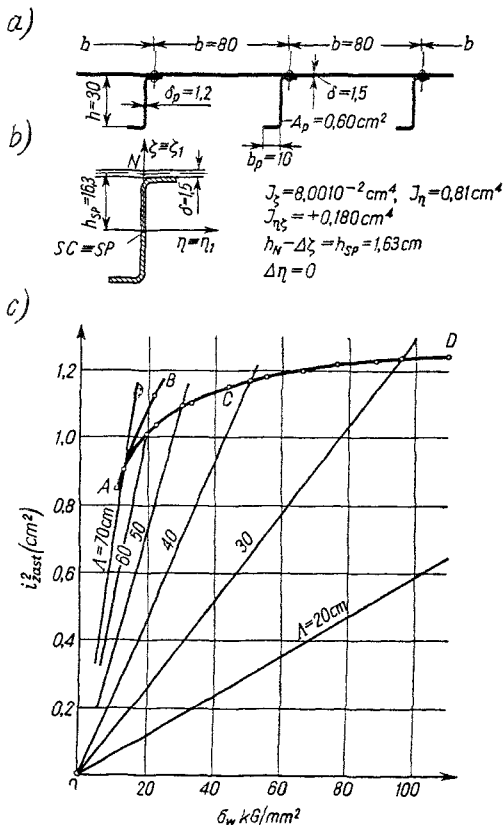
$$K\phi\delta = 128 \frac{\text{kGcm}}{\text{cm rad}}, \quad K\phi_n = 525 \frac{\text{kGcm}}{\text{cm rad}}, \quad K\phi_p = 69,1 \frac{\text{kGcm}}{\text{cm rad}}.$$

przy czym założono, że profil z pokryciem połączony jest nitami o średnicy $d = 3$ mm, rozstawionymi co $t = 2$ cm, a odstęp $e = 6$ mm (rys. 12.15). Wykorzystując wzór (12.24), mamy w wyniku $K\phi = 41,3$ kGem/cm rad. Obliczając ponadto C_{sN} i C (patrz wzór 10.44b, tabl. 6.2 i 6.4) jako

$$C_{sN} = C_s + EJ_{\xi} (h_N - \Delta\zeta)^2 = 2,37 \cdot 10^8 \text{ kGem}^4, \quad C = 775 \text{ kGem}^2, \quad J_N = 2,48 \text{ cm}^4$$

mamy po przeprowadzeniu rachunków

$$\sigma_s = (9,46 \cdot 10^8 / A^2) + 312 + 1,685 A^2 \text{ (kG/cm}^2 \text{, gdy } A \text{ w cm)}.$$



Rys. 12.19. Analiza wyoboczenia giętno-skrętnego konstrukcji skorupowej

a), b) dane geometryczne; c) określenie σ_w ; linia $AB - i^2_{zast}$ z wzoru (12.19a) przy stosowaniu wzorów (12.2) i $\chi = \text{const} = 0,41$, linia $ACD - i^2_{zast}$ z tegoż wzoru przy stosowaniu wzorów (12.8) i (12.9).

Drugą wielkość pomocniczą, tj. $(h_{SP} \sigma_{\eta\zeta} / r_N)$ wyznaczamy, biorąc

$$h_{SP} = 1,63 \text{ cm}, \quad r_N = \sqrt{J_N / A_p} = 2,03 \text{ cm}, \quad J_{\eta\zeta} = 0,180 \text{ cm}^4$$

i w wyniku:

$$h_{SP} \sigma_{\eta\zeta} / r_N = 1,662 \cdot 10^6 / A^2 \text{ (kG/cm}^2 \text{, gdy } A \text{ w cm)}.$$

Wreszcie ostatnią wielkość pomocniczą, tj. σ_w , określimy według metody podanej w art. 12.4, zakładając idealną sprężystość materiału, na skutek czego linie przedstawiające zależność (12.19b) będą liniami prostymi (rys. 12.12). Co się tyczy wielkości i^2_{zast} określonej wzorem (12.19a), to dla małych

wartości $\sigma_w (\sigma_w < 2\sigma_{kr} = 22,0 \text{ kG/mm}^2)$ będzie miała ona przebieg podany na rys. 12.14, natomiast przy wyższych σ_w należy ją obliczyć, stosując zależności (12.8) i (12.9). Wynik obliczeń podaje rys. 12.19c, a punkty przecięcia rodziny prostych dla kolejnych wartości Δ mają następujące odcięte:

$\Delta \text{ cm}$	10	20	30	40	50	60	70
$\sigma_w \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2}$	864	216	96,2	50,5	30,5	19,2	13,0

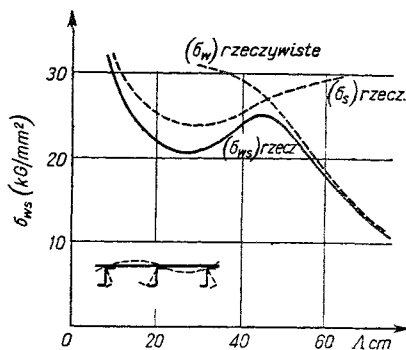
Podstawiając te same wartości Δ w wyrażeniach dla σ_s i $(h_{sp} \sigma_{\eta} / r_N)$, mamy:

$\Delta \text{ cm}$	10	20	30	40	50	60	70
$\sigma_s \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2}$	99,4	33,5	28,8	34,9	49,0	66,4	87,5
$\frac{h_{sp} \sigma_{\eta}}{r_N} \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2}$	166,2	41,6	18,5	10,4	6,6	4,6	3,4

a po przeliczeniu według wzoru (12.29):

$\Delta \text{ cm}$	10	20	30	40	50	60	70
$\sigma_{ws} \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2}$	65,0	24,5	24,0	29,7	28,4	18,6	12,8

Wartości powyższe, odpowiadające materiałowi idealnie sprężystemu, przekraczają granicę sprężystości istniejącego materiału. Fakt ten uwzględniamy redukując powyższe $(\sigma_{ws})_{spr}$ według rys. 11.14. W wyniku otrzymujemy wartości podane na wykresie (rys. 12.20), na którym dla porównania naniesio-



Rys. 12.20. Rzeczywiste naprężenie przy giętno-skrętnym zniszczeniu konstrukcji z rys. 12.19

σ_w — niszczące naprężenia giętne, σ_s — niszczące naprężenia skrętne.

no również zredukowane w stosunku E_t/E naprężenia σ_w i σ_s . Jak widać, giętno-skrętna postać zniszczenia jest bardziej prawdopodobna niż giętna postać zniszczenia konstrukcji. W porównaniu z pierwszym rodzajem zniszczenia, omawianym w art. 12.3, jest ona również bardziej prawdopodobna, gdyż przy długości

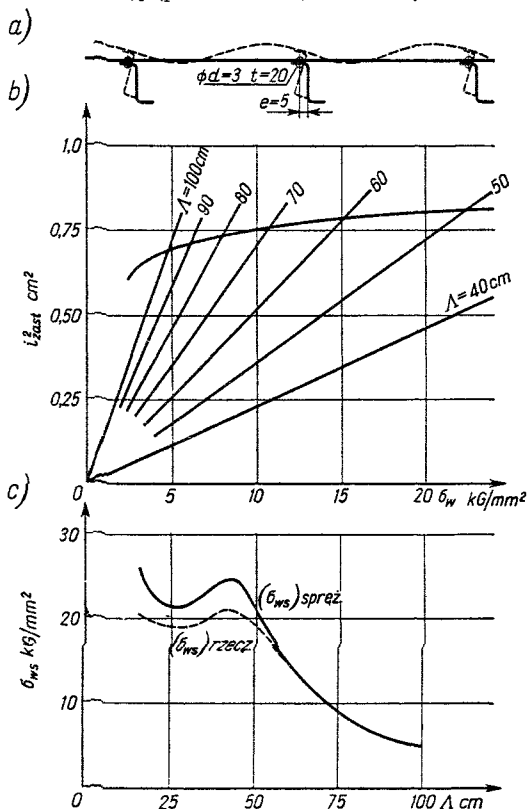
$$\Delta = a/2 = 25 \text{ cm} \quad (\sigma_{ws})_{rzecz} < \sigma_t.$$

Przykład 2. Sprawdzić słuszność wyników przybliżonej analizy* stateczności cienkościennej konstrukcji, podanej w art. 10.7 (rys. 10.23).

Rozwiązanie. Określając z rys. 11.25 wartość współczynnika $\xi = 5,97$ dla podanych wymiarów przekroju (rys. 10.23a), wyznaczamy σ_{kr} paska pokrycia jako:

$$\sigma_{kr \text{ pokrycia}} \approx 5,97 \frac{\pi^2}{12(1-0,3^2)} \cdot 7 \cdot 10^3 \left(\frac{0,8}{100} \right)^2 \approx 2,4 \text{ kG/mm}^2,$$

a więc wartość znacznie niższą niż $\sigma_{kr} = \sigma_{ws}$ dla profilu. Licząc się z tym, że σ_{ws} będzie rzędu 15 kG/mm i uwzględniając uwagi odnośnie $K_{\phi b}$ (patrz art. 12.5) dochodzimy do wniosku, że w rzeczywistości



Rys. 12.21. Dokładniejsza analiza konstrukcji z rys. 10.23

wyoboczenie giętno-skrętne będzie miało postać antysymetryczną (rys. 12.21a). Korzystając więc z odpowiednich wzorów art. poprzedniego, mamy przy założeniu połączenia nitowego ($\phi d = 3 \text{ mm}$, $t = 2 \text{ cm}$, $e = 5 \text{ mm}$) (wymiar e patrz rys. 12.15) następujące sztywności K_{ϕ} (w kGcm/cm radian)

$$K_{\phi b} = 36, \quad K_{\phi n} = 785, \quad K_{\phi p} = 49,8,$$

* Przeprowadzona w art. 10.7 analiza nie uwzględniała trzech czynników, które mogą mieć pewien wpływ na wielkość $\sigma_{kr} = \sigma_{ws}$, a mianowicie: możliwości różnych form wyoboczenia, dokładniejszego określenia sztywności K_{ϕ} oraz faktu, że w chwili wyoboczenia profilu współpracujące pokrycie utraciło stateczność.

skąd według wzoru (12.24): $K_{\Phi} = 20,3 \text{ kGcm/cm rad}$. Ta zmiana pociąga za sobą obliczoną w art. 10.7 wartość σ_s , która obecnie jest

$$\sigma_s = (1,010 \cdot 10^8 / A^2) + 307 + 1,560 A^2 \quad (\text{kG/cm}^2, \text{ gdy } A \text{ w cm}).$$

Podobnie uwzględniając, że $h_{SP} = h_N = 1,34 \text{ cm}$, $r_N = 1,71 \text{ cm}$, mamy drugą wartość pomocniczą ($h_{SP} \sigma_{\eta_s} / r_N$) równą

$$h_{SP} \sigma_{\eta_s} / r_N = (1,505 \cdot 10^8 / A^2) \quad (\text{kG/cm}^2, \text{ gdy } A \text{ w cm}).$$

Przechodząc do określenia wartości wyjściowej σ_w , musimy z uwagi na znaczne przekroczenie σ_{KRP} pokrycia, posługiwać się wzorami (12.8) i (12.9). Powtórzenie wykreślnej metody z art. 12.4, daje w wyniku (rys. 12.21b) poniższe wartości* σ_w :

$A \text{ cm}$	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\sigma_w \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2}$	141,8	62,9	35,4	22,4	15,1	10,7	7,9	6,1	4,8

Powtarzając procedurę poprzedniego przykładu, dla szeregu wartości A wyznaczamy kolejno: σ_s , ($h_{SP} \sigma_{\eta_s} / r_N$), a następnie stosując wzór (12.29) otrzymujemy w wyniku przebieg σ_{ws} , zaznaczony linią ciągłą na rys. 12.21c. Uwzględnienie odchyżeń od idealnej sprężystości, pociągające za sobą redukcję według rys. 11.14, daje przy $Q_{0,2} = 28 \text{ kG/mm}^2$ przebieg (σ_{ws})*rzecz* narysowany linią przerywaną. Ponieważ w przykładzie art. 10.7 założono rozstaw żebrow $l = a = 60 \text{ cm}$, to z ostatniego wykresu wynika, iż wyboczenie pręta zastępczego będzie miało charakter wybitnie giętny i będzie zachodzić przy $\sigma_{ws} \approx 14,8 \text{ kG/mm}^2$. Siła niszcząca pręt zastępczy wynosi

$$P_{\text{niszcz}} = \sigma_{\max} A_p + \sigma_{sr} b \delta \approx 1230 \text{ kG},$$

przy czym $\sigma_{\max} = \sigma_{ws}$, a σ_{sr} obliczone według wzoru (12.8) jest $\sigma_{sr} = 0,48 \sigma_{\max}$. Porównując obydwa wyniki (rys. 10.23, 12.21c), widać duże podobieństwo charakteru obydwu wykresów, niemniej widać też istotne różnice. W przedziale dużych A ($A > 50 \text{ cm}$) wyraźnie zaznacza się redukcja σ_{ws} , na skutek uprzedniego wyboczenia pokrycia. W przedziale średnich A różnica ta pozornie znika, należy jednakże wziąć pod uwagę, że obliczenie pierwsze przeprowadzono przy zaniżonej wartości K_{Φ} . Gdyby w obliczeniach art. 10.7 uwzględnić tę okoliczność, to różnica pojawiłaby się znowu w bardzo jaskrawej formie.

Obliczenia powyższe przeprowadzono zakładając milcząco, iż przebieg zniszczenia konstrukcji jest II rodzaju (patrz art. 12.2). Nie należy jednak zapominać, iż poza tym istnieje możliwość zniszczenia lokalnego, omówionego w art. 12.3. Obliczając σ_l według wzoru (12.11), otrzymujemy $\sigma_l = 12,1 \text{ kG/mm}^2$, a więc niższą od otrzymanej poprzednio. W wyniku zatem siła niszcząca pręt zastępczy przy wstawieniu do (12.8) $\sigma_{\max} = \sigma_l$ i wykonaniu rachunków jest $P_{\text{niszcz}} = 1050 \text{ kG}$, a nie 1230 kG jak określono poprzednio.

12.7. Inne postacie zniszczenia konstrukcji żebrowanych

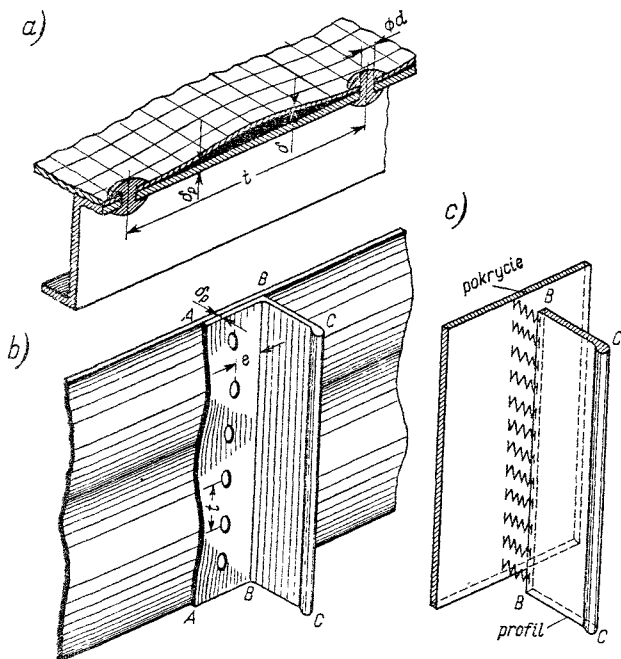
Poza rozpatrzonymi w art. 12.2 ÷ 12.6 postaciami zniszczenia konstrukcji w praktyce należy liczyć się z możliwością przedwczesnego zniszczenia konstrukcji z innych powodów, a mianowicie na skutek:

- wyboczenia pokrycia między nitami,
- zmarszczenia pokrycia,

* Wartości σ_w dla $A < 50 \text{ cm}$ obliczono ze wzoru $\sigma_w = \pi^2 E \tau_{\text{zast}}^2 / A^2$, zakładając $\tau_{\text{zast}}^2 = \text{const} = 0,83 \text{ cm}^2$, $E = \text{const} = 7 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.

c) niedostatecznej sztywności żeber poprzecznych.

a. *Wyboczenie pokrycia między nitami.* W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy milcząco, iż profile usztywniające na całej swej długości połączone są z pokryciem na pewnej linii bądź na całej powierzchni półki profilu przylegającej do pokrycia. Ściśle biorąc założenie to jest spełnione tylko w nielicznych rozwiązaniach jak: konstrukcje integralne (rys. 12.16), konstrukcje zgrzewane w sposób ciągły lub wreszcie konstrukcje klejone. W rozwiązaniach typowych, gdy połączenie stanowią nity lub punktowe zgrzeiny, połączenie jest nieciągłe i przy dużej podziale nitów lub zgrzein zachodzi niebezpieczeństwo wyboczenia pokrycia między nitami (rys. 12.22a). Liczbowo zjawisko to ujmujemy trak-



Rys. 12.22. Zjawisko wyboczenia pokrycia między nitami (rys. a) i zmarszczenia pokrycia (rys. b)

c) zastępuje schemat statyczny do zjawiska zmarszczenia.

tując pasek pokrycia o jednostkowej szerokości jako pręt o długości t , grubości δ zamocowany sprężysto na swoich końcach. W takim ujęciu naprężenie krytyczne σ_n jest

$$\sigma_n \delta = \xi \frac{\pi^2 E_t}{t^2} \frac{\delta^3}{12},$$

przy czym, jak pokazują doświadczenia, $\xi = 3$. Podstawiając tę wartość mamy przy założeniu idealnej sprężystości materiału

$$(\sigma_n)_{spr} \approx 2,5E(\delta/t)^2. \quad (12.32)$$

Jeśli obliczone z (12.32) $(\sigma_n)_{\text{spr}}$ przekracza granicę sprężystości σ_{spr} , rzeczywistą wartość σ_n otrzymujemy (patrz art. 10.9) jako $(\sigma_n)_{\text{spr}} (E_t/E)$. W przybliżeniu można się przy tym posługiwać wykresem (rys. 11.14), wstawiając zamiast $(\tau_{kr})_{\text{spr}} \sqrt{3}$ i $(\tau_{kr}) \sqrt{3}$ odpowiednio $(\sigma_n)_{\text{spr}}$ i σ_n .

Ponieważ wyboczenie pokrycia między nitami pociąga za sobą z reguły bezpośrednie zniszczenie konstrukcji, podziałkę nitów t należy tak dobrać, aby σ_n było wyższe niż naprężenie w profilu σ_t , σ_w , σ_s lub σ_{ws} odpowiadające zniszczeniu konstrukcji według postaci rozpatrywanych w art. 12.3 ÷ 12.6. Jeśli na przykład w pewnej konstrukcji duralowej najniższym naprężeniem z wszystkich wariantów zniszczenia jest $\sigma_{ws} = 25 \text{ kG/mm}^2$, a materiał konstrukcji ma $Q_{0,2} = 30 \text{ kG/mm}^2$ i $R_r = 46 \text{ kG/mm}^2$, to żądając, aby $\sigma_n \approx \sigma_{ws}$ otrzymujemy z rys. 11.14: $(\sigma_n)_{\text{spr}} = 1,15 Q_{0,2} = 34,5 \text{ kG/mm}^2$, skąd przy $E = 7 \cdot 10^3 \text{ kG/mm}^2$ mamy z wzoru (12.19) $(t/\delta) \approx 22,5$, jako graniczną wartość, której nie można przekroczyć.

b. *Zmarszczenie pokrycia.* Opisane powyżej zjawisko wyboczenia pokrycia między nitami zachodzić może w przypadku, gdy stosunkowo cienkie pokrycie połączone jest z solidnymi profilami ($\delta \ll \delta_p$). W konstrukcjach nowoczesnych bardzo często jest $\delta > \delta_p$ i wtedy może pojawić się nowa postać wyboczenia, tzw. zmarszczenie pokrycia. Polega ona na falowaniu się pokrycia w jedną lub w szereg równoległych fal przechodzących w niezmiennionej formie w poprzek kilku lub wszystkich profili usztywniających (rys. 12.22b). Ścianki profili przy tym zostają prawie nieodkształcone, a wyraźnej deformacji ulegają jedynie półki profili, przylegające do pokrycia. Długość półfali zmarszczenia jest zazwyczaj rzędu wysokości profilu i może obejmować kilka podziałek nitów. W odróżnieniu zatem od dotychczas rozważanych form wyboczenia pokrycia (rys. 11.3c), zmarszczenie różni się kształtem powierzchni ugięcia, a od wyboczenia pokrycia między nitami różni się tym, że pokrycie nie odrywa się od przylegającej doń półki profilu. Wreszcie od wszystkich omawianych dotychczas form zniszczenia różni się tym, że przekrój poprzeczny profilu nie ulega żadnym przemieszczeniom, a deformacja występuje wyraźnie tylko w półce profilu.

Bezpośrednimi przyczynami zmarszczenia się pokrycia są: ograniczona sztywność półki, przylegającej do pokrycia oraz istnienie odstępu e , niezbędnego do zanitowania nitów. Obydwie te przyczyny działają tak, jak gdyby między ścianką BC profilu a pokrycie wstawiono sprężynujące elementy (rys. 12.22c). Przypomina to przypadek pręta na sprężystym podłożu (rys. 10.11), przy czym rolę cienkiego, szerokiego pręta odgrywa samo pokrycie, rolę wzdłużnego podłoża — ścianki BC profili. Sztywność K zastępczych elementów sprężynujących, łączących pręt z wzdłużną podporą, maleje wraz ze wzrostem odstępu e i podziałki nitowania t , natomiast rośnie wraz ze wzrostem δ_p . Ponieważ wzrost K pociąga za sobą wzrost naprężeń σ_m odpowiadających marszczeniu się pokrycia, to jasnym staje się zalecenie konstrukcyjne zmniejszenia o ile możliwości e i t , a powiększenie grubości δ_p .

Na zakończenie opisu fizycznej strony zjawiska należy podkreślić, że marszczenie się pokrycia jest zjawiskiem narastającym stopniowo i nie powodującym bezpośredniego zniszczenia konstrukcji w momencie pojawienia się pierwszych zauważalnych zmarszczek. Niemniej obecność zmarszczek pociąga za sobą szybsze narastanie innych rodzajów, np.

giętno-skretnych odkształceń profili usztywniających, powodując przez to redukcję obliczonych poprzednio obciążeń niszczących (art. 12.3 ÷ 12.6).

Wpływ ten uwidacznia się jaskrawo w przypadku krótkich płyt, których zniszczenie ma postać lokalną (art. 12.3). Ilościowo ujmujemy go zmniejszając średni wydatek n_l (12.14) do wartości $(n_l)_{\text{efekt}}$

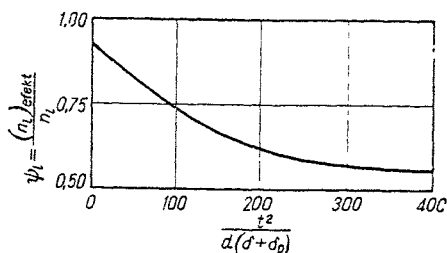
$$(n_l)_{\text{efekt}} = n_l \psi_l, \quad (12.33)$$

gdzie, określony z badań doświadczalnych, współczynnik $\psi_l < 1$ podany jest na rys. 12.23 w funkcji bezwymiarowego parametru

$$[t^2/(\delta + \delta_p)d],$$

przy czym d — średnica nita.

W przypadku żebrowanych płyt średniej długości, dla których zniszczenie ma postać nałożenia się wyboczenia giętno-skretnego i lokalnego (art. 12.6), wpływ marszczenia się



Rys. 12.23. Wpływ parametrów połączenia nitowego na wartość średniego wydatku przy lokalnym zniszczeniu konstrukcji (art. 12.3)

pokrycia jest znacznie mniejszy i na ogół w obliczeniach nie bywa uwzględniany. W przypadku długich płyt żebrowanych ulegających zniszczeniu w postaci giętnej (art. 12.4), wzmocnienie połączenia, przez zwiększenie d nita, może czasami zamiast spodziewanego wzrostu σ_w spowodować jego spadek na skutek większych wstępnych nierówności pokrycia, towarzyszących nitom o większej średnicy. Ten sam skutek może mieć wzmocnienie połączenia przez zmniejszenie podziałki nitowania na skutek osłabienia konstrukcji większą liczbą otworów.

c. *Wpływ sztywności żebier poprzecznych.* W konstrukcjach cienkościennych, w których żebra poprzeczne mają postać płaskich ścian, sztywność tych żebier w ich płaszczyźnie jest tak duża, że kształt przekroju poprzecznego jest zawsze zachowany, a zniszczenie może nastąpić tylko przez wyboczenie usztywniających profili na odcinku między żebrawami*.

Inaczej jednak przedstawia się sytuacja, gdy żebra są wykonane jako płaskie jedno-obwodowe ramy, a konstrukcja jako całość podlega zginaniu. W takim przypadku na skutek obciążeń wtórnych zniszczenie może mieć postać według rys. 11.1b, jeśli tylko sztywność EJ_z wręgi będzie niedostateczna. Zagadnienie określenia granicznej wartości EJ_z , powyżej której taka forma zniszczenia (tzw. ogólna utrata stateczności) może mieć miejsce, zostało rozwiązane, jak dotychczas, tylko dla konstrukcji cylindrycznej o przekroju kołowym z równomiernie rozstawionymi na obwodzie profilami. Wprowadzając mianowicie współczynnik ψ

$$\psi = \frac{EJ_z}{E_l J_{\text{zast}}} \left(\frac{l}{R} \right)^3 \left(\frac{b}{R} \right), \quad (12.34)$$

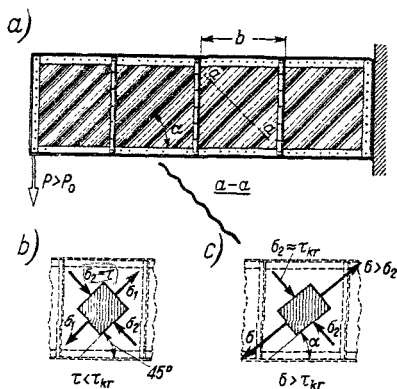
* Dotyczy to również przypadku, gdy żebra mają duże otwory ulgowe.

mamy* zależnie od wartości tego współczynnika różne przypadki zniszczenia. Jeśli mianowicie $\psi < 0,013$, to sztywność wręg jest niedostateczna i zniszczenie ma postać ogólnej utraty stateczności (rys. 11.1b). Przyjmując $\psi > 0,06$ otrzymujemy wręgi na tyle sztywne, iż zniszczenie konstrukcji następuje w postaci wyboczenia prętów zastępczych według schematu opisanego w art. 12.3 ÷ 12.6. Wreszcie gdy $0,013 < \psi < 0,06$, obydwie postacie są równouprawnione. Ponieważ przyjęcie wyższej wartości ψ (tj. $\psi = 0,06$) oznacza niepotrzebne zwiększenie ciężaru wręg, przyjęcie zaś niższej (tj. $\psi = 0,013$) jest równoznaczne z niecałkowitym wykorzystaniem pokrycia i profili wzdlużnych, w praktyce konstrukcyjnej przyjmuje się jako optymalną — wartość pośrednią $\psi = 0,035$.

12.8. Praca ścinanej płyty po utracie stateczności

W przeprowadzonej dotychczas analizie pracy po utracie stateczności zajmowaliśmy się głównie działaniem naprężeń ściskających, działanie natomiast naprężeń stycznych jako czynnika dodatkowego uwzględniliśmy, modyfikując wielkość b_w (rys. 12.6). W praktyce istnieją jednak elementy, jak np. ścianki dźwigara, w których dominującą rolę odgrywają naprężenia styczne, podczas gdy naprężenia normalne są czynnikiem dodatkowym. Upraszczając zatem zagadnienie, rozważmy klasyczną konstrukcję półskorupową (rys. 7.2), w której ścianka (pokrycie) przenosi wyłącznie naprężenia styczne, a pasy i rozpórki — naprężenia normalne. Ponadto zakładamy na razie, iż pasy i rozpórki mają dużą własną sztywność na zginanie. Dzięki temu obciążenie konstrukcji siłą P_0 , odpowiadającą momentowi utraty stateczności przez ściankę, nie powoduje natychmiastowego jej zniszczenia i konstrukcja może przenosić działanie obciążeń znacznie wyższych niż P_0 . Jak wykazuje przy tym doświadczenie, przekroczenie obciążenia P_0 powoduje pojawienie się biegnących ukośnie i mniej więcej równoległych do siebie fałd, których liczba rośnie w miarę wzrostu P (rys. 12.24).

Przy takim obciążeniu $P > P_0$ schemat pracy pokrycia ulega zasadniczej zmianie. O ile bowiem przed wybočeniem naprężenia główne σ_1 i σ_2 w pokryciu były sobie równe, tj. $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \tau$ (rys. 12.24b), to po wyboczeniu naprężenia ściskające, pozostając prawie

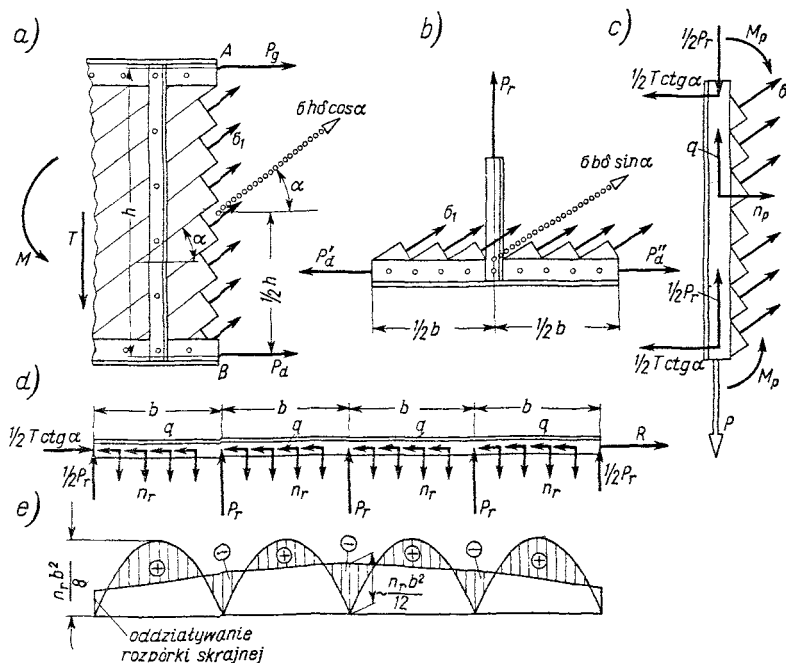


Rys. 12.24. Praca pokrycia po utracie stateczności na ścinanie
 P_0 — obciążenie odpowiadające utracie stateczności pokrycia.

* We wzorze (12.34) oznaczenia są następujące: R — promień krzywizny powłoki, b — rozstaw profili, l — rozstaw wręg. Ponadto $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ — moduł styczny przy wartości niszczących naprężeń σ działających w najbardziej obciążonym profilu; J_{zast} — moment bezwładności zastępczego pręta (rys. 12.9) określony z wzoru (12.18) tak, jak gdyby pokrycie było płaskie.

stałe, powodują pogłębianie się fałd, a wzrost obciążenia powyżej P_0 zrównoważony jest głównie przez wzrost naprężeń rozciągających (rys. 12.24c).

Przechodząc do ilościowego ujęcia opisanych zjawisk, rozważmy najprzód przypadek, gdy $P \gg P_0$ tak, że możemy zaniedbać istnienie naprężeń ściskających σ_2 . W tym stanie nazywanym odtąd *idealnym polem ciągnięć* pokrycie pracuje jak szereg równoległych do siebie prętów, rozciąganych jednakowymi naprężeniami $\sigma = \sigma_1$ i nachylonych do pasów pod kątem* $\alpha \approx 42^\circ$.



Rys. 12.25. Statyka elementów dźwigara przy idealnym polu ciągnięć
 h — odległość między środkami ciężkości przekrojów pasów.

Prowadząc obecnie przekrój poprzeczny (rys. 12.25a), w którym obciążenie zewnętrzne redukuje się do momentu gnącego M i siły tnącej T , piszemy równania równowagi rzutów na oś pionową i momentów względem punktów A i B , z których otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{2\tau}{\sin 2\alpha}, \quad P_d = -\frac{M}{h} - \frac{T}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad P_g = \frac{M}{h} - \frac{T}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (12.35)$$

gdzie $\tau = T/h\delta$ — wartość naprężenia stycznego obliczona tak, jak gdyby ścianka nie traciła stateczności. Jak widać (porównaj wzór 7.3), istnienie idealnego pola ciągnięć powoduje dociążenie pasa ściskanego, a odciążenie rozciąganego siłą $(T/2) \operatorname{ctg} \alpha$. Ponadto

* Podaną wartość należy traktować jako orientacyjną dla typowych konstrukcji, w których pasy są znacznie sztywniejsze od rozpórek. Ścisłejsze rozważania są podane później.

zmieniają się zasadniczo naprężenia w pokryciu i jeśli kąt $\alpha \approx 42^\circ$, to $\sigma \approx 2\tau$, a więc jest dwukrotnie wyższe niż w przypadku, gdy pokrycie nie ulega wyboczeniu.

Rozpórka pośrednia (rys. 12.25b) ściskana jest siłą P_r , której wartość otrzymujemy rozważając równowagę elementu pasa o długości b :

$$P_r = -T \frac{b}{h} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12.36)$$

Rozpórka skrajna, poza oddziaływaniami wzdłużnymi o natężeniu $q = \sigma \delta \sin \alpha \cos \alpha = T/h$, obciążona jest również oddziaływaniami prostopadłymi do jej osi* o natężeniu $n_p = \sigma \delta \cos^2 \alpha$ (rys. 12.25c). W wyniku zatem rozpórka skrajna, niezależnie od wzdłużnych sił ($P_r/2$) i P , jest zginana obciążeniem ciągłym n_p . Maksymalny moment gnący od tego obciążenia jest mniejszy od $n_p h^2/8$ z uwagi na sztywne połączenie z pasami. Chcąc być jednak po stronie bezpiecznej, wartość tę przyjmujemy przy projektowaniu.

Wreszcie rozważając statykę pasa (np. górnego) jako całości, otrzymujemy układ obciążeń (rys. 12.25d) stycznych $q = T/h$, zrównoważonych siłą $(T/2) \operatorname{ctg} \alpha$ i siłą R , oraz obciążeń prostopadłych do osi $n_r = \sigma \delta \sin^2 \alpha$, zrównoważonych oddziaływaniami rozpórek. Traktując pas jako belkę ciągłą, wielkość maksymalnego momentu gnącego, w przypadku liczby przęseł większej od 3, możemy z techniczną dokładnością wyrazić jak dla belki obustronnie zamocowanej, tj.

$$M_{\max} = \frac{1}{12} n_r b^2 = \frac{T b^2 \operatorname{tg} \alpha}{12 h}, \quad (12.37)$$

a przebieg momentów jest taki, jak podaje rys. 12.25e.

Przyjętą dotychczas bez uzasadnienia wartość kąta $\alpha \approx 42^\circ$ możemy wyznaczyć tylko z analizy odkształceń konstrukcji, gdyż wszystkie równania równowagi już zostały wykorzystane. W tym celu rozdzielimy obliczony powyżej układ sił na układ zachowujący ciągłość odkształceń niezależnie** od kąta α (rys. 12.26a) oraz na układ (rys. 12.26b), w którym odkształcenia rozciąganej w kierunku α ścianki muszą pasować do odkształceń rozpórek ściskanych siłami P_r oraz odkształceń pasów, ściskanych siłami $(T/2) \operatorname{ctg} \alpha$. Analizując odkształcenia samej ścianki (rys. 12.26c), widać, że odkształcenia względne ε_p odcinka $BC = \operatorname{cosec} \alpha$ oraz ε_r odcinka $AC = \sec \alpha$ są odpowiednio:

$$\varepsilon_p = \varepsilon \cos^2 \alpha + \varepsilon' \sin^2 \alpha, \quad \varepsilon_r = \varepsilon \sin^2 \alpha + \varepsilon' \cos^2 \alpha. \quad (a)$$

Odształcenia ścianki ε_p i ε_r muszą być równe odpowiednio skróceniom pasa o sztywności $(E_p A_p)$ i rozpórki o sztywności $(E_r A_r)$, tj.

$$\varepsilon_p = - (T/2 E_p A_p) \operatorname{ctg} \alpha, \quad (12.38a)$$

$$\varepsilon_r = - (T b/h E_r A_r) \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.38b)$$

a wydłużenie ε pokrycia w kierunku α jest według (12.35)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_b} = \frac{2\tau}{E_b \sin 2\alpha} = \frac{2T}{E_b h \delta \sin 2\alpha}, \quad (12.38c)$$

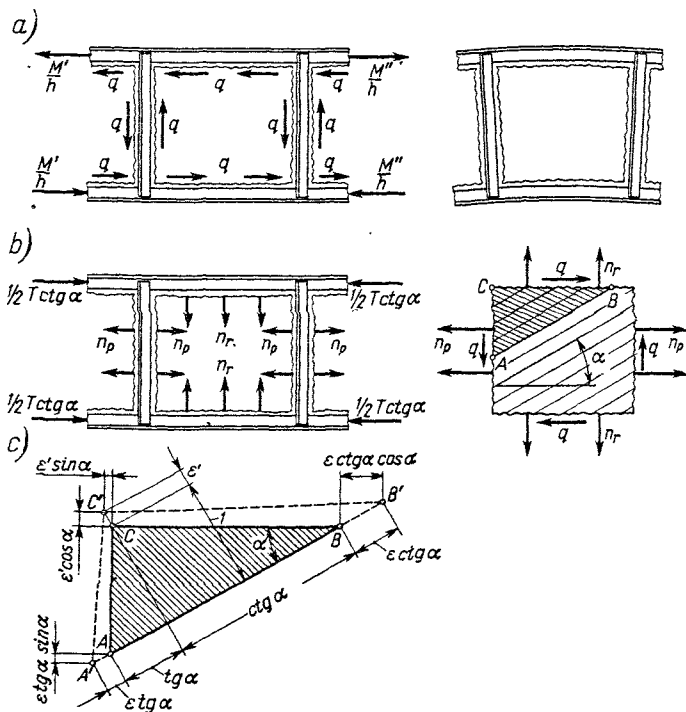
* Biorąc ząbek pokrycia o przeciwprostokątnej równej jednostce, mamy wypadkową siłę równą $\sigma \delta \cdot 1 \cdot \cos \alpha$. Rozkładając tę siłę na q i n_p otrzymujemy natężenia na jednostkę długości, mierzona wzdłuż rozpórki.

** W stanie tym pasy dźwigara ulegają jedynie wydłużeniu lub skróceniu, kąty natomiast między pasami i rozpórkami zostają proste tak, że ścianka może być wpasowana w konstrukcję bez odkształceń postaciowych.

gdzie E_b — moduł Younga dla ścianki. W wyniku mamy więc pięć równań (dwa równania (a) i trzy równania 12.38) z pięcioma niewiadomymi α , ε' , ε , ε_p , ε_r . Po wyrugowaniu z równań (a) wielkości ε' mamy zależność

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{\varepsilon - \varepsilon_r}, \quad (12.38d)$$

z której metodą prób (ε , ε_r , ε_p są funkcjami α) można obliczyć kąt α . Należy pamiętać przy tym, że $\varepsilon_p < 0$, $\varepsilon_r < 0$, wobec czego zarówno licznik jak i mianownik wzoru (12.38d) są sumami dwóch dodatnich



Rys. 12.26. Rozdział układu sił w stanie idealnego pola ciągnięć oraz analiza odkształceń pokrycia. Na rys. c — obydwie odkształcenia pokrycia ε w kierunku ślizgowań i ε' w kierunku prostym są założone jako wydłużenia. W rzeczywistości ε' jest skróceniem. a) I układ obciążeń i odpowiadający mu stan odkształceń; b) II układ obciążeń.

składowików. Zważywszy, że sztywność pasa ($E_p A_p$) jest znacznie większa niż sztywność rozpórki ($E_r A_r$), otrzymujemy zawsze $\operatorname{tg}^2 \alpha < 1$, tj. $\alpha < 45^\circ$. Szczegółowe przeliczenia istniejących konstrukcji dają $38^\circ < \alpha < 45^\circ$.

Interesującym jest również określenie sztywności pokrycia pracującego w stanie idealnego pola ciągnięć. Zważywszy, iż kąt β odkształcenia postaciowego jest równy przyrostowi $\angle ACB$, mamy z rys. 12.26c

$$\beta = \sin \alpha (\varepsilon \operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha - \varepsilon' \cos \alpha) + \cos \alpha (\varepsilon \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha - \varepsilon' \sin \alpha) = (\varepsilon - \varepsilon') \sin 2\alpha,$$

a uwzględniając, że $\varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon_r + \varepsilon_p$, otrzymujemy po wykorzystaniu wzorów (12.38a), (12.38b) i (12.38c)

$$\beta = \frac{\tau}{E_b} \left(4 + \frac{2E_b b \delta}{E_r A_r} \sin^2 \alpha + \frac{E_b h \delta}{E_p A_p} \cos^2 \alpha \right).$$

Wprowadzając na koniec pojęcie zastępczego modułu $G_{zast} = \tau/\beta$, mamy

$$\frac{E_b}{G_{zast}} = 4 + \frac{2E_b b \delta}{E_r A_r} \sin^2 \alpha + \frac{E_b h \delta}{E_p A_p} \cos^2 \alpha. \quad (12.39)$$

Jak widać, zastępczy moduł sprężystości postaciowej w stanie idealnego pola ciągnień jest zawsze mniejszy niż $0,25E_b$, a tylko w konstrukcji o bardzo sztywnych rozpórkach i pasach zbliża się do tej wartości.

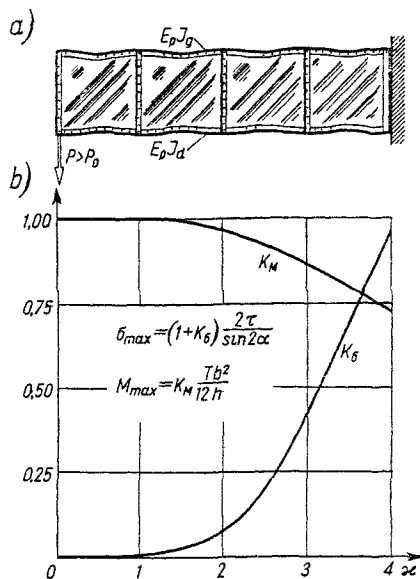
Analiza dotychczasowa była przeprowadzona przy milczącym założeniu, że rozpórki są symetryczne względem pokrycia (rys. 11.20a). W praktyce jednak również często spotykamy rozpórki jednostronne (rys. 11.20b). Ponieważ wypadkowa siła P_r (12.36) działa w płaszczyźnie ścianki, pociąga to za sobą zginanie rozpórki momentem $P_r h_1$. W rezultacie naprężenie we włóknach rozpórki przylegających do pokrycia wynosi

$$\sigma_r = - \left[\frac{P_r}{A_r} + \frac{(P_r h_1) h_1}{J_z} \right] = - \frac{P_r}{A_{re}} \quad (12.40)$$

gdzie A_{re} — efektywny przekrój rozpórki określony wzorem

$$A_{re} = A_r / [1 + (h_1/i_z)^2], \quad (12.41)$$

w którym i_z — promień bezwładności przekroju względem osi z (rys. 11.20b). Ponieważ w takim samym stosunku, jak naprężenia σ_r , rosną również skrócenia ε_r włókien rozpórki przylegających do pokrycia, to we wzorach (12.38b) i (12.39) należy wszędzie wstawić A_{re} zamiast A_r .



Rys. 12.27. Wpływ podatności pasów na maksymalne naprężenia w pokryciu i maksymalne momenty giące w pasach

Stosowalność wyprowadzonych wzorów ograniczona jest spełnieniem podstawowego założenia o dużej sztywności pasów i rozpórek na zginanie. Niespełnienie tego założenia (rys. 12.27) powoduje zmianę rozkładu naprężeń w tym sensie, że ukośne włókna łączące środki przęseł, na jakie dzieli się pas, zostają odciążone, włókna łączące naroża zostają

dociążone przy jednoczesnym zmniejszeniu $M_{\max}$ (wzór 12.37). Ilościowo obydwie te ostatnie fakty ujmujemy korygując wzory (12.35) i (12.37), a mianowicie:

$$\sigma_{\max} = (1 + K_{\sigma}) \frac{2\tau}{\sin 2\alpha}, \quad (12.42)$$

$$M_{\max} = K_M \frac{Tb^2}{12h} \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.43)$$

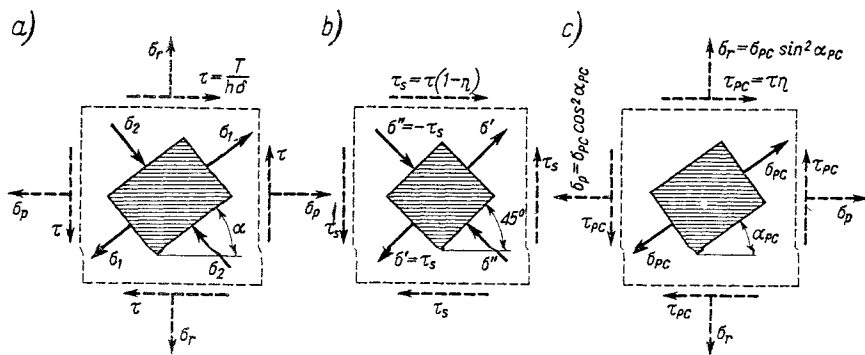
gdzie współczynnik K_{σ} i K_M są funkcjami (rys. 12.27h) bezwymiarowego parametru κ :

$$\kappa = 0,45b \sqrt{\left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d}\right) \frac{\delta}{h}} \quad (12.44)$$

uwzględniającego sztywność na gięcie pasa górnego ($E_p J_g$) i dolnego ($E_p J_d$).

12.9. Niezupełne pole ciągnięć ścinanej płyty

Przedstawiona w artykule poprzednim teoria idealnego pola ciągnięć jest przypadkiem granicznym, który może pojawić się tylko wtedy, gdy ścinana ścianka jest bardzo cienka. W rzeczywistych konstrukcjach przekroczenie obciążenia P_0 nie jest aż tak duże, aby można było zaniedbać istnienie naprężeń σ_2 (rys. 12.24c). Uwzględnienie wpływu tych



Rys. 12.28. Stan naprężeń w pokryciu przy niepełnym polu ciągnięć (NPC)

Stan taki (rys. a) rozkłada się na czyste ścinanie (rys. b) oraz pola ciągnięć (rys. c).

naprężeń, oparte w dużej mierze na bogatym materiale doświadczalnym, ujęte zostało w teorii tzw. *niezupełnego pola ciągnięć* (skrót NPC).

Punktem wyjścia tej teorii są dwa założenia. Pierwsze z nich mówi, że całkowite średnie naprężenie styczne $\tau = T/h\delta$ (rys. 12.28a) jest sumą dwóch składników, z których pierwszy τ_s (rys. 12.28b) przedstawia stan czystego ścinania, podczas gdy drugi τ_{PC} (rys. 12.28c) odpowiada pracy konstrukcji według teorii *pola ciągnięć* (skrót PC). Drugie założenie stwierdza, że w przybliżeniu można przyjąć $\alpha = \alpha_{PC}$, tj. że kierunek głównego naprężenia σ_1 jest identyczny z kierunkiem głównego naprężenia σ_{PC} .

Wprowadzając współczynnik η ($0 \leq \eta \leq 1$), możemy pierwsze założenie ująć w sposób następujący:

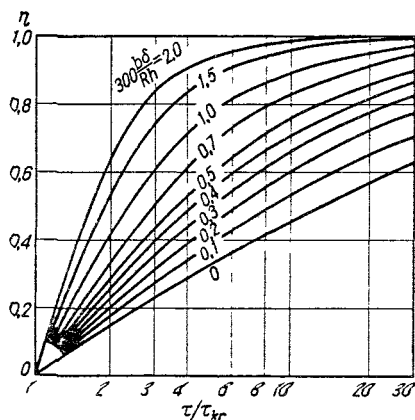
$$\tau_{PC} = \tau\eta, \quad (12.45a)$$

$$\tau_s = \tau(1-\eta), \quad (12.45b)$$

przy czym stan $\eta = 0$ odpowiada pracy konstrukcji przed utratą stateczności, podczas gdy $\eta = 1$ jest stanem *idealnego pola ciągnięć* (skrót *IPC*). Jak wynika z doświadczeń, wartość η zależy od stosunku (τ/τ_{kr}) i wyraża się

$$\eta = \operatorname{tgh}\left(0,5 \log_{10} \frac{\tau}{\tau_{kr}}\right), \quad (12.45c)$$

gdzie τ_{kr} — naprężenie krytyczne pokrycia z uwzględnieniem rzeczywistych warunków podparcia (patrz art. 11.2 punkt c). Przedstawienie wykresne tej zależności (dolna krzywa na rys. 12.29) wykazuje znaczny wpływ naprężeń σ_2 . Tak na przykład dla $\tau/\tau_{kr} \approx 4$



Rys. 12.29. Współczynnik η udziału pola ciągnięć dla płyty ($b\delta/Rh = 0$) i odciinka powłoki ($b\delta/Rh \neq 0$)

tylko 29% obciążenia ($\eta = 0.29$) przeniesione jest pod postacią pola ciągnięć, podczas gdy reszta, tj. 71%, zostaje przeniesiona tak, jak gdyby nie było utraty stateczności.

Założenie drugie, tj. że $\alpha = \alpha_{PC} \approx 42^\circ$, pozwala na podstawie poprzedniego artykułu określić stan napięć w łokryciu odpowiadający stanowi PC:

$$\sigma_{PC} = \frac{2\tau\eta}{\sin 2\alpha}, \quad \sigma_r = \sigma_{PC} \sin^2 \alpha = \tau\eta \operatorname{tg} \alpha, \quad \sigma_p = \tau\eta \operatorname{ctg} \alpha \quad (12.46)$$

oraz całkowity stan będący (rys. 12.28a) superpozycją stanów τ_s i τ_{PC} :

$$\sigma_1 = \frac{2\tau\eta}{\sin 2\alpha} + \tau(1-\eta) \sin 2\alpha, \quad \sigma_2 = -\tau(1-\eta) \sin 2\alpha. \quad (12.47)$$

Aby otrzymać bardziej ścisłą wartość kąta α , zauważmy, że rozważania poprzednie (rys. 12.26_{1,c}) zostają nadal w mocy, gdyż wpływają one z zależności geometrycznych. W wyniku zatem wzór (12.3_{3d})

zachowuje postać niezmienną, a modyfikacji ulegają jedynie wyrażenia dla ε , ε_r , ε_p . Z uwagi na działanie naprężeń σ_2 , odkształcenie ε w kierunku działania σ_1 wyrazi się tym razem jako

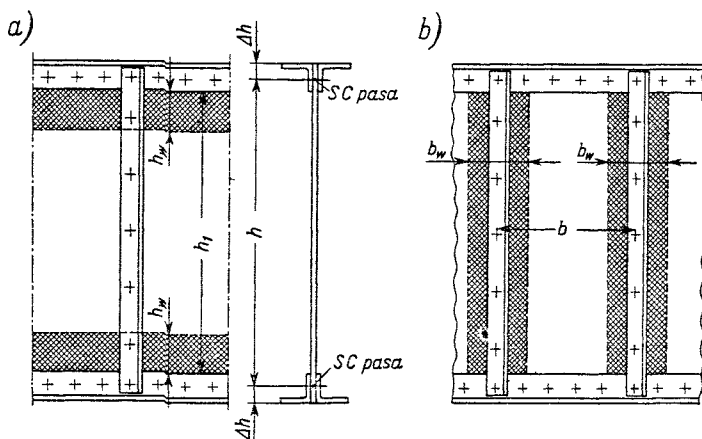
$$\varepsilon = \frac{1}{E_b} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{\tau}{E_b} \left[\frac{2\eta}{\sin 2\alpha} + (1 + \nu)(1 - \eta) \sin 2\alpha \right]. \quad (12.48a)$$

Dla ścianek płaskich $\sin 2\alpha \approx 1$, wobec czego wzór

$$\varepsilon = \frac{\tau}{E_b} [(1 + \eta) + \nu(1 - \eta)] \quad (12.48b)$$

stanowi dostateczne dla potrzeb praktyki przybliżenie.

Przechodząc do określenia pozostałych odkształceń, tj. ε_r i ε_p , należy uwzględnić fakt, że część pokrycia przylegająca do pasów i rozpórek współpracuje w przenoszeniu sił wzdłużnych przez te elementy. Wynika to stąd, że w stanie NPC sfaldowania pokrycia nigdy nie dochodzą do samego pasa



Rys. 12.30. Określenie wymiarów szerokości współpracujących w przypadku niepełnego pola ciągnięć

lub rozpórki, zostawiając pewną część pokrycia płaską. Liczbowo zjawisko to ujmujemy zwiększając pole przekroju pasa o $(h_w + \Delta h)\delta$, a pole przekroju rozpórki o $b_w \delta$ (rys. 12.30). Zakładamy przy tym, że

$$h_w = 0,5(1 - \eta)h, \quad b_w = 0,5(1 - \eta)b, \quad (12.49)$$

jako najprostszą możliwą zależność przy stopniowym przejściu od pracy pokrycia przed utratą stateczności do stanu IPC, w którym te współpracujące paski pokrycia mają zerową szerokość. W rezultacie zastępcze przekroje pasów i rozpórek dwustronnych (rys. 11.2) są odpowiednio*

$$(A_p)_{zast} = A_p + h_w \delta + \Delta h \delta, \quad (12.50)$$

$$(A_r)_{zast} = A_r + b_w \delta. \quad (12.51)$$

Stwierdzając, że w stanie pola ciągnięć obciążenie ścianki stanowi siła $T\eta$ określamy, ε i ε_p

$$\varepsilon_p = -\frac{T\eta \operatorname{ctg} \alpha}{2E_p(A_p)_{zast}}, \quad \varepsilon_r = -\frac{Tb\eta \operatorname{tg} \alpha}{E_r(A_r)_{zast}h}, \quad (12.52)$$

jako odpowiednik wzorów (12.38a) i (12.38b) poprzedniego artykułu. Wartości powyższe łącznie z (12.48) pozwalają wyznaczyć metodą prób wielkość kąta α z wzoru (12.38d).

* Dla rozpórek (rys. 11.20b) należy we wzorze (12.51) wstawić A_{re} (wzór 12.41) zamiast A_r .

Mając η i orientacyjną lub ścisłą wartość α określamy z superpozycji stanu τ , i pola ciągnięć τ_{PC} wszystkie siły wewnętrzne. Dla dźwigara (rys. 12.25) wyniki te są następujące:

$$\left. \begin{matrix} P_g \\ P_d \end{matrix} \right\} = \pm \frac{M}{h} - T\eta \operatorname{ctg} \alpha, \quad P_r = -T\eta \frac{b}{h} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12.53)$$

Podobnie określamy rzeczywiste momenty gnące $M_{\max}$ w pasach

$$M_{\max} = K_M \frac{T\eta b^2 \operatorname{tg} \alpha}{12h} \quad (12.54)$$

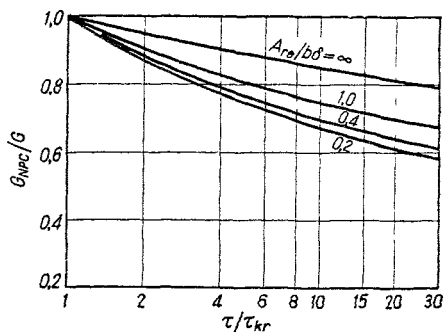
i rzeczywiste* wartości naprężeń: głównego $(\sigma_1)_{\max}$ i stycznego

$$(\sigma_1)_{\max} \approx \tau[1 + \eta(1 + 2K_\sigma)], \quad \tau_{\max} \approx \tau(1 + K_\sigma \eta), \quad (12.55)$$

gdzie, jak poprzednio $\tau = T/h\delta$.

Przeprowadzona dotychczas analiza dotyczyła konstrukcji płaskiej o pasach równoległych. W przypadku konstrukcji o pasach łagodnie zbieżnych analizę przeprowadzamy jak dla konstrukcji o pasach równoległych, wstawiając zamiast siły T wartość zredukowaną $T - (\gamma M_g/h_x)$ (patrz wzór 7.4).

Szytywność pokrycia w stanie NPC określamy zauważając, że całkowity kąt β odkształcenia postaciowego w stanie NPC jest przy poczynionych założeniach (rys. 12.27) sumą: β_s — odpowiadającego



Rys. 12.31. Średni moduł G_{NPC} odkształcenia postaciowego w stanie niezupełnego pola ciągnięć

czystemu ścinaniu i β_{PC} — odpowiadającemu stanowi PC, tj. $\beta_{NPC} = \beta_s + \beta_{PC}$. Wprowadzając więc dla stanu NPC zastępczy moduł** $G_{NPC} = \tau/\beta_{NPC}$, oraz

$$\beta_s = \tau(1 - \eta)/G, \quad \beta_{PC} = \tau\eta/G_{PC},$$

mamy

$$\frac{1}{G_{NPC}} = \frac{1 - \eta}{G} + \frac{\eta}{G_{PC}}, \quad (12.56)$$

* To znaczy z uwzględnieniem podatności pasów (patrz rys. 12.27a).

** Należy podkreślić istotną różnicę między G_{zast} według wzoru (12.39) a G_{NPC} . O ile bowiem w stanie IPC wszystkie zależności naprężeń i odkształceń są liniowe, to w stanie NPC, przy stopniowej przemianie czystego ścinania w stan IPC (patrz wzór 12.46), zależności te przestają być liniowe, nawet jeśli materiał jest idealnie sprężysty. W takim ujęciu G_{NPC} jest średnią wartością modułu w przedziale od $\tau = 0$ do zadanej wartości $\tau > \tau_{kr}$.

gdzie G_{PC} — moduł zastępczy według wzoru (12.39) przy uwzględnieniu zastępczych przekrojów rozpórek (12.51) i pasów (12.49), tj.

$$\frac{E_b}{G_{PC}} = 4 + \frac{2E_b b \delta}{E_r(A_r)_{zast}} \sin^2 \alpha + \frac{E_b h \delta}{E_p(A_p)_{zast}} \cos^2 \alpha. \quad (12.57)$$

Zazwyczaj przekrój pasa $(A_p)_{zast}$ jest tak duży, że składnik ostatni wzoru (12.57) można pominąć i wtedy G_{PC} staje się funkcją geometrycznego parametru $(A_{re}/b\delta)$ oraz parametru η lub, co na jedno wychodzi, parametru (τ/τ_{kr}) (patrz wzór 12.45e). W takim przypadku możemy obliczyć G_{PC} , a następnie G_{NPC} . Wynik przeliczeń (rys. 12.31) wykazuje, że pewne przekroczenie obciążenia krytycznego powoduje nieporównanie mniejszą zmianę pierwotnego modułu G . Tak na przykład dla $(A_{re}/b\delta) = 0,2$ i $(\tau/\tau_{kr}) = 4$ mamy $G_{NPC} \approx 0,77G$, a więc tylko o 23% mniej, niż gdyby pokrycie stateczności nie traciło. Jeśli więc konstrukcja jest tak zaprojektowana, że obciążeniom dopuszczalnym nie towarzyszy pojawienie się odkształceń trwałych w pokryciu lub innych elementach, to nic nie stoi na przeszkodzie stosowania takich konstrukcji nie tylko w lotnictwie, lecz i w innych działach budowy ustrojów nośnych*.

12.10. Wytrzymałość elementów konstrukcji w stanie NPC

Podane w artykule poprzednim wyniki pozwalają z kolei określić wytrzymałość elementów konstrukcji pracującej w stanie NPC.

Wytrzymałość pasów określamy ze znanych ogólnie wzorów, podstawiając w nich siły P_g i P_d (wzór 12.53), M_{max} (wzór 12.54), tj.

$$(\sigma_g)_{max} = \frac{P_g}{(A)_{zast}} + \frac{M_{max}}{W}, \quad (\sigma_d)_{max} = \frac{P_d}{(A)_{zast}} - \frac{M_{max}}{W}, \quad (12.58)$$

przy czym przekroje $(A)_{zast}$ określone są wzorem (12.50), a W jest wskaźnikiem wytrzymałości pasa na zginanie.

Wytrzymałość rozpórek oceniamy wyznaczając naprząd naprężenia σ_r ze wzoru

$$\sigma_r = P_r/(A_r)_{zast}, \quad (12.59)$$

w którym

P_r — siła według (12.53);

$(A_r)_{zast}$ — pole zastępczego przekroju rozpórki według wzoru (12.51).

Tak obliczone naprężenia są wartością średnią wzdłuż długości rozpórki. W rzeczywistości, jak wynika z pomiarów, w stanie NPC naprężenia σ_r są zmienne od wartości minimalnych na końcach rozpórki do maksymalnej $(\sigma_r)_{max}$ w środku jej długości. Ta wartość maksymalna jest

$$(\sigma_r)_{max} = \sigma_r \left[1 + \frac{1}{8} (1 - \eta) \left(6 - 5 \frac{b}{h} \right) \right]. \quad (12.60)$$

Mając tak określone wartości naprężeń, można z kolei określić niebezpieczeństwo zniszczenia rozpórki. Zniszczenie to może mieć postać albo wyboczenia rozpórki, jako ściskanego pręta połączanego z pokryciem, albo w przypadku niedostatecznej grubości pól przez ich zmarszczenie się łącznie z pokryciem (rys. 12.22b). W przypadku pierwszym rozpórki należy traktować jako pręt na sprężystym podłożu, albowiem jego wychylenie z płaszczyzny ścianki powoduje wypadkowe oddziaływanie włókien pokrycia proporcjonalne do wygięcia rozpórki i skierowane w stronę przeciwną do tego wygięcia (rys. 12.32). Fakt ten powoduje zwiększenie naprężeń krytycznych σ_{kr} do wartości

$$\sigma_{kr} = \sigma_E \left[1 + \eta^2 \left(3 - 2 \frac{b}{h_r} \right) \right], \quad (12.61)$$

* Zachęcając czytelnika powyższym stwierdzeniem do stosowania cienkich ścianek, nie należy zapominać o przypadkach wyjątkowych, np. gdy przesuwne obciążenie przyłożone jest bezpośrednio do pasa (suwnica). W takim przypadku stan NPC nie jest dozwolony.

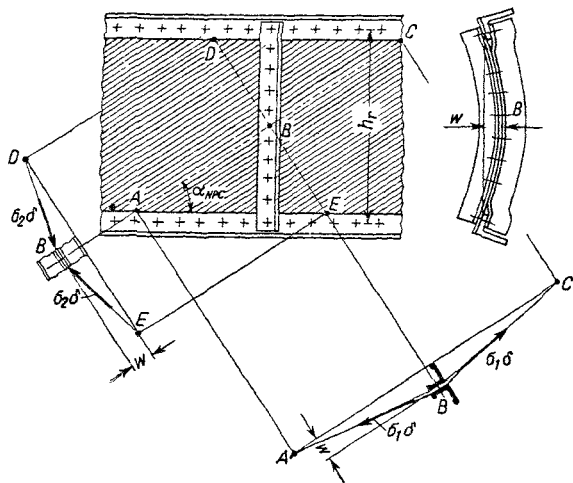
gdzie

$\sigma_E = \pi^2 E_I / \lambda^2$ — naprężenie krytyczne, odpowiadające przegubowemu podparciu końców rozpórki o smukłości $\lambda = h_r / i_z$;

i_z — promień bezwładności kreskowanego przekroju według rys. 11.20a.

Stosowność wzoru (12.61) ograniczona jest przy tym warunkiem: $b < 1,5h_r$; dla przypadku natomiast $b > 1,5h_r$ $\sigma_{kr} = \sigma_E$.

Powyższe uwagi odnoszą się do rozpórek dwustronnych, stosowanie ich dla rozpórek jednostronnych nasuwa zastrzeżenia, gdyż wybočenje takich rozpórek, o ile w ogóle zachodzi, ma postać giętno-skrotną.



Rys. 12.32. Układ oddziaływań na wyboconą rozpórkę w stanie NPC

Oddziaływania (σ_2, δ) oraz (σ_1, δ) dają wypadkową proporcjonalną do w , a więc o charakterze podłoża sprężystego dla rozpórki, h_r — długość rozpórki między nitami mocującymi ją do pasów.

Dla uniknięcia zbytniego skomplikowania obliczeń związanego z wyznaczeniem σ_{kr} dla tej postaci wybočenja, stosujemy metodę przybliżoną, żądając spełnienia dwóch warunków, a mianowicie: aby σ_{kr} według (12.61) obliczone dla $\lambda = h_r / 2i_z$ było wyższe niż średnie naprężenie $(\sigma_r)_{sr}$ w przekroju poprzecznym rozpórki, tj. $(\sigma_r)_{sr} = \sigma_r A_{re} / A_r$, oraz aby σ_r , według (12.59) było niższe od granicy plastyczności materiału, tj. $\sigma_r < Q_{0,2}$.

Opisany przypadek zniszczenia rozpórek przez ich wybočenje zachodzi tylko wtedy, gdy (h_r / δ) jest duże (np. 200). W konstrukcjach nowoczesnych rozpórki ulegają zniszczeniu na ogół na skutek marszczenia się pokrycia (art. 12.7), z tą tylko różnicą, iż w przypadku pola ciągnięć zmarszczki pokrycia bieżą ukośnie do rozpórek, a nie prostopadłe jak w przypadku ściskania (rys. 12.22b). Na podstawie danych doświadczalnych wartość naprężenia niszczonego σ_m dla stopów aluminiowych określa się jako

$$\sigma_m = \kappa Q_{0,2} \sqrt[3]{\eta^2 \frac{\delta_r}{\delta}}, \quad (12.62)$$

gdzie

δ_r, δ — grubość półek rozpórki i grubość ścianki (rys. 11.10a);

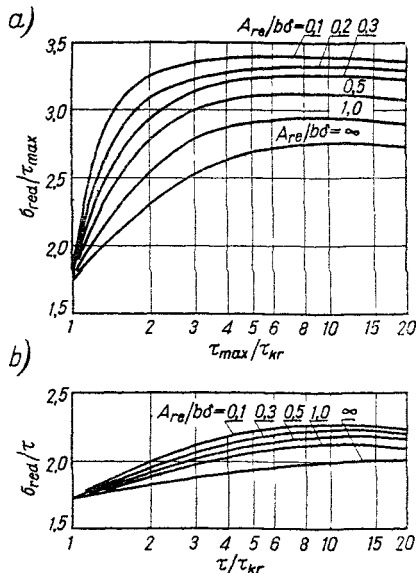
$\kappa = 0,48 \div 0,65$ — dla jednostronnych rozpórek;

$\kappa = 0,38 \div 0,50$ — dla dwustronnych rozpórek*.

* Niższe wartości κ odpowiadają materiałowi o $Q_{0,2} = 43 \text{ kg/mm}^2$, wyższe materiałowi o $Q_{0,2} = 28 \text{ kg/mm}^2$. Dla materiałów o innych $Q_{0,2}$ dozwolona jest interpolacja lub ekstrapolacja liniowa.

Ponieważ zjawisko marszczenia się pokrycia ma charakter lokalny, to dla uniknięcia tej postaci zniszczenia musi być $\sigma_m > (\sigma_r)_{\max}$ (wzór 12.60).

Wytrzymałość pokrycia. Analizując wytrzymałość pokrycia, zainteresowani jesteśmy zazwyczaj w określeniu obciążenia, przy którym pojawiają się po raz pierwszy trwałe odkształcenia oraz obciążenia, przy których następuje zniszczenie (rozerwanie pokrycia). Odpowiedź na obydwa te pytania dają wykresy (rys. 12.33) otrzymane w wyniku doświadczeń, przy czym dane rys. 12.33a określają osiągnięcie



Rys. 12.33. Kryteria wytrzymałości pokrycia w stanie NPC

- a) kryterium odkształceń trwałych, $\sigma_{red} \leq Q_{0,2}$;
b) kryterium zniszczenia $\sigma_{red} \leq R_r$.

Wytrzymałość nitów. Wypadkowa siła W_p ścinająca nit łączący pas z pokryciem, składa się z siły $[\tau(1-\eta)t\delta]$, działającej wzdłuż osi pasa (rys. 12.28b) oraz siły $(\sigma_{PC}\delta t \sin \alpha)$, działającej pod kątem α do osi pasa (rys. 12.28c), przy czym t jest podziałką nitowania. W celu uproszczenia rachunków sumowanie geometryczne tych sił zastępujemy algebraicznym, zakładając przy tym:

$\alpha = 45^\circ$, $K_\sigma = 0$. Biorąc wartość σ_{PC} według (12.46), mamy w wyniku

$$W_p = \tau t \delta (1 + 0,4\eta). \quad (12.63)$$

Nity łączące dwustronną rozpórkę z pokryciem mogą zostać ścięte przy wyboczeniu rozpórki bądź rozerwane przy marszczeniu się pokrycia. W przypadku pierwszym orientacyjna wartość siły W_r ścinającej nit jest

$$W_r = 2R_r S t / c l_s, \quad (12.64)$$

gdzie

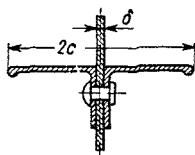
S — moment statyczny jednego profilu (rys. 12.34) względem osi symetrii;

$l_s = h_r / \sqrt{1 + \eta^2 [3 - (2b/h_r)]}$ — długość swobodna rozpórki (patrz rys. 12.32 i wzór 12.61);

R_r — doraźna wytrzymałość na roziąganie materiału rozpórki.

pierwszych odkształceń trwałych, podczas gdy dane rys. 12.33b odpowiadają zniszczeniu pokrycia. Sposób zastosowania tych wykresów jest następujący: mając dla danego obciążenia $\tau_{\max}$ (wzór 12.55) i $(\tau_{\max}/\tau_{kr})$ obliczamy z rys. 12.33a σ_{red} dla danego stosunku $(A_{re}/b\delta)$ i porównujemy otrzymaną wartość z umowną granicą plastyczności $Q_{0,2}$. Jeśli $\sigma_{red} = Q_{0,2}$, to oznacza, że danemu obciążeniu towarzyszy pojawienie się pierwszych odkształceń trwałych między innymi w postaci sfaldowania pokrycia, nie znikającego po zdjęciu obciążenia. Przy analizie zniszczenia metoda jest podobna z tą tylko różnicą, iż σ_{red} określamy w odniesieniu do τ , a nie $\tau_{\max}$ oraz że wartością porównawczą jest doraźna wytrzymałość R_r materiału. Osiągnięcie $\sigma_{red} = R_r$ odpowiada zniszczeniu konstrukcji.

Tak określone wielkości σ_{red} można stosować bezpośrednio w przypadku, gdy połączenie pokrycia z pasami lub rozpórkami stanowią pasowane sworznie z podkładkami pod łeb i nakrętkę bądź normalne nity z łbami wypukłymi. Dla pasowanych sworzni bez podkładek należy σ_{red} podnieść o 10%, natomiast dla nitowania szczelnego obniżyć o 10%. W przypadku rozpórki wprowadzającej dużą siłę skupioną, wartość σ_{red} na skutek spiętrzenia naprężenia jest $\sim 1,5$ raza większa niż wartości określone z rys. 12.33. W przypadkach takich celowe jest wzmocnienie pokrycia nakładką o grubości $\delta_n = 1 \div 1,5\delta$.



Rys. 12.34. Oznaczenia do wzoru (12.64)

W przypadku drugim, tj. przy marszczeniu się pokrycia, dla uniknięcia rozerwania nitów lub wyrwania się ich z pokrycia żądamy, na podstawie danych doświadczalnych, aby szew nitowy wytrzymał w kierunku osi nitów obciążenie równe

$$0,15R_r \delta \text{ kG/cm}, \quad (12.65a)$$

a w przypadku jednostronnej rozpórki

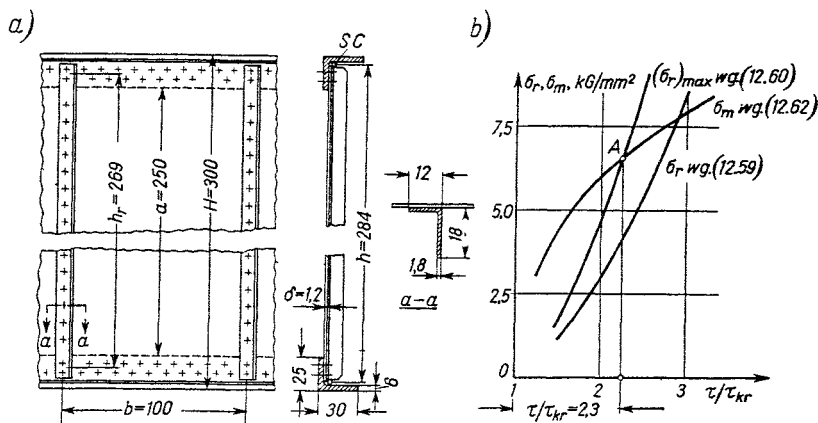
$$0,22R_r \delta \text{ kG/cm}. \quad (12.65b)$$

Dla rozpórek jednostronnych brak jest kryterium analogicznego do (12.64), które by określało obciążenie szczeniowe. Jak dowodzą próby, kryterium (12.65b) jest wystarczające dla zrealizowania prawidłowej konstrukcji.

Sprawdzenie wytrzymałości nitów łączących pas z rozpórką przeprowadzamy według ogólnych reguł, przy czym obciążenie połączenia stanowi siła P_r określona według (12.53).

Dodatkowym warunkiem, którego spełnienia wymagamy, jest aby nie zachodziło wyboeczenie pokrycia między nitami (patrz wzór 12.32).

Przykład. Określić wielkości obciążeń dopuszczalnego i niszczonego dla konstrukcji duralowej ($Q_{0,2} = 28 \text{ kG/mm}^2$, $R_r = 43 \text{ kG/mm}^2$, $E = 7,2 \cdot 10^3 \text{ kG/mm}^2$, $\nu = 0,33$) podanej na rys. 12.35.



Rys. 12.35. Dane przykładu liczbowego konstrukcji, pracującej w stanie NPC

R o z w i ą z a n i e. Określamy napróżd wielkość τ_{kr} , uwzględniając sprężyste zamocowanie brzegów płyty. Porównując rys. 11.10 i 11.4 z rys. 12.35, mamy dla $b/a = 0,4$, $\delta_r/\delta = 1,5$, $\delta_p/\delta = 5,0$:

$$(\tau_{kr})_0 = \left[\xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \right] E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 = 5,71 \cdot 7,2 \cdot 10^3 \left(\frac{1,2}{100} \right)^2 = 5,9 \text{ kG/mm}^2,$$

$$K_r = 1,14, \quad K_p \approx 1,35,$$

skąd według wzoru (11.8)

$$\tau_{kr} = 5,9 [1,14 + 0,5(1,35 - 1,14)0,4^3] = 6,8 \text{ kG/mm}^2.$$

Przystępując do określenia obciążenia dopuszczalnego, wyznaczamy według (12.41) A_{re} , przy czym $h_1 = 0,69 \text{ cm}$; $i_z = 0,57 \text{ cm}$, skąd $A_{re} = 0,207 \text{ cm}^2$, a parametr $A_{re}/b\delta = 0,172$. Ponadto biorąc pod uwagę, że $\alpha \approx 0,87$ (wzór 12.44), mamy $K_\sigma \approx 0$, a więc $\tau \approx \tau_{\max}$. Korzystając z wykresu (rys. 12.33a), metodą kolejnych prób dla interpolowanej krzywej o parametrze $A_{re}/b\delta = 0,172$ ustalamy wartość τ , przyjmując $\sigma_{red} = Q_{0,2}$ i poprzednio obliczone τ_{kr} . W wyniku wartości $\tau \approx 9,9 \text{ kG/mm}^2 = 1,45\tau_{kr}$ odpowiada pojawieniu się pierwszych odkształceń trwałych, a obciążenie dopuszczalne T_{dop} wynosi

$$T_{dop} = \tau \delta h \approx 3,4 t.$$

Wyznaczając z wykresu (rys. 12.29) wartość $\eta = 0,082$, możemy ze wzorów (12,50)÷(12,51) określić $(A_r)_{\text{zast}} = 0,76 \text{ cm}^2$, $(A_p)_{\text{zast}} = 3,08 \text{ cm}^2$. Zakładając teraz $\alpha = 45^\circ$, 42° , 40° , wyliczamy według wzorów (12,52) i (12,48a) prawą stronę równania (12,38d), a z tablic lewą stronę tj. $\text{tg}^2\alpha$, otrzymując odpowiednio:

α	45°	42°	40°
prawa strona wzoru (12,38d)	0,812	0,831	0,844
lewa strona wzoru (12,38d)	1,000	0,806	0,702

skąd $\alpha = 42,3^\circ$.

Siła działająca w rozporce przy obciążeniu dopuszczalnym $T_{\text{dop}} = 3,4 \text{ t}$ jest według (12,53) $P_r = 89 \text{ kG}$, a $\sigma_r \approx 117 \text{ kG/cm}^2$ (patrz wzór 12,59).

Przechodząc do określenia obciążenia niszczonego, musimy przeanalizować możliwość zniszczenia (rozerwania) pokrycia oraz możliwość zniszczenia rozporok. W alternatywie pierwszej, korzystając z rys. 12.33b, metodą prób ustalamy dla $\sigma_{\text{red}} = R_r = 43 \text{ kG/mm}^2$ wielkość $\tau_{\text{niszcz}} = 20,3 \text{ kG/mm}^2$ i $\tau_{\text{niszcz}}/\tau_{\text{kr}} = 3,02$.

Obliczając kolejno η , $(A_r)_{\text{zast}}$, $(A_p)_{\text{zast}}$ i α otrzymujemy:

$$\eta = 0,235, \quad (A_r)_{\text{zast}} = 0,59 \text{ cm}^2, \quad (A_p)_{\text{zast}} = 3,47 \text{ cm}^2, \quad \alpha = 40^\circ 10',$$

skąd

$$P_r = 484 \text{ kG}, \quad \sigma_r = 820 \text{ kG/cm}^2.$$

Sprawdzając wyobczenie rozporoki stwierdzamy, że naprężenie krytyczne jest dla smukłości $\lambda = (h/2i_z) \approx 24$ znacznie wyższe, aniżeli obliczone powyżej, natomiast naprężenie σ_m wyznaczone z wzoru (12,62) dla $\eta = 0,235$ jest niższe, wynosi bowiem tylko 790 kG/cm^2 . Dowodzi to, że konstrukcja ulegnie zniszczeniu przez zmarszczenie półki profilu, a nie przez rozerwanie pokrycia. Biorąc zatem kilka (np. dwie) wartości pośrednich między $\tau = 9,9 \text{ kG/mm}^2$ a $\tau_n = 20,3 \text{ kG/mm}^2$, obliczamy z jednej strony rzeczywiste wartości $(\sigma_r)_{\text{max}}$ według wzoru (12,60) oraz σ_m dla odpowiednich wartości η . Przecięcie krzywych $(\sigma_r)_{\text{max}}$ i σ_m (punkt A na rys. 12.35b) daje szukaną wartość $\tau \approx 2,3\tau_{\text{kr}} = 15,5 \text{ kG/mm}^2$, skąd $T_{\text{niszcz}} = \tau h \delta \approx 5,3 \text{ t}$. Jak widać, współczynnik bezpieczeństwa równy $T_{\text{niszcz}}/T_{\text{dop}} \approx 1,5$ spełnia warunki stawiany konstrukcjom lotniczym.

Wyznaczenie pozostałych interesujących nas wielkości polega na bezpośrednim zastosowaniu wzorów art. 12.8÷12.10. Tak na przykład maksymalny moment zginający pasy przy obciążeniu $T_{\text{niszcz}} = 5,3 \text{ t}$ określamy ze wzoru (12,54) wstawiając $K_M = 1,00$, $\eta = 0,180$, $\text{tg} \alpha = \text{tg} 41^\circ 15' = 0,875$ i otrzymując

$$M_{\text{max}} \approx 240 \text{ kGcm}.$$

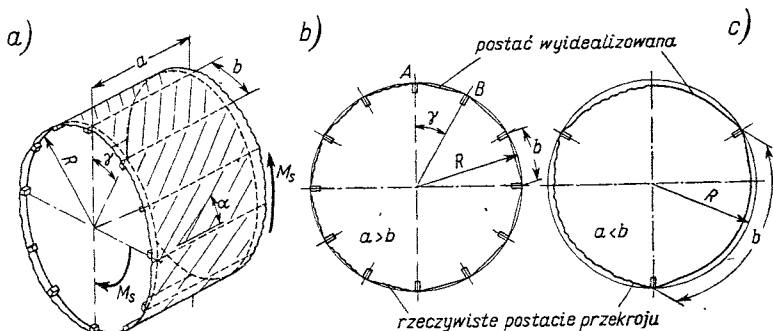
Ponieważ mniejszy wskaźnik wytrzymałości pasa jest $\sim 0,83 \text{ cm}^3$, to dodatkowe naprężenia od zginania są rzędu 290 kG/cm^2 i działają we włóknach bliższych warstwy obłożonej dźwigara. Jak widać, naprężenia te są stosunkowo niewielkie i dlatego czasami ich działanie się pomija.

12.11. Pole ciągnięć w ścinanej powłoce*

Obserwując zachowanie się cylindrycznej powłoki po przekroczeniu τ_{kr} zauważamy z jednej strony duże podobieństwo do przebiegu zjawisk w konstrukcji płaskiej, z drugiej jednak strony stwierdzamy różnice w zachowaniu się obu konstrukcji. Podobieństwo polega na pojawieniu się ukośnych i mniej

* W celu uproszczenia analizy rozważania ograniczamy do przypadku skręcania cylindrycznej powłoki kołowej, wzmocnionej regularnie rozstawionymi podłużniczkami i wręgami. W takim przypadku każdy element konstrukcji, z wyjątkiem wręg skrajnych, znajduje się w tych samych warunkach.

więcej równoległych do siebie fałd pokrycia (rys. 12.36), różnica natomiast występuje w wielkości kąta α , który w konstrukcji powłokowej jest znacznie mniejszy niż w konstrukcji płaskiej. Ponadto w konstrukcji powłokowej występuje bardzo wyraźna zmiana kształtu przekroju poprzecznego. W przypadku konstrukcji o gęstym rozstawieniu podłużniczek ($b/a < 1$) polega ona na spłaszczeniu poszczególnych



Rys. 12.36. Pole ciągnięć w żebrowanej powłoce i deformacja przekroju poprzecznego
b) przypadek gęstego rozkładu podłużniczek; c) rzadkie rozstawienie podłużniczek.

nych odcinków pokrycia, tak, że pierwotny przekrój kołowy zamienia się przy wzroście obciążenia stopniowo na wielokąt (rys. 12.36b). W przypadku konstrukcji o gęstym rozstawie wręg ($b/a > 1$) poszczególne odcinki pokrycia pozostają zakrzywione, natomiast cylinder zamienia się stopniowo w powierzchnię zbliżoną do hiperboloidy (rys. 12.36c).

Idealne pole ciągnięć (IPC) jest stanem granicznym opisanego przekształcania się przekrojów poprzecznych. W konstrukcji z gęsto rozstawionymi podłużniczkami ($b/a < 1$, $b/R < \frac{1}{2}$) zakładamy, że pierwotny cylinder zamienił się w graniastosłup i że większość ukośnych rozciąganych włókien leży w płaszczyznach boków tego graniastosłupa. W konstrukcji z gęsto rozstawionymi wręgami ($b/a > 1$, $l/R < \frac{1}{2}$) zakładamy, że większość rozciąganych ukośnych włókien leży na powierzchni hiperboloidy obrotowej, w którą zamienił się pierwotny cylinder.

Punktem wyjścia analizy ilościowej stanu IPC jest określenie kąta α_{IPC} , zawartego między kierunkiem naprężeń rozciągających a kierunkiem tworzących. Nie wchodząc w zbyt szczegółowe rozważania podajemy od razu końcowe wyniki w postaci wykresów (rys. 12.37), w których szukany kąt α_{IPC} jest funkcją bezwymiarowych wielkości (b/R) , (E/τ) oraz ψ_w i ψ_p określonych wzorami

$$\psi_w = a\delta/A_w, \quad \psi_p = b\delta/A_{pe}, \quad (12.66)$$

w których A_w jest polem poprzecznego przekroju wręgi, a A_{pe} — efektywnym polem przekroju podłużniczki równym

$$A_{pe} = A_p/[1 + (h_1/i_z)^2], \quad (12.67)$$

przy czym A_p , i_z są odpowiednio polem i promieniem bezwładności poprzecznego przekroju podłużniczki*, a wymiar h_1 jest wzięty z rys. 11.20b.

Mając wartość kąta α_{IPC} można podobnie jak w konstrukcji płaskiej określić wszystkie wtórne siły wewnętrzne wywołane istnieniem pola ciągnięć.

Wtórne obciążenie podłużniczek w stanie IPC składa się z obciążenia ciągłego, prostopadłego do jej osi oraz z obciążenia wzdłużnego (rys. 12.38). Pierwsze z nich, tj. n_p , powstaje na skutek przejścia

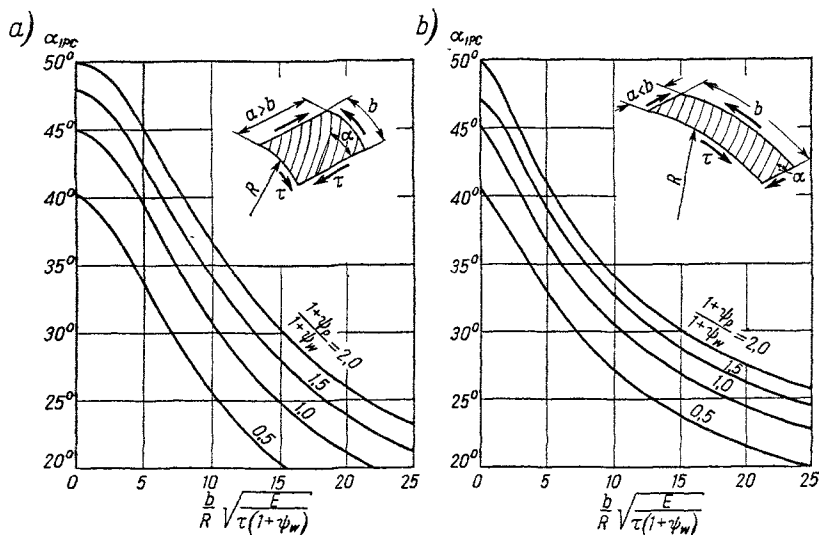
* Ograniczamy się do najczęściej spotykanej konstrukcji, gdy podłużniczki i wręgi są jednostronne, wobec czego zamiast rzeczywistego pola A_p należy wstawić A_{pe} . Użycie rzeczywistego pola A_w , a nie A_{we} , nie jest przeoczeniem, pomimo tego, że wręgi też są jednostronne.

powierzchni walcowej w graniastosłupową i wynikającego stąd załomu pokrycia, a jego wartość jest

$$n_p = 2\tau\delta \operatorname{tg} \alpha_{IPC} \sin \frac{1}{2} \gamma \approx \tau\delta \gamma \operatorname{tg} \alpha_{IPC}.$$

Wywołany przez to moment gnący w podłużnicze, traktowanej jako belka ciągła o długości przęsła a , jest:

$$(M_p)_{\max} = \frac{1}{12} \tau \delta a^2 \gamma \operatorname{tg} \alpha_{IPC} \quad (12.68)$$



Rys. 12.37. Kąt α_{IPC} IPC dla odcinka powłoki walcowej ($\psi_w = a\delta/A_w$; $\psi_p = b\delta/A_{pe}$).

i działa w miejscu skrzyżowania podłużniczki z wręgą. Drugie obciążenie podłużniczki stanowi stała na jej długości siła wzdłużna $P_p = \tau\delta\delta \operatorname{tg} \alpha_{IPC}$, działająca w płaszczyźnie półki profilu przylegającej do pokrycia. Takie mimośrodowe przyłożenie siły P_p powoduje, poza ściskaniem, zginanie podłużniczki identycznie jak w przypadku jednostronnej rozpórki w konstrukcji płaskiej (art. 12.9). W wyniku zatem, przy określeniu maksymalnych naprężeń w poprzecznym przekroju podłużniczki, należy zamiast rzeczywistego pola A_p wstawić efektywne pole A_{pe} , określone wzorem (12.67).

Wtórne obciążenie wręg w stanie IPC stanowią prostopadłe do pokrycia oddziaływania $P_w = \tau\delta\gamma \operatorname{tg} \alpha_{IPC}$ poszczególnych podłużniczek. W przypadku gdy wręgi nie są przynitowane bezpośrednio do pokrycia, oddziaływania te mają postać sił skupionych (rys. 12.39).

Wprowadzając zerową grupę obciążeń ciągłych o natężeniu

$$(\tau\delta\gamma \operatorname{tg} \alpha_{IPC})/b = (\tau\delta\delta \operatorname{tg} \alpha_{IPC})/R,$$

rozdzielamy zadanie wyznaczenia sił wewnętrznych we wrzędze na dwa, z których pierwsze (rys. 12.39b) daje w obwodowych włóknach przylegających do pokrycia naprężenia ściskające σ_w o wielkości

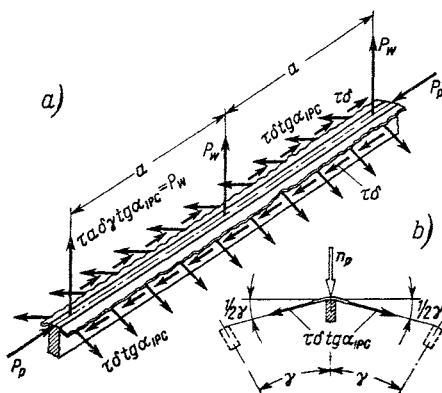
$$\sigma_w = \tau\delta\delta \operatorname{tg} \alpha_{IPC}/A_w, \quad (12.69)$$

podeczas gdy drugie (rys. 12.39c) można rozwiązać, traktując w przybliżeniu pierścieni jak belkę ciągłą o długości przęsła równej b . Maksymalny moment gnący $(M_w)_{\max}$ występuje w miejscu przyłożenia sił skupionych i wynosi

$$(M_w)_{\max} = \frac{\tau\delta\delta^2 \operatorname{tg} \alpha_{IPC}}{12R}. \quad (12.70)$$

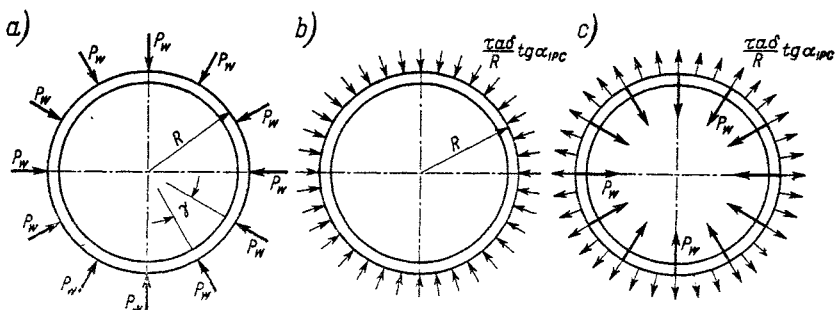
W przypadku konstrukcji z wręgami przynitowanymi do pokrycia $(M_w)_{\max}$ praktycznie biorąc znika, gdyż pasek pokrycia, przylegający bezpośrednio do wręgi, rozprzodza oddziaływanie podłużniczek na całą szerokość b tak, że jedynym stanem obciążenia wręgi jest stan według rys. 12.39b.

Przeprowadzona analiza dotyczy typowych podłużniczek i wręg. W przypadku natomiast, gdy rozważana konstrukcja jest odcinkiem żebrowanej powłoki (rys. 12.40), należy w analizie skrajnych



Rys. 12.38. Statyka podłużniczki konstrukcji cylindrycznej w stanie IPC

podłużniczek oraz skrajnych wręg uwzględnić odpowiednio oddziaływania pokrycia o natężeniach $(\tau \delta \operatorname{tg} \alpha_{IPC})$ lub $(\tau \delta \operatorname{ctg} \alpha_{IPC})$, zginające te elementy w płaszczyźnie pokrycia (rys. 12.40b). Powoduje to konieczność odpowiedniego wzmocnienia tych elementów, np. przez wykonanie ich w postaci profili o przekrojach zamkniętych. Inne rozwiązanie polega na zgrubieniu pokrycia na obwodzie tak, aby przy danym obciążeniu nie traciło ono stateczności. W ten sposób powstaje jednoobwodowa rama



Rys. 12.39. Obciążenie wręgi w stanie IPC

(rys. 12.40c), dla której wspomniane wyżej oddziaływania wewnętrznej części pokrycia nie są groźne.

Szytywność na ścinanie pokrycia pracującego w stanie IPC obliczamy identycznie jak w konstrukcji płaskiej, otrzymując w wyniku przy zmienionych oznaczeniach i założeniu jednorodnej konstrukcji $(E_b = E_p = E_w = E)$

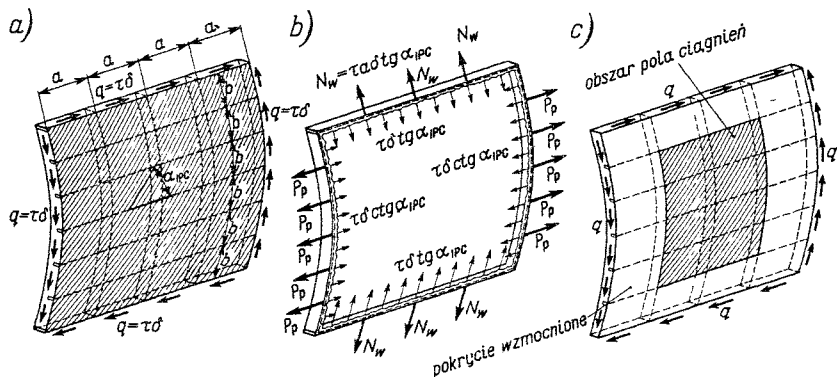
$$\frac{E}{G_{IPC}} = 4 + \frac{2a\delta}{A_w} \sin^2 \alpha_{IPC} + \frac{2b\delta}{A_{pe}} \cos^2 \alpha_{IPC}, \quad (12.71)$$

gdzie G_{IPC} — moduł sprężystości postaciowej pokrycia w stanie IPC.

Stan *niezupelnego pola ciagnień* (NPC) rozwiązujemy podobnie jak w przypadku konstrukcji płaskiej, wprowadzając rozdział całkowitego naprężenia τ na τ_s i τ_{PC} określone wzorami (12.45a) i (12.45b). W odróżnieniu jednak od konstrukcji płaskich, w powłokach przejście do stanu idealnego pola ciagnień zachodzi znacznie szybciej, tzn. iż dla tego samego (τ/τ_{kr}) współczynnik η jest dla powłoki większy niż dla konstrukcji płaskiej. Jak pokazują doświadczenia, współczynnik ten można przedstawić wzorem

$$\eta = \operatorname{tgh} \left[\left(0,5 + 300 \frac{a\delta}{Rb} \right) \log_{10} \left(\frac{\tau}{\tau_{kr}} \right) \right], \quad (12.72)$$

stosowalnym wtedy, gdy $1 < (a/b) < 2$. Jeśli $1 < (b/a) < 2$, to stosunek (a/b) należy zamienić przez (b/a) . Wreszcie gdy $(a/b) > 2$ lub $(b/a) > 2$, to we wzorze (12.72) należy wstawić zamiast (a/b) lub (b/a)



Rys. 12.40. Obciążenie skrajnych podłużniczek i wręg w stanie IPC

wartość stałą: 2. Dla zastosowań praktycznych wielkość η podano w postaci wykresów zależnych od parametru* $300 a\delta/Rb$ (rys. 12.29), z których możemy wyznaczyć η , jeśli tylko dana jest wartość τ . Dzięki temu mamy zarówno tę część naprężen τ , tj. $\tau_s = \tau(1-\eta)$, która przeniesiona jest w taki sposób jak gdyby pokrycie nie utraciło stateczności, jak i tę część, tj. $\tau\eta$, która przenosi się pod postacią pola ciagnień (rys. 12.28). Nieznana jeszcze wartość kąta α_{IPC} (rys. 12.28) wyznaczamy z wykresu (rys. 12.37), wstawiając zamiast τ znaną już wartość $\tau\eta$. Ponadto z uwagi na stopniowy charakter przejścia od stanu przed utratą stateczności do stanu NPC, musimy uwzględnić wzmocnienie podłużniczek i wręg przez pokrycie (porównaj rys. 12.30), przez wprowadzenie zastępczych pól $(A_p)_{zast}$ i $(A_w)_{zast}$ przekrojów podłużniczek i wręg

$$(A_p)_{zast} = A_{pe} + 0,5b\delta(1-\eta), \quad (A_w)_{zast} = A_w + 0,5a\delta(1-\eta), \quad (12.73)$$

gdzie A_{pe} określone jest wzorem (12.67). W rezultacie $\alpha = \alpha_{IPC}$ określamy z rys. 12.37 dla zmienionych parametrów

$$\psi_w = a\delta/(A_w)_{zast}, \quad \psi_p = b\delta/(A_p)_{zast} \quad (12.74)$$

i zmienionej odciętej (z nową wartością ψ_w) o wartości

$$\frac{b}{R} \sqrt{\frac{E}{\tau\eta(1+\psi_w)}}.$$

Znajomość kąta α pozwala z kolei określić wartości sił wewnętrznych w elementach konstrukcji. Tak więc siły ściskające w podłużniczkach i wręgach są:

$$P_p = \tau\delta\eta \operatorname{ctg} \alpha, \quad (12.75a)$$

$$N_w = \tau a \delta \eta \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.75b)$$

* Rolę b na rys. 12.29 spełnia teraz a , rolę a zaś wymiar b .

a odpowiadające im naprężenia: $\sigma_p = -P_p/(A_p)_{\text{zast}}$ i $\sigma_w = -N_w/(A_w)_{\text{zast}}$. Co się tyczy maksymalnych momentów zginających podłużniczki i wręgi, to jak pokazują doświadczenia mają one wartość o połowę mniejszą niż określone według (12.68) i (12.70), tak że w rezultacie:

$$(M_p)_{\max} \approx \frac{1}{24} \tau \delta a^2 \eta \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.76a)$$

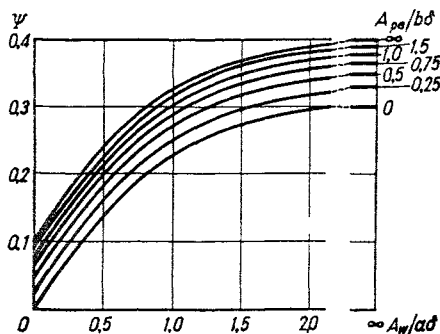
$$(M_w)_{\max} \approx \frac{1}{24} \tau \delta a b \eta \operatorname{tg} \alpha. \quad (12.76b)$$

Wytrzymałość elementów konstrukcji w stanie NPC można określić analogicznie jak i w przypadku konstrukcji płaskiej (art. 12.10). Tak więc podłużniczki sprawdzamy na wyboczenie, porównując obliczoną poprzednio wartość $\sigma_p = P_p/(A_p)_{\text{zast}}$ z wartością krytyczną σ_{kr} obliczoną według wzoru (12.61), przy czym oczywiście zamiast h_p należy wstawić a . Ponadto sprawdzamy warunek dostatecznej wytrzymałości podłużniczki przeciw marszczeniu się pokrycia, stosując doświadczalny warunek (12.62), w którym oczywiście δ_r zamieniamy przez grubość δ_p półki podłużniczki, traktowanej jak rozpórka jednostronna ($\kappa = 0,48 \div 0,65$). Otrzymaną stąd wartość σ_m porównujemy z naprężeniem $(\sigma_p)_{\max}$, wyznaczonym z warunku analogicznego do (12.60), a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_p)_{\max} &= \sigma_p \left[1 + \frac{1}{8} (1 - \eta) \left(6 - 5 \frac{b}{a} \right) \right], & \text{gdy } b < 1,2a; \\ (\sigma_p)_{\max} &= \sigma_p, & \text{gdy } b \geq 1,2a. \end{aligned} \right\} \quad (12.77)$$

Wytrzymałość wręg sprawdzamy wyłącznie na warunek dostatecznej odporności przeciwko marszczeniu się pokrycia, obliczając ze wzoru (12.62) σ_m jak dla rozpórek dwustronnych ($\kappa = 0,38 \div 0,50$) i porównując to naprężenie z $(\sigma_w)_{\max}$ obliczonym ze wzoru

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_p)_{\max} &= \sigma_p \left[1 + \frac{1}{8} (1 - \eta) \left(6 - 5 \frac{a}{b} \right) \right], & \text{gdy } a < 1,2b; \\ (\sigma_w)_{\max} &= \sigma_w, & \text{gdy } a \geq 1,2b. \end{aligned} \right\} \quad (12.78)$$



Rys. 12.41. Składowy korygujący we wzorze (12.79)

Wytrzymałość pokrycia w przypadku powłoki określa się, porównując wartość τ z umowną wartością R_t wytrzymałości na ścinanie. Tę ostatnią określamy ze wzoru

$$R_t = \bar{R}_t (0,65 + \psi), \quad (12.79)$$

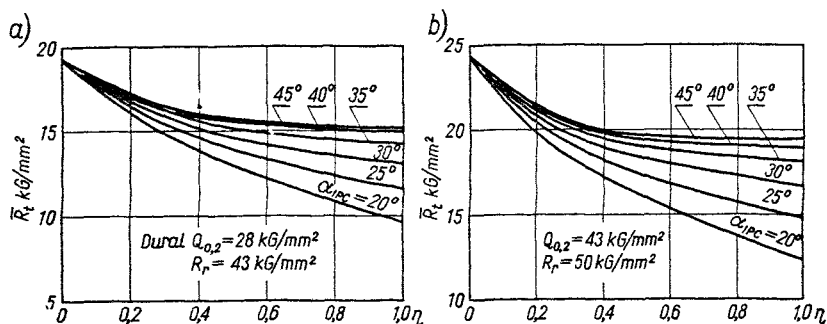
gdzie

$\bar{R}_t$ — wielkość, uwzględniająca wpływ współczynnika η i podatności całej konstrukcji scharakteryzowanej przez kąt α_{IPC} (rys. 12.37);

ψ — współczynnik uwzględniający wpływ stosunku sztywności podłużniczek i wręg.

Określone doświadczalnie wartości η i $\bar{R}_t$ podane są na rys. 12.41 i 12.42, przy czym te ostatnie odnoszą się do dwóch typowych stopów lekkich (Al) stosowanych szeroko w lotnictwie. W przypadku materiału (stopu lekkiego) o innych własnościach ($\bar{R}_t$) można stosować interpolację liniową.

Wytrzymałość nitów w szwach skrajnych podłużniczek lub wręg określa się z techniczną dokładnością według wzoru (12.63). Z uwagi na możliwość marszczenia się pokrycia żądamy również spełnienia warunku (12.65a) dla wręg, a warunku (12.65b) dla podłużniczek.



Rys. 12.42. Wytrzymałość powłoki na ścinanie (wzór 12.79)

Moduł sprężystości na ścinanie w stanie NPC określamy jak dla konstrukcji płaskiej (wzór 12.56), wstawiając zamiast wyrażenia (12.39) wartość G_{IPC} z wzoru (12.71). W porównaniu z konstrukcją płaską moduł ten dla powłoki ma wartość mniejszą, gdyż nie tylko zwiększa się wartość η , lecz również sztywność podłużniczki $E(A_p)_{zast}$ jest znacznie mniejsza niż sztywność normalnych pasów w konstrukcji płaskiej.

12.12. Obciążenia niszczące w złożonym stanie obciążeń

Przeprowadzona dotychczas analiza opisująca działanie obciążeń prostych i ściskających (art. 12.1 ÷ 12.7) bądź ścinających (art. 12.8 ÷ 12.11), stanowi punkt wyjścia do określenia obciążeń niszczących w bardziej złożonych zagadnieniach, z którymi spotykamy się w konstrukcjach rzeczywistych. Zagadnienia te dzielą się na trzy rodzaje, a mianowicie:

- jednoczesne działanie obciążeń wywołujących przed utratą stateczności równomierny rozkład naprężeń w całej konstrukcji, np. jednoczesne ściskanie i skręcanie powłoki pryzmatycznej;
- działanie obciążeń prostych wywołujących różne naprężenia w poszczególnych elementach, np. czyste zginanie konstrukcji pryzmatycznej;
- jednoczesne działanie obciążeń wywołujących różną wartość naprężeń w poszczególnych elementach, np. zginanie siłą poprzeczną.

Ponieważ jak dowodzą doświadczenia, w typowych konstrukcjach najczulszym elementem konstrukcji, tj. ulegającym najbardziej zniszczeniu, są z reguły ściskane podłużniczki, przeto analizę obciążeń niszczących ograniczymy głównie do tego elementu.

a. *Jednoczesne równomierne ściskanie i ścinanie* (rys. 12.43a) wywołuje w podłużnicze naprężenia ściskające σ_{pw} określone wzorem

$$\sigma_{pw} = \sigma_c + \sigma_t, \quad (12.80)$$

w którym

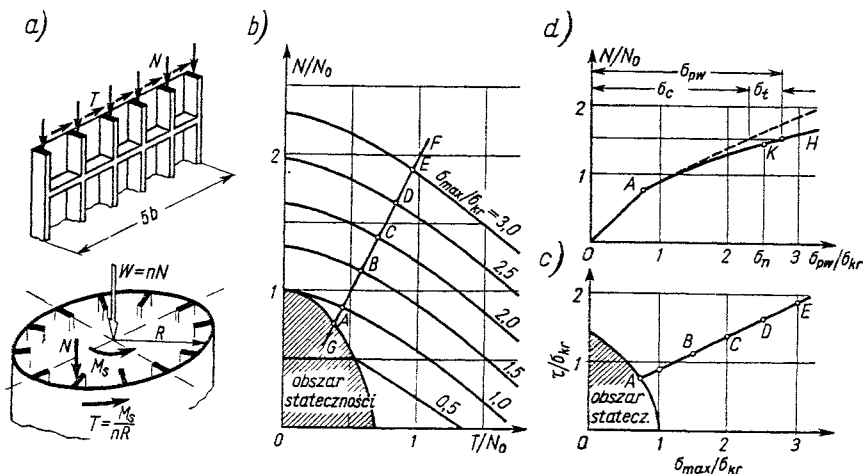
σ_c oznacza naprężenie w podłużnicze wywołane siłą N ;

σ_t — naprężenie w tejże podłużnicze wywołane polem ciągnięć od siły T .

Ograniczając nasze rozważania do najważniejszego dla praktyki przypadku konstrukcji płaskiej lub słabo zakrzywionej ($b^2/R\delta < 15$) wartość naprężeń σ_c wyznaczamy za pomocą wykresu (rys. 12.6). O biorając mianowicie pewną wartość $\sigma_c = \sigma_{\max} = \text{const}$ (np. $\sigma_{\max} = 2\sigma_{kr}$), odczytujemy z tego rysunku odpowiadające sobie wartości τ i σ_{sr} (np. dla $\sigma_{\max} = 2\sigma_{kr}$, $\tau = 2\sigma_{kr}$, $\sigma_{sr} = 0,82 \sigma_{kr}$). Dzięki temu możemy z kolei obliczyć odpowiadające sobie wartości N i T jako

$$N = \sigma_{\max} A_p + \sigma_{sr} b\delta, \quad T = \tau b\delta. \quad (12.81)$$

Wartości te nanosimy na wykres $N = f(T)$ otrzymując krzywą odpowiadającą obranej wartości $\sigma_c = \sigma_{\max} = \text{const}$. Postępując podobnie dla innych wartości $\sigma_c = \sigma_{\max}$ (np. $\sigma_{\max}/\sigma_{kr} = 0,5, 1,0, 1,5, \dots$), wykreślamy całą rodzinę takich krzywych (rys. 12.43b) reprezentujących zachowanie się rozpatrywanej



Rys. 12.43. Obliczenie obciążeń niszczących przy jednoczesnym ściskaniu i ścinaniu

a) szkice konstrukcji, n — liczba odcinków; b) podstawowy wykres otrzymany ze wzorów (12.80) i rys. 12.6, $N_0 = (A_p + b\delta)\sigma_{kr}$ — wartość odniesienia, linia GF odpowiada proporcji $N = 2T$; c) zależność τ od $\sigma_{\max}$, σ_{kr} — naprężenia krytyczne przy prostym ściskaniu płyty o szerokości b ; d) wykres ostateczny $N = f(\sigma_{pw})$.

konstrukcji przy *niezależnych od siebie* siłach N i T . Wracając teraz do pierwotnego zadania (rys. 12.43a) możemy mieć kilka wariantów. Najbardziej typowym jest taki, w którym obciążenia N i T są do siebie proporcjonalne, tj. $T = kN$. Kreśląc wtedy na rys. 12.43b z początku układu prostą GF , której współczynnik kierunkowy jest $N/T = k$, wyznaczamy szereg punktów ($A, B, \dots, E$) określających odpowiadające sobie trójki liczb, tj. $\sigma_c = \sigma_{\max}$, N i $\tau = T/b\delta$. Wykorzystując dwie z nich, $\sigma_c = \sigma_{\max}$ i τ , budujemy wykres (rys. 12.43c), z którego możemy odczytać pełny przebieg $\tau = f(\sigma_{\max})$. O biorając następnie z tego wykresu kilka wartości τ wyznaczamy według wskazówek art. 12.10 (lub 12.11) odpowiadające im siły P_p w podłużnicze (np. ze wzoru 12.75a). Naprężenie σ_t określamy jako $\sigma_t = P_p/(A_p)_{\text{zast}}$, gdzie zastępcze pole przekroju podłużniczki

$$(A_p)_{\text{zast}} = A_{pe} + 0,5b\delta(1 - \eta)(\tau_{kr}/\tau_0) \quad (12.82)$$

uwzględnia zmniejszenie się tego pola* na skutek istnienia siły N .

* We wzorze (12.82) A_{pe} — efektywne pole przekroju samej podłużniczki (wzór 12.41 lub 12.67); η — współczynnik określony wzorem (12.72), τ_{kr} — krytyczne naprężenia przy jednoczesnym działaniu obciążenia N i $T = kN$ (patrz rys. 11.11 lub wzór 11.33); τ_0 — krytyczne naprężenie przy czystym ścinaniu (rys. 11.4 lub rys. 11.32 i rys. 11.33).

W rezultacie tego ostatniego etapu mamy wyznaczone wartości σ_t odpowiadające znanym wartościom $\sigma_c = \sigma_{\max}$, a więc i znanym wartościom siły N . Posługując się zatem wzorem 12.80 możemy ostatecznie wyznaczyć σ_{pw} , a potem zbudować wykres $N = f(\sigma_{pw})$ (linia OAH na rys. 12.43d).

Jeśli teraz obliczymy według wskazówek art. 12.2 ÷ 12.7 wartość naprężenia σ_n , niszczonego podłużniczkę przy prostym ściskaniu konstrukcji, to, nanosząc tę wartość na wykres (rys. 12.43d), wyznaczmy punkt K odpowiadający zniszczeniu konstrukcji przy jednoczesnym ściskaniu i ścinaniu. Jak widać, istnienie naprężeń stycznych obniża wartość niszczącej siły N nie tylko na skutek obniżenia σ_{sr} (rys. 12.6), lecz również z uwagi na dodatkowy człon σ_t powodujący szybszy wzrost całkowitych naprężeń σ_{pw} .

Opisany sposób wyznaczania obciążeń niszczących można stosować również w przypadku powłok o większej krzywiznie ($b^2/R\delta > 15$), jednakże tylko przy znaczniejszym przekroczeniu naprężeń krytycznych ($\sigma_{\max} > 2\sigma_{kr \text{ powł}}$). Stwierdzenie to wynika z analizy wykresów (rys. 12.7), gdzie widać, że przy takim przekroczeniu $\sigma_{kr \text{ powł}}$ zachowanie się odcinka powłoki zbliża się do zachowania się płyty ($b^2/R\delta = 0$).

Podany sposób analizy odnosi się do przypadku, gdy przebieg zniszczenia jest drugiego rodzaju, na skutek pojawienia się wtórnych giętno-skrętnych odkształceń profilu (patrz art. 12.2). W przypadku gdy zniszczenie ma postać lokalną, analizę liczbową można uprościć, opierając się na wynikach doświadczeń. Obliczając mianowicie oddzielnie działanie prostego ściskania i oddzielnie ścinania, określamy wartości niszczących obciążeń N_{niszcz} i T_{niszcz} , a wpływ jednoczesnego działania ujmujemy zależnością

$$\left(\frac{N}{N_{\text{niszcz}}} \right) + \left(\frac{T}{T_{\text{niszcz}}} \right)^{1,5} = 1, \quad (12.83)$$

gdzie N i T są niszczącymi obciążeniami przy ich jednoczesnym działaniu. Zależność powyższa (rys. 12.44) ma postać zbliżoną do podanej poprzednio (rys. 11.11), pozwalając w podobny sposób określić współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji.

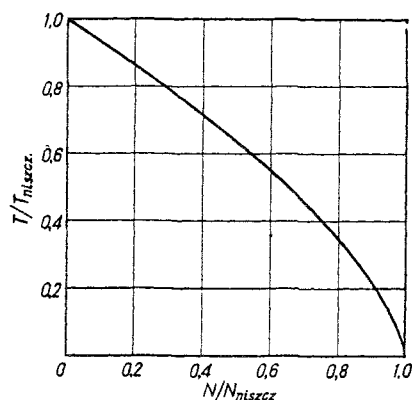
b. *Wpływ nierównomierności naprężeń normalnych na wielkość obciążenia niszczonego* występuje w przypadku czystego zginania lub zginania połączonego z działaniem sił wzdłużnych, gdy naprężenia w poszczególnych podłużniczkach różnią się między sobą. Wielkość tego wpływu zależy od kształtu przekroju poprzecznego. Jeśli na przykład zginamy przekrój skrzynkowy tak, że cała górna powłoka jest ściskana (rys. 12.45), a różnice między obliczonymi według elementarnego wzoru Wytrzymałości naprężeniami normalnymi w sąsiadujących podłużniczkach nie przekraczają 5% naprężenia maksymalnego, to wpływ ten jest znikomy. W takim przypadku wielkość naprężeń niszczących σ_n obliczamy jak dla konstrukcji płaskiej (art. 12.2 ÷ 12.7), a samo zniszczenie zajdzie, gdy tak obliczone σ_n pojawią się w najbardziej obciążonej podłużniczce. Tę samą metodę postępowania stosujemy również wtedy, gdy warunek ten nie jest spełniony, jak np. w przekroju kołowym z małą ilością podłużnic (≤ 8), aczkolwiek otrzymane w ten sposób wyniki są na ogół mniejsze od rzeczywistej wartości obciążeń niszczących.

c. *Wpływ nierównomierności naprężeń stycznych* towarzyszy działaniu siły poprzecznej, przy czym wielkość tego wpływu zależy od ukształtowania przekroju poprzecznego. Jeśli mianowicie przekrój ma kształt zbliżony do kołowego z równomiernie rozstawionymi podłużniczkami, to wpływ ten jest stosunkowo niewielki, gdyż naprężenia styczne w otoczeniu najbardziej obciążonej podłużniczki są niewielkie. Podobnie w pobliżu warstwy obojętnej, gdzie naprężenia styczne są maksymalne, naprężenia normalne są stosunkowo niewielkie. W takiej konstrukcji wystarcza zatem przeanalizować obciążenia niszczące dla tych dwóch punktów przekroju, traktując w obu punktach stan naprężeń jako proste ściskanie lub ścinanie.

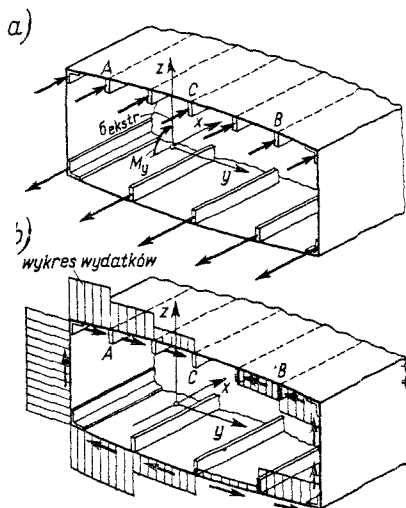
Inaczej nieco przedstawia się sytuacja w konstrukcji cienkościennej o przekroju zbliżonym do skrzynkowego (rys. 12.45b). Jak bowiem wiadomo, naprężenia styczne w narożnych odcinkach pokrycia górnego mają prawie tę samą wartość co i maksymalne naprężenia styczne w ściankach pionowych,

podczas gdy naprężenia normalne nie różnią się zbytnio od maksymalnych naprężeń normalnych. W takim przypadku poza najbardziej obciążoną podłużniczką C należy zawsze sprawdzić wytrzymałość obu podłużniczek A i B , sąsiadujących z narożnymi, traktując stan naprężeń w ich otoczeniu jako równomierne ściskanie i ścinanie (patrz punkt a. tego artykułu).

d. *Wpływ statycznej niewyznaczalności konstrukcji.* W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy milcząco, że rozkład obciążeń na poszczególne elementy jest znany (np. siła ściskająca podłużniczkę, wydatek styyczny w pokryciu itp.). Stwierdzenie powyższe jest prawdziwe dopóty, dopóki mamy do czynienia z prostymi konstrukcjami, poddanymi działaniu prostych obciążeń, jak np. ściskanie; byłoby ono również prawdziwe i w rzeczywistości, z reguły statycznie niewyznaczalnej konstrukcji, gdyby rozkład obciążenia na elementy zostawał stały, a wielkość sił w nich proporcjonalna do obciążenia. W takim



Rys. 12.44. Lokalne zniszczenie przy jednoczesnym ściskaniu i ścinaniu



Rys. 12.45. Układ sił wewnętrznych w analizie wpływu nierównomierności rozkładu naprężeń przy zniszczeniu

przypadku wystarczyłoby przeprowadzenie bardziej lub mniej skomplikowanego rachunku według wskazówek rozdz. 6 ÷ 8, aby problem można było uważać za rozwiązany. W rzeczywistości zagadnienie jest znacznie bardziej złożone, gdyż w miarę wzrostu obciążenia następuje, nieliniowa najczęściej, zmiana sztywności wyobczonego pokrycia, a samo zagadnienie wyznaczenia przebiegu sił w konstrukcji staje się zagadnieniem nieliniowym. Ponieważ ścisłe rozwiązanie tak postawionego problemu dotychczas nie istnieje, w obliczeniach praktycznych zadowalamy się z konieczności przybliżeniem. Polega ono na oszacowaniu naprężeń niszczących najbardziej obciążoną podłużniczkę i określeniu stąd odpowiedniej szerokości współpracującej b_w , $\chi = d\sigma_{sr}/d\sigma_{max}$ (art. 12.1) oraz zastępczych sztywności pasów* $E(A_p + b\delta\chi)$. Mając te zastępcze sztywności pasów oraz zredukowaną do $\sim 80\%$ pierwotnej wartości sztywność pokrycia na ścinanie, przeprowadzamy rachunek wielkości statycznie niewyznaczalnych (rozdz. 8). Określone stąd wielkości sił wewnętrznych przyjmujemy do analizy obciążeń niszczących. Oszacowania naprężeń niszczących można przy tym dokonać dość dokładnie, zważywszy, że w nowoczesnych konstrukcjach zniszczenie ma najczęściej postać lokalną (art. 12.3).

* Dla wszystkich ściskanych odcinków pokrycia przyjmujemy χ jak dla najbardziej obciążonego odcinka, natomiast dla rozciąganych odcinków $\chi = 1$.

12.13. Uwagi końcowe

Czytelnika, który przeszedł przedstawioną w rozdz. 12 analizę, uderzy niewątpliwie fakt oparcia się tej analizy na danych empirycznych jak i ograniczenia tej analizy tylko do najprostszych rodzajów obciążeń. W takich przypadkach nasuwa się zawsze kwestia wiarygodności otrzymanych rezultatów jak i kwestia ekstrapolacji rozważań na przypadki, wykraczające poza poruszone w analizie.

Odnosnie pierwszej kwestii trzeba stwierdzić z całym naciskiem, że wszystkie informacje opierające się na danych doświadczalnych stanowią dolną granicę wyników laboratoryjnych, podczas gdy wartości średnie są o $10 \div 25\%$ wyższe niż podane w podręczniku. Nie należy jednak zapominać, że, zgodnie z zapowiedzią we wstępie do tego rozdziału, badania te dotyczą konstrukcji lotniczych, których jakość wykonania, kontrola użytych materiałów itd. przewyższają poziom technologii innych działów przemysłu. Z tego powodu kwestia ekstrapolacji danych doświadczalnych zarówno na inne materiały niż stopy Al, jak i na inne konstrukcje niż lotnicze wymaga odpowiednich badań laboratoryjnych, które jak dotychczas nie były prowadzone systematycznie. Powyższe zastrzeżenie nie dotyczy rozważań teoretycznych, których zastosowanie w innych działach budowy ustrojów nośnych nie nasuwa wątpliwości.

Poza postawionymi kwestiami należy wyjaśnić jeszcze powody, które zmuszają w analizie zniszczenia konstrukcji do posługiwania się daleko idącymi uproszczeniami. Powód taki jest właśnie tylko jeden, a mianowicie ogromne skomplikowanie problemu uniemożliwiające ścisłą analizę. Tak na przykład najprostsze, rozpatrywane w tym rozdziale zagadnienie, tj. analiza zachowania się płyty lub odcinka powłoki po przekroczeniu obciążeń krytycznych, prowadzi do układu dwóch nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, przy czym nieliniowość ta istnieje, nawet gdy materiał jest idealnie sprężysty. Ścisłe rozwiązanie tego układu nie jest dotychczas znane. Podobnie przedstawia się sytuacja w analizie obciążeń niszczących, gdzie dodatkową trudność daje nieliniowość zależności naprężeń od odkształceń. Te wszystkie czynniki są przyczyną, że, nawet w nielicznych przypadkach istniejących rozwiązań przybliżonych, rachunki wypadają skomplikowane i dlatego w podręczniku zostały one pominięte.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO
NAUKOWE

Wydanie II. Nakład 2500+250
egz. Ark. wyd 49,5 Ark. druk. 35,25.
Papier. druk. sat. V kl. 65 g. 70×100.
Oddano do składania I.IV.64 r.
Podpisano do druku w lipcu 1965.
Druk ukończono w sierpniu 1965.
Zam. 555/64 E-80 Cena zł. 62

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej